LE PROBLÈME DE CAUCHY ET LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES HYPERBOLIQUES

LEÇONS

PROFESSÉES A L'UNIVERSITÉ YALE

PAR

J. HADAMARD

MEMBRE DE L'INSTITUT

TRADUITES DE L'ANGLAIS PAR

Mlle J. HADAMARD

ÉDITION REVUE ET NOTABLEMENT AUGMENTÉE

PARIS

HERMANN ET Cie, ÉDITEURS

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—

1932

LE

PROBLÈME DE CAUCHY

ET LES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LINÉAIRES HYPERBOLIQUES

CONFERENCES SILLIMAN
PUBLIÉES PAR LA YALE UNIVERSITY PRESS

ELECTRICITY AND MATTER. By Joseph John Thomson, D. Sc. LL.D., Ph.D., F.R.S., Fellow of Trinity College and Cavendish Professor of Experimental Physics, Cambridge University. (Fourth printing.)

THE INTEGRATIVE ACTION OF THE NERVOUS SYSTEM. By Charles S. Sherrington, D.Sc., M.D., Hon. LL.D. Tor., F.R.S., Holt Professor of Physiology, University of Liverpool. (Eighth printing.)

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL APPLICATIONS OF THERMODYNAMICS THO CHEMISTY. By Dr. Walter Nernst, Professor and Director of the Institute of Physical Chemistry in the University of Berlin.

RADIOACTIVE TRANSFORMATIONS. By Ernest Rutherford, D.Sc., LL.D., F.R.S., Macdonald Professor of Physics, McGill University. (Second printing.)

THEORIES OF SOLUTIONS. By Svante Arrhenius, Ph.D., Sc.D., M.D., Director of the Physico-Chemical Department of the Nobel Institute, Stockholm, Sweden. (Fourth printing.)

IRRITABILITY. A Physiological Analysis of the General Effect of Stimuli in Living Substances. By Max Verworn, M.D., Ph.D., Professor at Bonn Physiological Institute. (Second printing.)

STELLAR MOTIONS. With Special Reference to Motions Determined by Means of the Spectrograph. By William Wallace Campbell, Sc.D., LL.D., Director of the Lick Observatory, University of California. (Second printing.)

PROBLEMS OF GENETICS. By William Bateson, M.A., F.R.S., Director of the John Innes Horticultural Institution, Merton Park, Surrey, England. (Second printing.)

THE PROBLEM OF VOLCANISM. By Joseph Paxson Iddings, Ph.B., Sc.D. (Second printing.)

PROBLEMS OF AMERICAN GEOLOGY. By William North Rice, Frank D. Adams, Arthur P. Coleman, Charles D. Walcott, Waldemar Lindgren, Frederick Leslie Ransome and William D. Matthew. (Second printing.)

ORGANISM AND ENVIRONMENT AS ILLUSTRATED BY THE PHYSIOLOGY OF BREATHING. By John Scott Haldane, M.A., M.D., F.R.S., Hon. LL.D. Birm. and Edin., Fellow of New College, Oxford; Honorary Professor, Birmingham University. (Second printing.)

A CENTURY OF SCIENCE IN AMERICA. With Special Reference to the American Journal of Science 1818-1918. By Edward Salisbury Dana, Charles Schuchert, Herbert E. Gregory, Joseph Barrell, George Otis Smith, Richard Swann Lull, Louis V. Pirsson, William E. Ford, R. B. Sosman, Horace L. Wells, Harry W. Foote, Leigh Page, Wesley R. Coe and George L. Goodale.

A TREATISE ON THE TRANSFORMATION OF THE INTESTINAL FLORA WITH SPECIAL REFERENCE TO THE IMPLANTATION OF BACILLUS ACIDOPHILUS. By Leo F. Rettger, Professor of Bacteriology, Yale University, and Harry A. Cheplin, Seessel Fellow in Bacteriology, Yale University.

THE EVOLUTION OF MODERN MEDICINE. By Sir William Osler, Bart., M.D., F.R.S. (Third printing.)

RESPIRATION. By J. S. Haldane, M.A., M.D., F.R.S., Hon. LL.D. Birm. and Edin., Fellow of New College, Oxford; Honorary Professor, Birmingham University.

AFTER LIFE IN ROMAN PAGANISM. By Franz Cumont. (Second printing.)

THE ANATOMY AND PHYSIOLOGY OF CAPILLARIES. By August Krogh, Ph.D., LL.D., Professor of Zoö-physiology, Copenhagen University. (Enlarged and revised edition.)

LECTURES ON CAUCHY'S PROBLEM IN LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. By Jacques Hadamard, LL.D., Member of the French Academy of Sciences, Foreign Honorary Member of the American Academy of Arts and Sciences.

THE THEORY OF THE GENE. By Thomas Hunt Morgan, LL.D., SC.D., Ph.D., Professor of Biology, California Institute of Thechnology. (Enlarged and revised edition.)

THE ANATOMY OF SCIENCE. By Gilbert N. Lewis, Ph.D., Sc.D., Professor of Chemistry and Dean of the College of Chemistry, University of California. (Second printing.)

BLOOD. A. Study in General Physiology. By Lawrence J. Henderson, A.B., M.D., Professor of Biological Chemistry in Harvard University.

LA FONDATION SILLIMAN

En l'année 1883, une somme de 80.000 dollars fut léguée au Président et aux Membres du College Yale en la cité de New Haven, pour en conserver le dépôt, à titre de don, par les enfants de Mme Hepsa Ely Silliman en l'honneur leur bien-aimée et honorée mère.

Sur cette fondation, il a été demandé et recommandé au College Yale d'instituer annuellement une série de leçons destinées à démontrer la prévoyance, la sagesse et la bonté de Dieu, telles qu'elles se manifestent dans le monde tant naturel que moral. La conviction du testateur était que toute présentation bien ordonnée des faits de la nature ou de l'histoire contribuait au but de cette fondation plus efficacement que n'importe quelle tentative de développement sur les principes de la doctrine ou de la foi; et, en conséquence, il a entendu exclure du but de la fondation des leçons de théologie dogmatique ou polémique et la réserver bien plutôt aux sujets empruntés aux domaines de la science naturelle ou de l'histoire, tout particulièrement de l'astronomie, de la chimie, de la géologie et de l'anatomie.

Il a été, en outre, prescrit que chaque cours annuel ferait l'objet d'un volume appelé à faire partie d'une série constituée en mémoire de Mme Silliman. La donation est venue en la possession de l'Université Yale en l'année 1901 et le présent volume constitue le dix-huitième de la série des volumes commémoratifs.

PRÉFACE

Le présent ouvrage est un résumé de mes recherches sur le cas hyperbolique des équations linéaires aux dérivées partielles. J'ai eu le plaisir d'en exposer certaines parties à un public américain à Colombia University (1911), *et d'en traiter d'autres aux Universités de Rome* (1916) *et de Zurich* (1917) (1).

L'origine des recherches qui vont suivre se trouve dans Kirchhoff, et surtout dans les Mémoires fondamentaux de M. Volterra sur les ondes sphériques et cylindriques. Je me suis proposé de poursuivre le travail du géomètre italien, et pour cela de le modifier et de l'étendre de sorte qu'il devienne applicable à toutes les équations hyperboliques (normales), au lieu de l'être à une seule d'entre elles. D'un autre côté, cet ouvrage peut être considéré comme faisant suite à mes Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique, *et même comme remplaçant une grande partie du dernier chapitre. Celui-ci n'était, du reste, qu'un essai où je voulais seulement montrer les difficultés du problème dont je suis maintenant en état de présenter la solution.*

On pourra plus tard étendre ce travail aux équations d'un ordre supérieur, aux systèmes d'équations et même appliquer aux équations non linéaires (l'étude de ces équations a été entreprise récemment, grâce à la théorie des équations intégrales) : j'ai cependant laissé ces sujets délibérément de côté, car le premier se suffit à lui-même. Je serais heureux que des géomètres réussissent à étendre les méthodes qui vont suivre à ces autres cas (2).

(1) Mentionnons également une courte note au Congrès International des Mathématiciens à Strasbourg (Septembre 1920).

(2) D'importantes recherches ont été développées sur ce point, dans ces dernières années, par M. Giraud.

En plus du Mémoire fondamental de M. Volterra (Acta Mathematica, *vol.* XVIII) *et des suites qu'il y a données, nous mentionnerons également les ouvrages de MM. Tedone, Coulon et d'Adhémar* (1), *comme développant et complétant le point de vue de M. Volterra. L'ouvrage du dernier d'entre eux*, Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (*Collection Scientia; Paris, Gauthiers-Villars*), *comprend une revue bibliographique complète, et M. Volterra en a donné une autre dans ses conférences faites à Stockholm (publiées chez Hermann, à Paris). Je n'ai pas jugé nécessaire d'en donner une troisième, ni même d'ajouter aux mentions précédentes, et je me contenterai de citations en notes, en m'excusant d'avance vis-à-vis des auteurs que je puis avoir oubliés* (2).

Je dois encore justifier le changement de deux termes qui avaient été précédemment adoptés dans la Science. L'un est celui de « solution fondamentale », en « solution élémentaire »; l'autre consiste à remplacer par « transversale » le mot « conormale » créé par le premier inventeur lui-même (d'Adhémar). Le premier changement a été fait pour éviter la confusion, avec les « solutions fondamentales » introduites par Poincaré et ses successeurs (comme solutions d'équations intégrales homogènes); le second, pour des raisons d' « économie de pensée », car la notion en question se présente déjà en Calcul des Variations, où elle est désignée par le mot « transversale ».

J. H.

Juillet 1921.

---

(1) Les recherches de M. Picard — que nous mentionnons en leur lieu et place — sont aussi essentielles pour plusieurs parties du présent volume.

(2) Nos propres Mémoires sur le sujet ont été insérés dans les *Annales Scient. Ec. Norm. Sup.* (1904-1905) et les *Acta Mathematica* (vol. XXXI, 1908). Ce dernier travail contient plusieurs erreurs dans les coefficients numériques, par exemple dans la formule (30′), p. 349, où un dénominateur 2 doit être supprimé (il faudrait de même ajouter un facteur 2 à la ligne précédente), et dans toutes les formules concernant m pair (correspondant à notre Livre IV) qui doivent être corrigées ainsi qu'elles le sont dans notre présent ouvrage. Les corrections nécessaires, telles que nous venons de les indiquer, ont d'ailleurs été apportées dans un tome suivant du même recueil.

PRÉFACE DE L'ÉDITION FRANÇAISE

Je suis heureux de pouvoir, avec l'assentiment dont je tiens tout d'abord à remercier l'Université Yale, offrir au public français la traduction des Leçons que j'ai professées à cette Université en 1920.

J'ai entendu, en principe, reproduire fidèlement ma rédaction primitive. A part quelques retouches de détail (et, particulièrement, quelques citations de Mémoires qui n'étaient pas parvenues à ma connaissance lors de la parution de l'ouvrage), je ne m'en suis écarté que sur les points suivants :

Grâce à des recherches datant de 1924 (1), *j'ai pu, au Livre* IV, *adjoindre à la résolution du problème de Cauchy par « descente », une solution directe. Il a été également utile de revoir l'étude du problème mixte pour la frontière plane, en précisant la démonstration d'existence de la solution : ce qui a conduit d'ailleurs à quelques remaniements dans les Livres antérieurs.*

D'autre part, tout en m'astreignant, comme par le passé, à ne supposer chez le lecteur (sauf dans un ou deux passages nommément désignés) aucune connaissance de la Relativité ni du Calcul différentiel absolu, j'ai cru devoir m'inspirer davantage des idées acquises à cet égard et faire connaître la forme invariantive donnée aux solutions. Certains calculs ont été présentés exclusivement sous cette forme à laquelle, d'une manière générale, a été consacré un appendice à la fin du volume.

---

(1) *Bull. Sc. Math. France*, t. LII, p. 241.

La tâche était rendue très aisée par les travaux de M. de Donder (1); *elle m'a été simplifiée davantage encore par l'aide directe que l'éminent géomètre de Bruxelles a bien voulu m'apporter en revoyant à ce point de vue toute la marche des calculs et dont je ne saurais lui exprimer trop vivement ma reconnaissance.*

Un second appendice est consacré, dans le cas général, au problème mixte dont, comme on pourra le voir, la solution peut être présentée sous une forme absolument parallèle à celle qui s'applique au problème de Cauchy; un troisième, aux recherches par lesquelles M. Hans Lewy a complété le théorème d'unicité de M. Holmgren, en l'étendant aux équations non linéaires.

---

(1) Voir, en particulier, de Donder *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque : Journ. de Math.*, 9e série, t. VII, 1928 (t. I du Jubilé Emile Picard).

Nous croyons utile de rassembler ici, avec indication des endroits où elles ont été introduites, certaines notations d'un usage courant dans tout le cours de l'ouvrage.

LA NOTATION	INTRODUITE		DESIGNE
	LIVRE	N°	
m	I	2	Nombre des variables indépendantes.
(e_1)	I	4	Equation des cordes vibrantes et des tuyaux sonores.
(C_1)	I	4	Conditions de Cauchy correspondantes.
(e_3), (C_3)	I	4	Equation du son et données de Cauchy correspondantes.
(e_2), (C_2)	I	4 *bis*	Equation des ondes cylindriques et données de Cauchy correspondantes.
(E)	I	12	Forme générale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre.
$\mathcal{F}$	II	37	Son premier membre.
$(\mathcal{E})$	III	102	Equation adjointe.
$\mathcal{G}$	II	37	Son premier membre.
A, (A)	I	13	Forme et équation caractéristiques.
Δ	II	56	Discriminant de la forme caractéristique.
(P)	II	28	Formule de Poisson.
(P′)	II	30	Formule correspondante pour (e_2).
(F)	II	40	Formule fondamentale.
$dS_G = \frac{dT}{dG}$	II	39	Elément de frontière.
ν	II	40	Transversale.
(ϵ)	II	42	Equation linéaire du 2e ordre hyperbolique à deux variables.
(F_1)	II	36	Formule fondamentale correspondante.
(L_1), (L_2)	II	55	Equations différentielles des géodésiques.
(L′)	II	Note additionnelle	Equations aux variations correspondantes.
H	II	55	Forme métrique.
D	II	56	Son discriminant.
Γ	II	58	Conoïde caractéristique et premier nombre de son équation.
v	III	72	Solution élémentaire de l'équation adjointe.
V	*ibid.*	*ibid.*	Son numérateur.
$\mathcal{V}$	IV	134	Coefficient de son terme logarithmique pour m pair.
$\mathcal{V}_{(0)}$	IV	192	Coefficient correspondant dans la « parametrix » ou solution élémentaire approchée.
$\overline{v}$, $\overline{V}$, $\overline{\mathcal{V}}$, $\overline{\mathcal{G}}$	II, IV	40 *bis*, 174	Quantités correspondantes à v, V, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ dans le calcul invariantif.
(v), (V), $(\mathcal{V})$	App. II	223	Quantités analogues à v, V, $\mathcal{V}$ dans la théorie du problème mixte.

LIVRE PREMIER

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU PROBLÈME DE CAUCHY

CHAPITRE PREMIER

THÉORÈME FONDAMENTAL DE CAUCHY
CARACTÉRISTIQUES

Nous aurons à nous occuper d'équations linéaires aux différentielles partielles du type hyperbolique, et spécialement du problème de Cauchy qui les concerne.

On sait ce qu'est une équation linéaire aux dérivées partielles. Nous expliquerons plus loin ce qu'est le type hyperbolique. Rappelons ce qu'est le problème de Cauchy.

1. ***Problèmes aux limites en général.*** — Une équation différentielle — qu'elle soit ordinaire ou aux dérivées partielles — admet un nombre infini de solutions. L'ancien point de vue classique, pour son intégration, consiste à trouver ce qu'on appelle « l'intégrale générale », c'est-à-dire une solution de l'équation contenant autant d'éléments arbitraires (paramètres arbitraires ou fonctions arbitraires) qu'il est nécessaire pour représenter toutes les solutions, sauf quelques solutions exceptionnelles.

Mais, dans les recherches plus récentes, notamment en ce qui concerne les équations aux dérivées partielles, on a renoncé à cette manière de voir, non seulement à cause de la difficulté ou de l'impossibilité d'obtenir cette « intégrale générale », mais surtout parce que la question est très loin de consister simplement dans sa détermination. La question, pour beaucoup d'applications, ne consiste pas à trouver une solution *quelconque* u de l'équation différentielle, mais à choisir, parmi toutes ces solutions possibles, une certaine d'entre elles, définie par des conditions accessoires conve-

nablement données [1]. L'équation aux dérivées partielles (« équation indéfinie » de certains auteurs) doit être vérifiée dans tout le domaine R à m dimensions (si m est le nombre des variables indépendantes) dans lequel u peut exister : en d'autres termes, elle doit être une identité partout où u est défini; et, en même temps, les conditions accessoires (« équations définies ») doivent être vérifiées aux limites de R. Il s'en présentera des exemples dans tout le cours de cet ouvrage.

Si nous avons l'intégrale générale, il reste à choisir, dans son expression, les éléments arbitraires de manière à satisfaire aux conditions accessoires. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, les éléments arbitraires étant des paramètres numériques, on a à les déterminer par un nombre égal d'équations numériques, de sorte que, du moins théoriquement, la question peut être considérée comme résolue, étant réduite à de l'algèbre ordinaire; mais pour les équations aux dérivées partielles, les éléments arbitraires sont des fonctions, et le problème de leur détermination peut être la principale difficulté de la question. Par exemple, on connaît l'intégrale générale de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$; et cependant ceci ne nous permet pas de résoudre, sans une suite de calculs compliqués, des problèmes importants dépendant de cette équation, comme par exemple celui de la distribution électrique.

Les vraies questions qui se posent pour nous sont les « problèmes aux limites », chacun d'eux consistant à déterminer une fonction inconnue u de manière à satisfaire :

1° à une équation aux dérivées partielles « indéfinie »;

2° à certaines conditions aux limites ou conditions « définies ».

Un tel problème sera dit « correctement posé » si ces conditions accessoires sont telles qu'elles déterminent une solution et une seule de l'équation indéfinie.

Le plus simple des problèmes aux limites est le problème de Cauchy.

---

(1) Ceci donne même la vraie manière d'obtenir l'intégrale générale car, en faisant varier les données accessoires de toutes les manières possibles, on peut toujours obtenir une solution donnée de l'équation.

2. *Enoncé du problème de Cauchy.* — Il représente, pour les équations aux dérivées partielles, l'analogue exact du problème fondamental bien connu pour les équations différentielles ordinaires.

La théorie de ces dernières a été basée par Cauchy sur le théorème suivant. Soit une équation différentielle, du second ordre, par exemple :

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1}$$

ou, en résolvant par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = f(x, y, y'), \tag{1'}$$

une solution de cette équation est déterminée (moyennant des hypothèses convenables) si, pour $x=0$, on connaît les valeurs numériques y_0, y_0' de y et $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{ou, si l'équation est d'ordre } k\text{, les valeurs numériques de } y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right)$.

Soit, maintenant, une équation aux dérivées partielles du second ordre telle que (pour deux variables indépendantes) :

$$\Phi(u, x, y, p, q, r, s, t) = 0 \tag{2}$$

ou, si le nombre des variables indépendantes est m :

$$\Phi(u, x_i, p_i, r_i, s_{ik}) = 0, \tag{II}$$

où u est la fonction inconnue; $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les variables indépendantes et où les p_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ représentent les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x_i}$; r_i, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, s_{ik}, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$. Nous traiterons spécialement du cas linéaire, c'est-à-dire du cas où le premier membre est linéaire par rapport à u, p_i, r_i, s_{ik}, les coefficients étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Si on se

propose de trouver une solution de cette équation telle que, pour $x_m = 0$, u et la dérivée première $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ soient des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, soit :

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = u_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$

ceci s'appellera le *problème de Cauchy* relatif à $x_m = 0$; u_0 et u_1 seront les *données de Cauchy* et $x_m = 0$ sera l'hypersurface (1) — ici un hyperplan — qui « porte » les données.

3. Il est clair qu'il n'y a pas de raisons pour considérer exclusivement des hypersurfaces planes. Imaginons que l'espace à m dimensions subisse une transformation ponctuelle :

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} x_1 = \mathrm{G}_1(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m), \\ x_2 = \mathrm{G}_2(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \mathrm{G}_m(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m) \end{cases}$$

(u n'étant pas altéré par la transformation). L'hyperplan $x_m = 0$ deviendra, dans ce nouvel espace X, une certaine surface arbitraire S :

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{G}_m(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m) = 0.$$

L'équation différentielle étant remplacée par une équation analogue :

$$(\mathrm{II}a) \qquad \Phi(u, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_m, \mathrm{P}_i, \mathrm{R}_i, \mathrm{S}_{ik}) = 0,$$

le problème de Cauchy pour cette équation, par rapport à la surface S, consistera à trouver une solution de (IIa) satis-

---

(1) Dans l'espace à m dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, nous appellerons, pour abréger, *hypersurface* (ou même *surface*) la variété $(m-1)$ uple définie par une équation entre les x; nous appellerons *arête* la variété $(m-2)$ uple définie par deux équations. Une *ligne* sera, comme d'ordinaire, le lieu d'un point dépendant d'un seul paramètre; ce sera une ligne *droite* si les x sont des fonctions linéaires du paramètre.

faisant, en tous les points de la surface, à deux conditions telles que :

$$u = u_0, \frac{du}{dN} = U_1.$$

N est une direction arbitrairement donnée en chaque point de S, mais non tangente à cette surface; u_0 et U_1 (quantité convenablement déduite de u_0 et de la quantité u_1 primitive) sont des valeurs numériques données en chaque point de S, et sont de nouveau appelées *données de Cauchy* pour le cas actuel.

4. Exemples physiques. — Rappelons que le problème de Cauchy se présente dans beaucoup d'applications physiques. Par exemple, soit un tube cylindrique, indéfini dans les deux sens, rempli d'un gaz homogène qui peut être soumis à de légères perturbations. Admettons l'*hypothèse des tranches* de Bernoulli, de manière qu'on ait à traiter les mouvements d'un milieu à une seule dimension; le déplacement u d'une molécule étant toujours longitudinal et fonction de l'abscisse initiale x et du temps t, u doit satisfaire à l'équation (où ω est une constante) :

$$(e_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le mouvement sera complètement déterminé si, à l'instant $t = o$, on connaît les positions initiales (c'est-à-dire les perturbations initiales à partir des positions d'équilibre) et les vitesses initiales de toutes les molécules, ce que l'on exprimera analytiquement par les conditions :

$$(C_1) \qquad u(x, o) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, o) = u_1(x).$$

Il en est de même pour le déplacement de l'électricité dans un câble conducteur homogène indéfini dans les deux sens, la distribution des intensités et des potentiels tout le long du câble à l'instant initial étant donnée : la seule différence sera que le problème n'est pas régi par

l'équation (e_1), mais par l'équation appelée « équation des télégraphistes ».

Arrivons maintenant à un milieu à trois dimensions, c'est-à-dire à l'espace ordinaire. Considérons un gaz homogène remplissant l'espace indéfiniment en tous sens et sans aucune lacune.

Les petits mouvements d'un tel gaz seront régis par *l'équation du son* ou *des ondes sphériques* :

$$(e_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

u étant une fonction inconnue convenablement choisie de x, y, z, t (appelée « potentiel des vitesses »), et ω étant de nouveau une constante (vitesse du son dans le gaz). Connaître les perturbations initiales et les vitesses initiales à l'instant $t=0$ revient à connaître les conditions (conditions de Cauchy)

$$(C_3) \quad u(x, y, x, 0) = u_0(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = u_1(x, y, z),$$

u_0 et u_1 étant des fonctions données de x, y, z.

4 *bis*. Nous avons parlé de milieux à une dimension et à trois dimensions : nous pouvons naturellement concevoir aussi des milieux à deux dimensions. Imaginons que l'état d'une masse gazeuse se trouve être à chaque instant le même le long de chaque ligne verticale, de sorte que les pressions, les densités, les vitesses (ces dernières étant horizontales) soient indépendantes de la coordonnée verticale z. Un tel mouvement sera régi par *l'équation des ondes cylindriques* :

$$(e_2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

qui se déduit de (e_3) en supposant que u est indépendant de z. Ce cas étant évidemment un cas particulier du précédent, nous pouvons encore compléter la détermination de u par les conditions de Cauchy :

$$(C_2) \qquad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y).$$

On peut naturellement concevoir ce même problème comme correspondant au précédent pour des êtres vivant dans un espace à deux dimensions seulement. Mais il importe de se rappeler que ce problème à deux dimensions peut être considéré comme un simple cas spécial du problème à trois dimensions.

On doit remarquer que, dans chaque cas, le nombre des variables indépendantes est d'une unité plus grand que le nombre des dimensions du milieu, le temps t constituant une variable supplémentaire, ou, comme on peut le dire, jouant le rôle d'une nouvelle coordonnée [1]. On sait que les physiciens, dans ces temps derniers, ont complètement adopté ce point de vue : la combinaison d'un point d'espace et d'une valeur de t est appelée par eux « événement » ou « point d'univers », l'ensemble de tous les points de l'espace et de toutes les valeurs de t étant un « univers ».

5. ***Représentations géométriques.*** — Graphiquement, si on prend de nouveau un milieu à une seule dimension, on représentera la combinaison d'une valeur de x et d'une valeur de t (c'est-à-dire un point donné du milieu à un instant donné) par un point d'un plan des xt.

De même, on étudiera le mouvement d'un milieu à deux dimensions en introduisant les coordonnées x, y et t dans un espace analogue à l'espace ordinaire, le milieu à l'instant $t=0$ étant représenté par un certain plan de cet espace, tandis que les autres instants (en particulier les suivants) seront obtenus en faisant subir au plan une translation perpendiculaire à sa direction. Tout se présente comme si, en même temps que se produit le mouvement à deux dimensions, le plan horizontal dans lequel il se passe possédait une vitesse verticale égale à 1.

6. Le cas du mouvement dans l'espace ordinaire présentera un peu plus de difficultés : car, en ajoutant t, on

---

(1) Cette conception a été mise sous une forme frappante il y a un certain nombre d'années par Wells dans sa « Machine à explorer le temps ».

est conduit à introduire l'espace à quatre dimensions. La manière la plus simple de le faire consiste à imiter exactement la méthode de la géométrie descriptive ordinaire. Nous figurerons simultanément deux systèmes d'axes x, y, z *et* x, y, t (fig. 1) : chaque point à quatre dimensions,

Fig. 1.

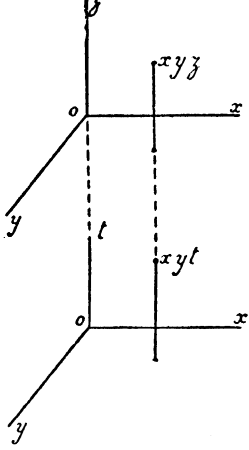


Fig. 1 *bis*.

ou « point d'univers », sera représenté par deux points simultanés (x, y, z) et (x, y, t). Le plan des xy jouera le rôle de « plan de terre », la seule différence avec la géométrie descriptive ordinaire étant que, pour plus de clarté, ce plan de terre est le plus souvent dessiné deux fois, comme dans la figure 1 *bis* (1).

7. ***Théorème de Cauchy-Kowalewski.*** — Les trois questions suivantes se posent évidemment en ce qui concerne le problème de Cauchy :

1° Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?

(1) Nous nous bornerons fréquemment à dessiner une « projection », par exemple le diagramme (x, y, t), ou même plus simplement (quel que soit m) la section par un espace à deux dimensions du diagramme à m dimensions.

La représentation de l'espace à quatre dimensions par deux projections sur espaces à trois dimensions a été donnée dès 1882 par M. Veronese (*Att. Ist. Veneto*, série V, t. VIII, p. 987-1024, particulièrement p. 1016 et suiv.). Voir un intéressant mémoire de M. Totorja y Miret (*Mem. de la Real Acad. de Ciencias y Artes*, t. XVIII, n° 11, Barcelone, mai 1924) sur cette question, avec liste bibliographique, à laquelle il convient d'ajouter les recherches de M. Mehmke (Conférence à l'Assemblée de printemps de l'Union des Mathématiciens et Naturalistes wurtembergeois, 28 févr. 1904). Ces indications sont venues à notre connaissance depuis la parution du texte anglais (*Note de la traduction*).

2° N'a-t-il qu'une seule solution (en d'autres termes, le problème est-il correctement posé?);

3° Et enfin comment peut-on calculer cette solution ?

Quoique les deux premières questions puissent être considérées simplement comme préliminaires (1), nous allons commencer par examiner comment on peut y répondre.

On sait que Cauchy lui-même, puis Sophie Kowalewski, et, au même moment, Darboux (2), considéraient le cas dans lequel (2) ou (II) peuvent être résolus par rapport à r (ou r_m), savoir :

$$r=f(u, x, y, p, q, s, t) \tag{2'}$$

ou :

$$r_m=f(u, x_1, \dots), \tag{II'}$$

ce qui est le cas pour (2) ou (II) si :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r_m}\neq 0; \tag{3}$$

sous cette hypothèse, ils ont démontré (ou du moins sont considérés généralement comme ayant démontré) que le *problème de Cauchy*, par rapport à $x=0$ (ou $x_m=0$), admet toujours une solution et une seule.

8. *Fonctions analytiques.* — La démonstration de ce théorème a été simplifiée par M. Goursat (3) de telle sorte

---

(1) Pour de plus amples détails, voir nos Conférences de la Société française de physique (*Journal de physique*, 1906), de Columbia (1911), New-York, Columbia University Press (1915), 1re Conférence.

(2) Cauchy, *C. R. Acad. Sc.*, vol. XIV, p. 1020; vol. XV, p. 44, 85, 131 .(1842) Sophie Kowalewski, *Thesis*, Göttingen (1874) et *Journal für math.*, t. LXXX (1875), p. 1-32; Darboux, *C. R. Acad. Sc.*, vol. LXXX (1875), p. 101-104 et p. 317. Il semble que Sophie Kowalewski n'ait pas connu le travail de Cauchy (lequel était également inconnu de Darboux, et ne fut remarqué que par Genocchi, dans le même vol. LXXX des *C. R.*). Elle attribue même à Weierstrass, *Journal für Math.*, t. LI (1856), p. 43, le premier énoncé du théorème concernant les équations différentielles ordinaires, ce qui est d'autant plus étonnant qu'elle cite Briot et Bouquet (*Journ. Ec. Polytechnique*, vol. XXI), lesquels commencent par renvoyer à Cauchy (quoique sans donner une citation précise). Le théorème fut démontré à nouveau dans d'autres travaux postérieurs, tels que ceux de Méray et Riquier.

(3) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. XXVI (1898), p. 129; *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. II, p. 360.

que nous pouvons la donner en quelques lignes : mais nous avons à rappeler auparavant ce qu'est la notion de fonction analytique.

La fonction $f(x)$ de la variable (réelle) x est dite analytique, ou, plus exactement [1] *analytique et régulière* ou aussi *holomorphe*, dans l'intervalle (a, b) si, x_0 étant un nombre quelconque de l'intervalle, f peut être représentée, pour x suffisamment voisin de x_0, par une série de Taylor ordonnée suivant les puissances de $(x - x_0)$ et dont le rayon de convergence est, par conséquent, différent de o.

Dans ce cas, la fonction f peut être définie, et admettra des dérivées de tous les ordres, non seulement pour les valeurs réelles ci-dessus mentionnées de x, mais aussi pour les valeurs imaginaires, à condition que leurs points représentatifs soient suffisamment rapprochés du segment (a, b) de l'axe réel.

Mais la théorie des fonctions de Cauchy montre que cette deuxième propriété — savoir, l'existence dans le domaine imaginaire avec continuité et dérivabilité — implique inversement le développement de Taylor, et donne ainsi une deuxième définition des fonctions analytiques, complètement équivalente à la première.

L'intervalle de convergence de la série de Taylor pour f peut être limité par des singularités de f dans (a, b); mais cet intervalle est généralement sans aucune relation apparente avec ces singularités, et plus petit que ne le donnerait leur seule considération (étant en réalité en relation avec les singularités imaginaires).

Tout ceci peut être étendu immédiatement au cas de plusieurs variables, une fonction analytique de x, y, z étant caractérisée par l'une des deux définitions (équivalentes) :

(A) $f(x, y, z)$ est analytique dans le volume $\mathcal{V}$ si, (x_0, y_0, z_0) étant un point de $\mathcal{V}$, f peut être représenté par une série de Taylor convergente suivant les puissances de

---

(1) Souvent, les analystes ne cessent pas d'appeler une fonction « analytique », lorsque son domaine d'existence contient des points singuliers (pôles, points essentiels, etc.).

$(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$, pour chaque position de (x, y, z) dans une certaine sphère de centre (x_0, y_0, z_0);

(B) $f(x, y, z)$ est analytique dans le volume $\mathcal{V}$ si on peut définir f de manière qu'elle soit continue et dérivable, non seulement pour les points (réels) de $\mathcal{V}$, mais pour tout point $x = x' + x''i$, $y = y' + y''i$, $z = z' + z''i$ tel que (x', y', z') soit dans $\mathcal{V}$ et que $|x''|$, $|y''|$, $|z''|$ soient suffisamment petits.

Les fonctions analytiques sont les seules obtenues en général grâce à nos procédés mathématiques. Mais, parmi les fonctions en général, elles sont, en réalité, très spéciales (1). Ceci se voit immédiatement par le fait simple (et important) que *le prolongement d'une fonction analytique est déterminé*. Si $f(x)$ est analytique dans (a, b), la connaissance de sa valeur dans un sous-intervalle quelconque (a', b') — quelque petit qu'il soit — nous permet de le calculer dans tout (a, b).

Pour les fonctions non analytiques, le prolongement n'a, généralement, aucun sens. Une telle fonction n'étant donnée que dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, ses valeurs dans l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$ peuvent être définies d'un nombre infini de manières, et il n'existe pas de raison, en général, de préférer un quelconque de ces prolongements à un autre.

9. *Fonctions régulières.* — Nous aurons à nous occuper de plusieurs espèces de fonctions qui ne seront pas forcément analytiques; elles seront restreintes cependant par certaines hypothèses de régularité.

Une fonction d'une ou plusieurs variables sera *régulière* si elle est continue et admet des dérivées continues jusqu'à un certain ordre p. Cet ordre variera suivant la nature de la question. Pour être strict, il faudrait l'indiquer avec précision dans chaque cas : je dois dire, cependant, que j'omettrai souvent de le faire, car cette précision ne me semble pas valoir, dans le cas actuel, les précautions parfois fastidieuses

---

(1) Pour plus amples détails, voir notre travail *La série de Taylor et son prolongement analytique*, 2e édition, Paris, Gauthier-Villars, 1927.

qu'elle nécessite. Il nous suffit de savoir qu'un tel ordre existe, ce qui est généralement évident dans chaque question particulière.

Une fonction régulière admet un développement de Taylor, limité aux termes d'un certain ordre, et, comme ses dérivées admettent également des développements correspondants, toutes les opérations basées sur un tel développement, et, en général, toutes les opérations du Calcul différentiel qui sont valables pour les fonctions analytiques, le sont aussi pour les fonctions « régulières », à condition qu'elles n'introduisent pas de dérivées d'un ordre supérieur à l'ordre p. Par exemple, une transformation ponctuelle telle que (T) (§ 3) n'altérera pas la régularité si les fonctions G sont elles-mêmes régulières (à la condition, naturellement, que le Jacobien ne s'annule pas).

Appeler une fonction « analytique et régulière », reviendra à dire qu'elle est holomorphe.

10. ***Démonstration du théorème de Cauchy-Kowalewsky.*** — Pour le théorème fondamental concernant les équations différentielles *ordinaires*, rappelons que Cauchy et ses successeurs ont donné deux sortes de démonstrations.

1° L'une d'elles est celle que Cauchy appelle « Calcul des Limites » (1), et les auteurs modernes « méthode des fonctions majorantes ». Si on prend l'équation différentielle donnée sous la forme (1') (§ 2), cela suppose forcément que le second membre est holomorphe en x, y, y' dans le voisinage de ($x = 0$; $y = y_0$, $y' = y_0'$). Partant du fait que n'importe quel développement convergent de Maclaurin suivant les puissances de x, y, z admet un développement « majorant » d'une quelconque des formes

$$\frac{K}{1-\frac{x+y+z}{\rho}}, \quad \frac{K}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)}, \quad \frac{K}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y+z}{\rho_1}\right)}, \ldots$$

(K, ρ, ρ_1 étant des constantes convenablement choisies pour chaque cas), la démonstration établit (d'après les hypothèses

(1) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Goursat et notre propre *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, t. II.

précédentes) qu'il existe un (et un seul) développement convergent de Maclaurin suivant les puissances de x satisfaisant à l'équation donnée et aux conditions initiales.

2° Dans la deuxième sorte de méthodes (approximations successives), l'équation différentielle n'est plus obligatoirement analytique. Pour le second membre, il n'est plus exigé que des propriétés très simples (continuité et « condition de Lipschitz »). Néanmoins, on obtient le même résultat — savoir l'existence et l'unicité de la solution — que dans la première méthode, à ceci près que, naturellement, la solution elle-même n'est plus, en général, analytique.

La démonstration du théorème concernant les équations aux dérivées partielles correspond à la *première* classe de méthodes mentionnée plus haut. Nous allons la présenter sous la forme de M. Goursat [1].

En réduisant le nombre des variables indépendantes à deux, pour simplifier la notation, partons de l'équation :

$$(2') \qquad r = f(u, x, y, p, q, s, t)$$

et du problème de Cauchy correspondant, consistant dans la détermination de u par cette équation et les conditions définies :

$$(3) \qquad u(0, y) = u_0(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u_1(y).$$

Essayons de satisfaire à toutes ces conditions en choisissant pour u une série ordonnée suivant les puissances de x :

$$(4) \qquad u = u_0 + u_1 x + \ldots + \frac{u_h}{h!} x^h + \ldots.$$

Chaque $u_h = \left(\frac{\partial^h u}{\partial x^h}\right)_{x=0}$ sera une fonction de y, que nous devons déterminer.

u_0 et u_1 sont donnés. Pour trouver u_2, u_3, ..., remarquons que chaque dérivée $\frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k}$ pour $x=0$, sera une dérivée de u_h, quel que soit k. Donc, en faisant $x=0$ dans (2'), le

(1) Voir Goursat, *loc. cit.* [note (3) de la p. 11].

second membre contiendra uniquement, en plus de y lui-même, les fonctions u_0, u_1 et leurs dérivées $p=u_1$, $q=u_0'$, $s=u_1'$, $t=u_0''$, de sorte que le premier membre $(r)_{x=0}=u_2$ peut être considéré comme connu.

De plus, en différentiant une fois (2') par rapport à x et en faisant $x=0$, on obtient $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{x=0}=u_3$ en fonction de u_0, u_1, u_2 et leurs dérivées; et, de la même manière, des différentiations successives par rapport à x nous donneront les valeurs de u_4, u_5, ..., chaque u_h étant un polynôme en u_0, u_1, u_2, ..., u_{h-1} et leurs dérivées, ainsi qu'en f et en ses dérivées.

On peut aussi considérer chaque u_h comme développé suivant les puissances de $(y-y_0)$ (où y_0 est une valeur fixe de y) de manière à remplacer (4) par :

$$(4\ bis) \qquad u = \mathrm{S} = \sum\sum \frac{u_{hk}}{h!\,k!} x^h (y-y_0)^k :$$

alors chaque coefficient numérique u_{hk} sera exprimé par les opérations qui viennent d'être exposées, en fonction des termes précédents (c'est-à-dire des u_{hk} correspondant à des valeurs plus petites de h et au plus égales de k) et des coefficients du développement de Taylor [1] de f, par un polynôme P.

On voit que les conditions (2') et (5) déterminent chaque coefficient de (4) ou (4 *bis*). Par conséquent, nous pouvons déjà affirmer que *notre problème de Cauchy ne peut pas admettre plus d'une solution représentée par une série convergente, c'est-à-dire plus d'une solution holomorphe en* x.

Il faut maintenant montrer qu'en fait il existe une solution. Si on part du fait que la fonction est holomorphe en les variables qu'elle contient, et si on fait la même hypothèse pour les fonctions u_0 et u_1 dans le voisinage d'une certaine valeur fixe $y=y_0$, nous allons montrer que *la série* (4) *est*

---

(1) Nous voulons dire du développement suivant les puissances de x, $(y-y_0)$, $[u-u_0(y_0)]$, $[p-u_1(y_0)]$, $[q-u_0'(y_0)]$, $[s-u_1'(y_0)]$, $[t-u_0''(y_0)]$.

convergente pour $|x|$ suffisamment petit (1), et qu'*il en est ainsi également même pour la série double* (4 *bis*), à condition que $|x|$ et $|y - y_0|$ soient inférieurs à des limites positives convenablement choisies.

Nous commencerons par noter que, comme pour les équations différentielles ordinaires, les opérations successives pour la détermination de u_h comprennent seulement des différentiations, des multiplications et des additions (sans aucun emploi du signe —) : en d'autres termes, que le polynôme que nous avons appelé antérieurement P ne comprend que des termes précédés du signe +. Par conséquent, on aura une majorante de la série (4 *bis*) si on remplace chacun des développements de f, u_0, u_1 par un développement majorant. Toute la question se réduit à trouver des développements majorants tels que le problème correspondant ait certainement une solution.

Pour cela, on peut d'abord supposer que u_0, u_1, sont nuls, et même que la valeur de u_2 déduite de l'équation est également nulle; car, dans le cas général (u_0, u_1, $u_2 \neq 0$), on peut, à la place de u, introduire une nouvelle inconnue u' par la transformation

$$u' = u - u_0 - u_1 x - u_2 x^2,$$

et le nouveau problème en u' correspondra au cas particulier précédent. Moyennant cette condition (et y_0 étant pris égal à 0) une majorante de f sera :

$$\frac{K}{\left(1 - \frac{x+y+u+p+q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho_1}\right)} - K$$

(comme les valeurs initiales de x, y, u, p, q, s, t sont toutes nulles, et que la valeur correspondante de f est également nulle) et on pourra remplacer u_0, u_1, par des développements de Maclaurin à coefficients positifs *quelconques*, puis-

(1) Le fait que la série (4 *bis*), quand elle est convergente, définit certainement une solution du problème, s'établit comme dans le cas des équations différentielles ordinaires (et comme nous le montrerons au livre II, pour des buts similaires).

que n'importe quel développement de cette espèce est évidemment majorant de zéro. Par conséquent la démonstration sera faite si nous montrons que l'équation

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{K}}{\left(1 - \frac{x+y+u+p+q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho_1}\right)} - \mathrm{K}$$

admet une solution représentée par un développement de Maclaurin dont tous les coefficients sont positifs ou nuls, ou si nous montrons qu'il en est de même pour une autre équation quelconque où la quantité au second membre est remplacée par une quantité majorante. M. Goursat introduit une telle majorante en écrivant $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de x, α étant un nombre positif inférieur à 1 dont le choix est ce qui va nous occuper maintenant.

Pour la nouvelle équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{K}}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha}+y+u+p+q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho_1}\right)} - \mathrm{K},$$

cherchons une solution dépendant uniquement de la variable

$$\sigma = x + \alpha y.$$

La fonction u de σ aura à satisfaire à l'équation différentielle ordinaire

$$u'' = \frac{d^2 u}{d\sigma^2} = \frac{\mathrm{K}}{\left(1 - \frac{\frac{\sigma}{\alpha}+u+(1+\alpha)u'}{\rho}\right)\left(1 - \frac{(\alpha+\alpha^2)u''}{\rho_1}\right)} - \mathrm{K}$$

ou :

$$\left[1 - \frac{\mathrm{K}}{\rho_1}(\alpha+\alpha^2)\right]\frac{d^2u}{d\sigma^2} - \frac{\alpha+\alpha^2}{\rho_1}\left(\frac{d^2u}{d\sigma^2}\right)^2 = \frac{\mathrm{K}}{1 - \frac{\frac{\sigma}{\alpha}+u+(1+\alpha)\frac{du}{d\sigma}}{\rho}} - \mathrm{K}.$$

Si nous prenons maintenant α tel que $1 - \frac{K}{\rho_1}(\alpha + \alpha^2) > 0$, non seulement cette équation différentielle admettra (en raison du premier théorème de Cauchy) une solution holomorphe s'annulant avec σ, mais le développement de la solution aura tous ses coefficients positifs [1], C.Q.F.D.

Il n'y a rien d'essentiel à changer à ce qui vient d'être dit quand on passe au cas de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$; la double série S devient simplement une série multiple, la quantité σ étant $x + \alpha(y + z + \ldots)$ et quelques coefficients numériques nouveaux apparaissant dans les fonctions majorantes.

11. Le développement (4 *bis*) ainsi obtenu dépend du choix de y_0 et suppose, non seulement que $|x| < R$, mais aussi qu'on se limite à un intervalle convenable I autour de y_0. Au contraire, le développement (4) est indépendant de y_0. Plus exactement, si on donne à y_0 deux valeurs différentes telles que les deux intervalles I correspondants chevauchent l'un sur l'autre, chaque fonction u_h sera la même pour les deux cas dans la partie commune, ceci étant une conséquence du fait que la solution holomorphe du problème de Cauchy est unique.

Par conséquent, si nos hypothèses concernant f, u_0, u_1 sont exactes dans tout segment, quelque grand qu'il soit, de l'axe des y, les calculs précédents donneront le développement (4) dans le voisinage de ce segment tout entier. Les nombres K, ρ et ρ_1 ayant, comme on le sait, le premier un maximum et les deux autres des minima tout le long du susdit segment, la limite de convergence correspondante R pour $|x|$ peut aussi, s'il est nécessaire, être considérée comme constante.

Comme il a déjà été dit, la détermination ci-dessus de R (même si nous le prenons différent pour différentes valeurs de y_0) conduit généralement, pour le domaine de convergence

---

(1) Une quantité Y définie par $aY - bY^2 = X$, a, suivant les puissances de X, un développement de Maclaurin à coefficients tous positifs, comme on le voit, par exemple, par résolution directe de l'équation du second degré, du moment que a et b sont positifs.

de la série (4) et, *a fortiori*, pour le domaine d'existence de la solution u, à des limites qui sont trop petites au point d'être inutilisables en pratique.

12. *Caractéristiques.* — Les conclusions sont totalement différentes dans le cas exceptionnel où le signe $\neq$ dans la relation (3) (p. 11) est remplacé par le signe $=$. Dans ce cas, *la solution du problème de Cauchy n'existe en général pas, et, quand elle existe, n'est pas unique.*

Cette fois, des circonstances nouvelles apparaissent quand le nombre des variables est supérieur à deux. Prenons-le égal à trois et, en même temps, introduisons la nouvelle notation que nous emploierons à partir de maintenant, en représentant notre équation, qu'on supposera tout de suite linéaire, sous la forme (1)

$$\text{(E)} \qquad \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

les A_{ik}, les B_i, C et f étant des fonctions données des x. Dans le cas exceptionnel actuel, nous devons supposer (2) $A_{mm}\ (=A_{33})=0$, de sorte que l'équation se réduit à

$$\text{(6)} \qquad 2A_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + 2A_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}$$
$$+ A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

avec les conditions de Cauchy

$$u = u_0(x_1,\ x_2),\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = u_1(x_1,\ x_2),\ \text{pour } x_3 = 0.$$

Ici, on voit que le premier membre ne contient pas de double différentiation par rapport à x_3, de telle sorte que

---

(1) Cette notation est la notation usuelle pour les formes quadratiques, avec $A_{ik} = A_{ki}$, de telle sorte que chaque terme du second ordre à indices différents figure deux fois.

(2) $A_{mm} = 0$ peut être une identité en $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ ou, plus généralement, une identité en $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m-1}$ pour $x_m = 0$. Pour plus de simplicité, nous nous occupons simplement du premier cas, les conclusions étant les mêmes dans le second, comme on le voit sans difficulté.

(pour $x_3=0$) l'équation ne contient pas le coefficient u_2 de x_3^2, mais seulement u_0 et u_1; donc il ne détermine plus d'inconnue, mais donne une *condition de possibilité* pour le problème de Cauchy, à savoir

$$(7) \qquad 2A_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+2A_{23}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+B_3u_1+H=0,$$

avec

$$H=A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\partial x_2}+A_{22}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}+B_1\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial u_0}{\partial x_2}+Cu_0 - f.$$

Si u_0 et u_1 ne sont pas choisis de manière à satisfaire à cette équation, le problème n'a pas de solution.

Si, par exemple, u_0 est donné d'abord, nous aurons à prendre pour u_1 une solution de (7). On remarquera que ceci nous donne, pour u_1, une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration conduira, comme on le sait, au tracé, sur notre plan $x_3=0$, du système de lignes (l) défini par l'équation différentielle (1)

$$(l) \qquad \frac{dx_1}{A_{13}}=\frac{dx_2}{A_{23}}.$$

Supposons maintenant que la condition (7) soit remplie : nous n'avons, jusqu'à maintenant, pas de condition pour déterminer u_2. Mais nous pouvons tirer une telle condition de l'équation suivante (qui a été employée, dans le cas général, tel que nous l'avons traité précédemment, pour trouver u_3) obtenue en différentiant une fois par rapport à x_3 et en faisant $x_3 = 0$, ce qui donne immédiatement :

$$(7') \qquad 2A_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+2A_{23}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+B_3u_2+H_1=0,$$

où

$$H_1=2\frac{\partial A_{13}}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+2\frac{\partial A_{23}}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_3}u_1+\frac{\partial H}{\partial x_3}$$

ne dépend pas de u_2.

On voit, par conséquent, que u_2 n'est pas entièrement arbitraire, mais il peut cependant être choisi d'une infinité

(1) Les lignes (l) correspondant à $m > 3$ seront définies par ($m - 2$) équations différentielles entre $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

de manières : on peut le prendre égal à n'importe quelle solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles (7'). *Cette équation a les mêmes caractéristiques que* (7), savoir les lignes (l).

Le fait que, u_0 et u_1 étant donnés, u_2 peut être choisi de plus d'une manière peut s'exprimer en disant que *deux solutions de la même équation* (correspondant aux mêmes u_0 et u_1, mais à des u_2 différents) *peuvent être tangentes l'une à l'autre* [1] *en chaque point de* $x_3 = 0$ (ou plus généralement, de $x_m = 0$).

Des différentiations successives par rapport à x_3 nous donneront, de la même manière, pour u_3, u_4, ..., des équations linéaires aux dérivées partielles successives du premier ordre, leurs caractéristiques continuant à être les mêmes lignes (l).

Nous aurons plus tard à nous occuper de nouveau de ces lignes, et leur construction géométrique apparaîtra à ce moment. Pour l'instant, les calculs précédents nous donnent la présomption que, si notre problème de Cauchy n'est pas impossible (c'est-à-dire si la condition (7) est remplie), *il devient indéterminé*, car chacun des u_h successifs peut être choisi avec un certain degré d'arbitraire. Ceci, cependant, n'est qu'une présomption, car nous ne savons pas encore si le choix des u_h peut être fait de manière à rendre la série (4) convergente : nous aurons à démontrer ce fait plus tard, et ceci nous donnera, en même temps, le degré d'indétermination de u.

Si on admet cette démonstration comme faite, on voit, pour en résumer le résultat d'un mot, que le problème de Cauchy se présente comme la résolution d'un système de n équations ordinaires du premier degré à n inconnues dont le déterminant est nul.

---

(1) Deux fonctions u, v (d'une ou de plusieurs variables) sont dites *tangentes* en un point déterminé (c'est-à-dire pour un certain système de valeurs des variables) si elles et toutes leurs dérivées premières admettent des valeurs numériques égales chacune à chacune au point en question. Le contact est d'*ordre* p si des égalités analogues existent, non seulement entre les dérivées premières, mais entre toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p.

Nous ne nous sommes occupés que d'une équation linéaire, qui est le seul cas intéressant pour ce qui suit; le cas non linéaire conduit à des résultats essentiellement analogues, avec quelques différences au début du calcul, et se réduit même au premier par différentiation de l'équation donnée.

13. Le cas exceptionnel ci-dessus est d'une importance capitale pour notre étude ultérieure et pour toutes les recherches sur les équations aux dérivées partielles. Comment peut-on le définir si on pose le problème de Cauchy par rapport non à $x_m = 0$, mais à une surface quelconque telle que S (§ 3) ? Pour le voir, nous n'avons qu'à transformer la condition (3) en appliquant la transformation ponctuelle (T) : ce qui est un calcul élémentaire. On voit ainsi [1] que (dans la notation de § 3) *le cas exceptionnel est défini par la condition :*

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial R_i}\left(\frac{\partial G_m}{\partial X_i}\right)^2 + \sum_{i,k} \frac{\partial \Phi}{\partial S_{ik}} \frac{\partial G_m}{\partial X_i} \frac{\partial G_m}{\partial X_k} = 0.$$

Supposons de nouveau le problème linéaire, l'équation aux dérivées partielles ayant la forme

$$(E) \qquad \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f$$

(A_{ik}, B_i, C et f étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_m$). La condition pour que la variété $G(x_1, \ldots, x_m) = 0$ corresponde au cas exceptionnel sera :

$$(A) \qquad \sum A_{ik} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_k} = 0;$$

en d'autres termes, on l'obtiendra de la manière suivante :

Règle. — *On considère uniquement les termes du second ordre dans l'équation donnée, et, dans ces termes, on remplace chaque dérivée seconde de u par le carré ou le produit correspondant de dérivées premières de* G.

---

(1) La condition peut être trouvée directement, et même on peut achever le calcul du numéro précédent sans se servir d'une transformation ponctuelle : voir nos *Leçons sur la Propagation des ondes* (Hermann, 1903), chap. VII, n°s 278 à 288.

Si la condition (A) est remplie [c'est-à-dire si la quantité ci-dessus est nulle en chaque point [1] de la surface S], S est dite *caractéristique* [2] de l'équation E. La forme quadratique

$$\mathbf{A}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \sum_{i,k} A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

s'appelle la *forme caractéristique*.

La propriété fondamentale des caractéristiques s'exprime, en raison des considérations précédentes, par le fait qu'elles sont les seules surfaces le long desquelles deux solutions de l'équation peuvent se toucher : ce contact peut être d'un ordre quelconque (puisque, dans les calculs du numéro précédent, on peut admettre que $u_0, u_1, \ldots, u_{h-1}$ soient les mêmes pour deux solutions différentes, les valeurs de u_h différant).

Cette propriété est exactement semblable à la définition des caractéristiques pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et c'est pourquoi on leur donne la même dénomination, quoique les premières soient des surfaces et les secondes des lignes (quel que soit le nombre des variables).

L'équation (A) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle S doit satisfaire; géométriquement, on sait qu'on peut interpréter ceci en disant que, en chacun de ses points, S doit avoir son plan tangent tangent à un certain cône quadratique correspondant dont l'équation *tangentielle* est $\mathbf{A}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = 0$. Ce cône est appelé *cône caractéristique*.

---

(1) Le cas dans lequel la condition (A) est vérifiée en certains points de S et non en d'autres, quoique se présentant dans certains problèmes déjà traités, présente des difficultés qui n'ont pas encore été attaquées, car elles se sont montrées peu intéressantes dans les applications.

(2) La théorie des caractéristiques pour deux variables indépendantes est connue depuis Monge et Ampère (V. Darboux, *Théorie des surfaces*, vol. II, et Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*). Son extension au cas de $m > 2$ fut d'abord donnée par Bäcklund (*Math. Annalen*, vol. XIII, 1878), mais n'a pas été généralement connue avant d'avoir été retrouvée par Beudon (*Bull. Soc. Math. Fr.*, tome XXV, 1897).

(Si les A_{ik} ne sont pas constants, chaque système de valeurs de x_1, x_2 ,..., x_m donnera un cône caractéristique différent. Nous considérerons en général un cône caractéristique comme ayant le point correspondant de l'espace à m dimensions comme sommet.)

Les caractéristiques ont une signification physique importante; elles sont, en fait, ce que les physiciens appellent des *ondes*. On peut voir facilement que leur définition donnée ci-dessus (et, plus exactement, leur intervention comme surfaces de contact entre deux solutions) est strictement équivalente à la conception d'Hugoniot sur les ondes (pour plus ample démonstration, voir nos *Leçons sur la propagation des ondes*). En fait, l'identité des deux conceptions apparaîtra, non seulement dans chaque cas spécial que nous traiterons, mais même, en général, comme une conséquence *a posteriori* de notre formule finale.

14. Le résultat de l'analyse de Cauchy et de Sophie Kowalewski serait, par conséquent, que le problème de Cauchy a une solution (et une seule) chaque fois que la surface qui porte les *données n'est pas caractéristique, ni tangente nulle part à une caractéristique* (1).

---

(1) Nous laisserons de côté le cas des *systèmes* d'équations aux dérivées partielles, mais, pour être complets, nous en dirons quelques mots ici. Le théorème fondamental s'étend, sous sa forme classique, à de tels systèmes lorsque le nombre d'équations est égal au nombre p des inconnues et qu'elles peuvent être résolues par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé relatives à une variable x : par exemple, pour les trois équations du second ordre F_1 $(r, r', r'', ...) = 0$, F_2 $(r, r', r'', ...) = 0$, F_3 $(r, r', r'', ...) = 0$ aux trois inconnues u, u', u'' (où nous avons mis en évidence les trois dérivées secondes

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; r' = \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \; r'' = \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2}\Bigg)$$

si elles peuvent être résolues en r, r', r''. Le cas exceptionnel est celui où une telle résolution (ou du moins une résolution régulière) est impossible, c'est-à-dire quand le Jacobien $\dfrac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(r, r', r'')}$ s'annule. Dans ce cas, $x = 0$ sera considéré comme une caractéristique. Nous déduirons aisément de ceci, par une transformation ponctuelle (§ 3) ou par un calcul

direct, la condition pour que G = o soit une caractéristique : ce qui donnera (V. nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. VII, § 321), dans le cas du système ci-dessus, une équation aux dérivées partielles du premier ordre et du sixième degré (du $2p^e$ degré, s'il y avait p équations du 2e ordre à p inconnues).

On a souvent cru que le cas exceptionnel pouvait toujours être évité par une transformation ponctuelle convenable. Cependant, ceci est une erreur : en d'autres termes, *il peut arriver que l'équation des caractéristiques ci-dessus définie soit une identité.* Des exemples variés de ce cas ont été donnés; un problème tout à fait classique et usuel en offre un, savoir le problème des *surfaces applicables* : il conduit à trois équations aux dérivées partielles du premier ordre en x, y, z, considérées comme fonctions de u, v, qui ne peuvent pas être résolues par rapport à $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, quel que soit le choix des variables indépendantes u, v.

Comment l'énoncé de Cauchy (en restant cependant dans l'hypothèse analytique) doit être modifié dans le cas le plus général (sans changement de variables) c'est ce qui a été éclairci, comme on le sait, par les travaux de Méray et Riquier, même quand le nombre des équations n'est pas égal au nombre des inconnues.

Mais l'influence de la transformation ponctuelle peut elle-même être déterminée, et, par conséquent, on peut établir une nouvelle équation des caractéristiques, même quand la condition ordinaire pour celles-ci fait défaut parce qu'elle devient une identité; c'est ce qui a été établi par nous-mêmes dans un cas (*Bull. Soc. Math. Fr.*, *vol.* XXXIV, 1906), et généralisé par MM. Gunther et Maurice Janet (Voir *C. R. Acad. Sc.*, 1913).

CHAPITRE II

DISCUSSION DU RÉSULTAT DE CAUCHY

---

15. On s'étonnera probablement de nous avoir vu employer systématiquement le conditionnel et sembler considérer comme douteuse une des démonstrations les plus classiques et les plus connues de l'Analyse. Le fait est que les choses ne sont pas aussi simples que ne sembleraient l'indiquer les considérations précédentes. En réalité, les circonstances que nous rencontrerons apparaîtront, au premier abord, comme tout à fait paradoxales au point de vue purement mathématique, et ne peuvent être prévues que pour des raisons physiques. Il n'y a pas de question offrant une illustration plus frappante des idées que Poincaré a développées au Premier Congrès International des Mathématiciens à Zurich, 1897 (V. aussi *La Valeur de la Science*, p. 137-155) : ce sont les applications physiques qui nous montrent les problèmes importants que nous avons à nous poser, et c'est encore la Physique qui nous fait entrevoir les solutions.

Les raisonnements de Cauchy, de S. Kowalewski et de Darboux, dont l'équivalent a été donné ci-dessus, sont parfaitement rigoureux; cependant, leur conclusion ne peut pas être considérée comme entièrement générale. La raison en est dans l'hypothèse, faite dans tout ce qui précède, que les données de Cauchy, ainsi que les coefficients des équations, sont exprimées par des fonctions *analytiques* : et le théorème peut souvent être en défaut quand cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Nous avons dit « souvent » et non pas « toujours », car il peut aussi arriver que l'énoncé de Cauchy-Kowalewski donné précédemment se trouve vérifié pour un choix tout à fait général de données; et, précisément, l'un des faits les plus curieux de cette théorie est que des équations, d'apparence très voisine, se conduisent d'une manière tout à fait opposée à ce point de vue.

Si d'abord nous prenons un problème de Cauchy tel que ceux dont nous avons parlé au § 4 [problème de Cauchy par rapport à $t=0$ pour les équations (e_1), (e_2), (e_3)], les résultats précédents *sont valables*, comme nous le verrons par la suite, *sans qu'il soit aucunement besoin d'une hypothèse d'analyticité.*

Mais les conclusions seront bien différentes si, par exemple, on traite le cas classique de *l'équation des potentiels* de Laplace :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Ceci se constatera tout de suite par comparaison avec un autre problème aux limites classique, je veux dire le *problème de Dirichlet*. Celui-ci consiste, comme on le sait, à déterminer une solution de l'équation de Laplace dans un volume donné $\mathcal{V}$, la valeur de u étant donnée en chaque point de la surface limite S de ce volume. C'est un fait bien connu que ce problème est correctement posé : c'est-à-dire qu'il a une solution, et une seule.

Ce fait apparaît immédiatement comme contradictoire avec le théorème de Cauchy-Kowalewski : si la connaissance des valeurs numériques de u aux différents points de S (en même temps que l'équation aux dérivées partielles) est par elle-même suffisante à déterminer la fonction inconnue dans le volume $\mathcal{V}$, on n'a évidemment aucun droit d'imposer à u une condition additionnelle quelconque, et, par conséquent, on ne peut pas, outre les valeurs de u, choisir arbitrairement celles de $\frac{du}{dn}$. En réalité, il existe entre ces deux sortes de valeurs une infinité de relations qui doivent être vérifiées pour qu'une fonction harmonique correspon-

dant à de telles données puisse exister. Un point quelconque *a extérieur* à $\mathcal{V}$ fournit une telle relation, puisque, si on appelle r la distance de a à un point arbitraire M de S, on doit avoir l'identité bien connue

$$\int\int_{S} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) = 0. \tag{8}$$

Comment se fait-il que, au contraire, les conclusions de Cauchy-Kowalewski conduisent à un choix arbitraire, en chaque point de S, non seulement de u, mais aussi d'une de ses dérivées premières, telles que la dérivée normale $\frac{du}{dn}$?

On peut donner de cette contradiction une double explication. On aperçoit immédiatement une première raison pour laquelle les conditions ne sont pas comparables de part et d'autre. On a primitivement démontré la possibilité du problème de Cauchy par rapport à un plan, puis par rapport à toute surface pouvant se déduire d'un plan par une transformation ponctuelle. Ceci est le cas de toute *portion* (régulière) de la surface, à condition qu'elle soit suffisamment petite, mais non pas de la surface fermée *totale*. La surface totale de la sphère, par exemple, ne peut pas être transformée, avec une continuité parfaite, en une surface plane : elle a une forme différente, au sens de l'Analysis situs.

Ceci, cependant, n'est pas une objection définitive, comme on peut le voir d'après la remarque du numéro **11** : si nous résolvons notre problème de Cauchy dans le voisinage de chaque portion de S, ces différents éléments de solution se continueront l'un l'autre, et constitueront une solution qui sera valable pour toute la surface S et son voisinage.

Mais, de plus, notre théorème ne prouve l'existence de la solution du problème de Cauchy que dans le *voisinage* de la surface initiale S. Pour le problème de Dirichlet, la solution doit exister dans l'étendue entière de $\mathcal{V}$. Ceci est la première explication demandée : pour cette raison, et pour elle seulement, les relations (8) sont nécessaires. Si elles ne

sont pas vérifiées par un ensemble analytique de valeurs de u et $\frac{du}{dn}$ ces valeurs correspondront à une certaine fonction harmonique u dans le voisinage de S; mais u admettra forcément des singularités, ou même cessera d'être défini, en quelque endroit de $\mathcal{V}$.

Cette première réponse à notre question n'est elle-même pas complète et ne donne pas la seule raison pour laquelle le problème de Cauchy n'est pas toujours possible. Si l'on prend maintenant les termes géométriques du problème exactement de la même manière que l'a fait Cauchy, on peut voir que, en n'adoptant plus l'hypothèse des données analytiques, il n'existera en général aucune solution, même dans le voisinage immédiat de S, ou même dans le voisinage d'une portion σ, quelque petite qu'elle soit, de S.

Ceci peut être considéré comme une conséquence de la propriété bien connue des fonctions harmoniques (c'est-à-dire des solutions de $\Delta u = o$) d'être analytiques dans chaque région à l'intérieur du domaine où elles existent et sont continues ainsi que leurs dérivées premières, et de ne perdre ce caractère d'analyticité que sur la limite du domaine : une forme de cette propriété étant [1] que, si deux fonctions harmoniques, définies chacune d'un côté d'une surface, ont, en chaque point de cette dernière, la même valeur et la même dérivée normale, elles sont le prolongement analytique l'une de l'autre, leur ensemble constituant une seule fonction harmonique (et par conséquent analytique) dans toute la région située des deux côtés de la surface.

Ceci montre que (σ étant, par exemple, supposée analytique) il est finalement impossible que le problème de Cauchy, avec des données non analytiques, ait une solution des deux côtés de σ; ces deux solutions u' et u'', d'après le théorème précédent, ne constitueraient qu'une seule fonction analytique dans le domaine total à l'intérieur duquel est σ : ce qui est évidemment contradictoire avec la supposition que u_0 (valeur commune de u' et u'') ou u_1 (dérivée normale commune) est non analytique sur σ.

---

(1) Ceci a été mis en évidence par Duhem (V. *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, Hermann, 1891, vol. I, p. 169).

Naturellement, il est évident que, *en général*, ni u' ni u'' n'existent : car il n'y a pas de raison pour que l'un existe plus que l'autre, si les données sont prises au hasard.

15 *bis*. On peut montrer tout à fait rigoureusement qu'il n'existe pas de solution, même d'*un* côté de σ, dans le cas où σ est une *portion* du plan $x = 0$, en faisant l'hypothèse complémentaire que u_0 (ou u_1) est nul : car, si, par exemple, u' existait pour $x \geqslant 0$, on pourrait définir u'', pour $x \leqslant 0$, par

$$u(-x, y, z) = -u(x, y, z), \tag{9}$$

u' et u'' ayant alors, pour $x = 0$, la même valeur (savoir o) et la même dérivée normale. Le cas est alors le même que précédemment : par conséquent la solution ne peut *jamais* exister si u_1 (y, z) n'est pas analytique.

(De même, si u_1 est nul, avec une valeur quelconque de u_0, une solution éventuelle u' pour $x \geqslant 0$ pourrait s'étendre à $x \leqslant 0$ par la relation $u(-x, y, z) = u(x, y, z)$ et ceci conduirait à la même impossibilité que ci-dessus si u_0 n'était pas analytique.)

Si u_0 (y, z) avait été pris différent de zéro, la connaissance de sa valeur déterminerait évidemment u à une fonction analytique près [1] de x, y, z, et, par conséquent, u_1 (y, z) à une fonction analytique près de y, z.

16. L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

quoique nous n'ayons pas à nous en occuper dans cet ouvrage, est cependant intéressante à étudier au même point de vue, ce qui a été fait par M. Holmgren [2]. Prenons encore

(1) Un de ces choix possibles pour u est le potentiel, multiplié par $\frac{1}{2\pi}$, d'une double couche de densité u_0 sur notre plan, la valeur correspondante de u_1 étant la dérivée normale de ce potentiel. La combinaison de ceci avec l'énoncé du texte donne la forme la plus générale acceptable pour u_1 pour une forme donnée de u_0.

(2) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (1904), p. 324, note; Voir aussi *ibid.*, vol. II (1905-1906).

une fois le problème de Cauchy par rapport à $x=0$, la première fonction $u_0(y)$ étant de nouveau prise nulle. Comme précédemment, admettons que notre solution est définie d'un seul côté de $x=0$, par exemple pour $x \geqslant 0$, et étendons-la à $x \leqslant 0$ par la formule (9) : par ce moyen, u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ restent continus pour $x=0$.

Or, une solution de l'équation de la chaleur, lorsqu'elle est continue et a ses dérivées du premier ordre continues, n'est pas nécessairement analytique en ses deux variables, comme c'est le cas pour l'équation du potentiel; seulement on peut prouver (1) qu'elle est analytique par rapport à x. Comme d'un autre côté (V. numéro précédent), c'est une fonction impaire pour $u_0=0$, on peut la développer en une série convergente de la forme

$$(10) \qquad u = u_1 x + \frac{u_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{u_{2p+1}}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \cdots$$

Le premier coefficient u_1 est égal à la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$, pour $x = 0$. Mais l'équation différentielle donne :

$$u_{2p+1} = \left(\frac{\partial^{2p+1}u}{\partial x^{2p+1}}\right)_{x=0} = \frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{d^p u_1}{dy^p}.$$

On voit, par conséquent, que u_1 admet des dérivées de tous les ordres; ensuite, que l'on a une limitation de leur ordre de grandeur : car, d'après la convergence de la série (10), on a (M, ρ étant deux nombres positifs fixes)

$$(11) \qquad \left|\frac{d^p u_1}{dy^p}\right| = |u_{2p+1}| < \frac{M(2p+1)!}{\rho^{2p+1}}.$$

L'analyticité de u exigerait des inégalités telles que

$$(12) \qquad \left|\frac{d^p u_1}{dy^p}\right| < \frac{Mp!}{\rho^p},$$

de telle sorte que le système des conditions (11) est moins restrictif que les conditions d'analyticité.

---

(1) M. Serge Bernstein (*Thèse*, Paris 1904) a démontré le même fait pour l'équation parabolique analytique la plus générale. Des démonstrations très simples ont été données depuis par M. Gevrey (*C. R. Ac. Sc.*, tome CLII et *Thèse*, Paris).

17. Nous voyons que nos considérations présentes sur le sujet des équations aux dérivées partielles nous mènent à des résultats dignes d'intérêt dans la théorie des fonctions d'une variable réelle. De telles fonctions ont été classées, comme on le sait, d'après leur degré de régularité : les efforts des géomètres contemporains ont réussi à faire ressortir bien des intermédiaires importants et intéressants entre la conception de fonction arbitraire et celle de fonction continue; plus restrictive que cette dernière se trouve la notion de fonction à variation limitée, puis les fonctions dérivables une, deux, ..., p fois. Viennent ensuite les fonctions dérivables jusqu'à un ordre quelconque.

Ici, les fonctions u_1 satisfaisant à l'inégalité (11) montrent l'utilité d'une distinction nouvelle (1) : il y a des intermédiaires entre les fonctions dérivables à n'importe quel ordre et les fonctions analytiques. MM. Goursat et Gevrey (2) ont appelé les fonctions u_1 *fonctions de la classe* 2. De même, des fonctions de la classe α — c'est-à-dire des fonctions $\Phi(y)$ dérivables à un ordre quelconque et telles que

$$\left|\frac{d^p\Phi}{dy^p}\right| < \frac{\mathrm{M}\,(\alpha p)!}{\rho^{\alpha p}} \qquad (\alpha > 1) \tag{11'}$$

— apparaîtront (3) si l'on considère du même point de vue les équations

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \qquad (m > n)$$

traitées par M. Henrik Block (4) : α sera alors égal à $\frac{m}{n}$.

---

(1) Voir la note plus loin, p. 37.

(2) Voir note, p. 32.

(3) Il est remarquable que la classe définie, *parmi les fonctions analytiques* par les inégalités (11′) avec $\alpha < 1$, ait déjà été considérée en Analyse : c'est en fait la classe des fonctions entières de genre fini.

Le mot « classe » a déjà été employé par Baire dans ses travaux sur les fonctions discontinues, dans un sens tout à fait différent, mais, comme l'a fait observer M. Gevrey, la confusion est impossible pour cette raison même.

(4) Henrik Block, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, vol. VII (1911).

Qu'il existe en fait des fonctions qui satisfont au système de conditions (11′) sans être analytiques — ou, plus généralement, qui satisfont à ce système pour une certaine valeur de α, mais non pour des valeurs inférieures —, c'est ce qu'on peut voir facilement par l'exemple de la série trigonométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos ny, \tag{13}$$

où les c_n seront, par exemple, des nombres positifs et réels. Une telle série admettra des dérivées de tous les ordres si la série

$$\sum c_n\, n^p, \tag{14}$$

est convergente pour toutes les valeurs de p. Prenons, en particulier, $c_n = e^{-n^{\frac{1}{\alpha}}}$, α étant un nombre donné plus grand que 1 : cette expression satisfait à la condition précédente; mais la série (14), savoir

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p\, e^{-n^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{14'}$$

qui, pour p pair, représente la valeur de la p^e dérivée pour $y=0$ (et qui est aussi la valeur maximum de sa dérivée), est, comme on sait, du même ordre de grandeur que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} n^p\, e^{-n^{\frac{1}{\alpha}}}\, dn = \alpha\Gamma[(p+1)\alpha], \tag{14''}$$

ce qui montre que la série correspondante (13) appartient à la classe α et non — du moins dans un intervalle quelconque contenant $y=0$ — à une classe quelconque de rang inférieur.

Si, dans (13), nous avions seulement donné à u les valeurs $n = b^\nu$, où b est un entier déterminé et $\nu = 1, 2, \ldots, \infty$, cela

n'aurait pas essentiellement changé l'ordre de (14'), l'intégrale (14'') étant remplacée par

$$\int_0^\infty b^{p\nu} e^{-b^{\frac{\nu}{\alpha}}}\, d\nu = \frac{\alpha}{\log b}\, \Gamma(p\alpha)\,;$$

mais pour cette nouvelle série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-b^{\frac{\nu}{\alpha}}} \cos(b^\nu y),$$

nous pourrions affirmer qu'elle ne peut être d'une classe inférieure à α, non seulement autour de $y = 0$, mais aussi dans un intervalle quelconque : car une telle série ne change que dans ses premiers termes lorsqu'on remplace y par $y + \frac{2l\pi}{b^k}$ (quels que soient les entiers k et l) et les nombres $\frac{2l\pi}{b^k}$ peuvent s'approcher aussi près que l'on veut d'une quantité réelle donnée quelconque.

M. Gevrey [1] (*loc. cit.*) a montré que les fonctions d'une classe $\alpha > 1$ demeurent telles par les mêmes opérations générales que les fonctions analytiques, par exemple par la multiplication, la substitution d'une ou de plusieurs fonctions dans une autre, l'intégration des équations différentielles, etc. Mais de telles fonctions diffèrent des fonctions analytiques, et aussi des généralisations bien connues que leur a données M. Borel [2], par l'absence d'une de leurs propriétés classiques : l'extension d'une fonction de classe α d'une partie de son domaine à une partie avoisinante *n'est pas déterminée.* Une telle fonction, supposée donnée dans (o, 1), peut être étendue à (1, 2), par exemple, d'un nombre infini de manières, sans perdre la propriété d'appartenir à la classe α.

---

(1) Voir aussi ses Mémoires dans le vol. XXXV, série 3, des *Ann. Ec. Norm. Sup*^{re}.

(2) Voir *Comptes Rendus Ac. Sc.*, vol. CLIV; *Acta Math.*, t. XXIV.

Ceci se voit facilement, tout au moins pour $\alpha = 2$, par l'introduction de la fonction $e^{-\frac{1}{x}}$. Cette fonction, holomorphe dans tout intervalle (a, b) avec $a > 0$, $b > 0$, ne l'est plus dans $(0, b)$, mais appartient (au plus) à la classe 2, comme on peut le voir par le calcul direct suivant (1). Pour calculer $\Phi^{(p)}(a)$ (avec $a > 0$), prenons l'intégrale

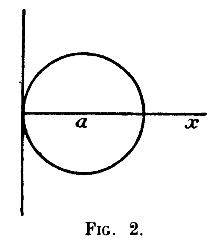


FIG. 2.

$$\frac{p!}{2i\pi}\int\frac{\Phi(z)}{(z-a)^{p+1}}dz$$

le long d'une circonférence de rayon a dans le plan complexe. Pour $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, nous pouvons prendre cette circonférence tangente à l'axe imaginaire (fig. 2), et la valeur absolue de $\Phi(x)$ sur cette circonférence sera alors constante et égale à $e^{-\frac{1}{2a}}$, de telle sorte que

$$\frac{1}{p!}\left|\Phi^{(p)}(a)\right| = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p}{dx^p}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)_{x=a}\right| \leqslant \frac{1}{a^p}e^{-\frac{1}{2a}}$$

Le maximum de cette dernière quantité correspond à $a = \frac{1}{2p}$ et l'on a

$$|\Phi^{(p)}(a)| < e^{-p}(2p)^p p! = (\text{sensiblement})\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2^p}\,(2p)\,!.$$

Comme toutes les dérivées de $\Phi(x)$ sont nulles (du côté positif) pour $x = 0$, ceci nous montre qu'une fonction qui est nulle pour toute valeur négative de x peut être étendue à $x > 0$ par $e^{-\frac{1}{x}}$ et être de la classe 2.

On peut déduire de cet exemple un autre plus général en prenant l'intégrale

$$\psi(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{x-z}}\chi(z)\,dz \qquad (x > 0),$$

(1) La fonction très analogue $\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\frac{1}{x}}$, à laquelle on est amené par la théorie de la chaleur, peut aussi être introduite dans le même but.

où χ est une fonction arbitraire, — disons continue —. Toute dérivée de ψ peut être prise en différentiant sous le signe $\int$ (il n'y a pas de termes correspondant à la variabilité de la limite supérieure, où la quantité sous le signe $\int$ est nulle) de telle sorte que ψ appartient aussi à une classe au plus égale à 2; et on voit facilement qu'on peut l'étendre d'une infinité de manières au delà de toute valeur $x = a$ de la variable, car cette extension dépend de la fonction arbitraire χ.

M. Serge Bernstein (1) a étendu cette conclusion aux fonctions de toute classe $\alpha > 1$, une telle condition étant encore compatible avec une infinité de prolongements d'une même fonction donnée.

La question (2) s'est alors posée de savoir s'il peut exister des fonctions $F(p)$ croissant plus rapidement que $R^{-p}p!$, et, cependant, telles que la limitation $|\Phi^{(p)}(x)| < F(p)$ pour les valeurs des dérivées successives d'une fonction Φ implique le fait que Φ ne peut pas être étendue de plus d'une manière. M. S. Bernstein est conduit à une réponse négative pour l'exemple des fonctions de classe supérieure à 1; mais il montre d'ailleurs qu'une telle réponse négative ne subsisterait pas si l'inégalité $F(p) > R^{-p}p!$ était vérifiée *irrégulièrement*, c'est-à-dire s'il y avait un nombre infini de valeurs de p donnant cette inégalité et un nombre infini donnant l'inégalité inverse.

18. Reprenant le problème de Cauchy en général, on voit qu'on doit éviter la confusion entre le cas des fonctions

---

(1) *Math. Ann.*, vol. LXXV, p. 440 et suiv.

(2) Ceci a été écrit en avril 1921. Depuis, le problème a été résolu par les belles recherches de MM. Denjoy et Carleman (V. *C. R. Ac. Sc.*, t. 173-174, 1921-1922. Elles ont donné la théorie des fonctions *quasi analytiques*. Voir surtout l'ouvrage de M. Carleman : *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926 : l'extension est toujours unique quand $F(p)$ est telle que la série

$$\sum \frac{1}{\sqrt[p]{F(p)}}$$

soit divergente. (Ajouté lors de la correction des épreuves.)

arbitraires et celui des fonctions analytiques, et que nos conclusions précédentes doivent être révisées à ce point de vue. Ceci s'applique aussi à la fonction inconnue; notre premier résultat, savoir que la solution, si elle existe, est unique, sauf le cas d'une caractéristique, doit être examiné à nouveau : nous avons seulement fourni la démonstration que le problème n'admet qu'une seule solution *holomorphe*.

Sur ce point, cependant, le résultat subsiste : M. Holmgren (1) a démontré, au moins pour les équations linéaires à coefficients analytiques, que (toujours excluant le cas exceptionnel), la solution, analytique ou non, est unique (2).

Comme on vient de le voir, les choses sont beaucoup plus compliquées en ce qui regarde la seconde partie du résultat,

---

(1) *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akad. Förh.* (9 janv. 1901), p. 91-105 Voir également nos *Leçons sur la propagation des ondes*, note I. La démonstration repose sur le théorème bien connu de Weierstrass sur les approximations des fonctions continues par polynômes. Il serait intéressant de l'étendre aux équations à coefficients non analytiques, et, au cas non linéaire.

Note de la Traduction. — Cette question est aujourd'hui résolue, par les récents travaux de M. Hans Lewy, pour le cas hyperbolique, et, en ce qui concerne le cas elliptique, pour les équations analytiques (voir Appendice III à la fin du volume). Un Mémoire de MM. Hans Lewy et Kurt Friedrichs traite même le cas d'équations (totalement hyperboliques, c'est-à-dire à caractéristiques toutes réelles) d'ordre quelconque.

(2) Quand on énonce de tels résultats, il est important, ainsi que Bôcher l'a fait remarquer très justement (au cours de ses conférences à l'Université de Paris en 1913-1914), de bien préciser ce qu'on entend par une solution. Ici, u doit admettre des dérivées premières et secondes satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles dans le voisinage de $x = 0$, mais pas nécessairement sur $x = 0$ lui-même. Au contraire, les conditions que u et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ aient des valeurs données en des points de $x = 0$ impliquent que ces quantités existent et soient continues autour de ces points. Plus exactement, il faudra que u et ses diverses dérivées premières soient continues : ceci est nécessaire pour la validité de la démonstration de M. Holmgren, lequel (remplaçant l'équation par un système d'équations du premier ordre) introduit toutes ces dérivées premières comme inconnues auxiliaires, comme cela est fait classiquement dans la démonstration primitive de Sophie Kowalewski pour le théorème fondamental. (V. p. ex. Goursat, *Cours d'Analyse*, 3e éd., t. II, p. 642) et applique (comme nous le ferons aussi dans la suite de ce livre) la transformation d'intégrales habituelle d'Ostrogradsky et Green, laquelle suppose la continuité des fonctions introduites.

c'est-à-dire l'existence d'une solution; au premier abord, on ne voit pas, à cet égard, de règle analytique générale. L'analogie avec les équations différentielles ordinaires, qui a évidemment inspiré Cauchy, s'est montrée finalement trompeuse (1); de même l'exemple de l'équation du son et celui de l'équation des potentiels montrent combien peu on peut se fier aux analogies les plus proches et en apparence les plus évidentes, entre équations aux dérivées partielles.

Mais il est remarquable, d'autre part, qu'on trouve un guide sûr dans l'interprétation physique : un problème analytique est toujours correctement posé (au sens précédemment indiqué), quand il est la traduction d'une question mécanique ou physique; et nous avons vu que ceci est le cas du problème de Cauchy dans les exemples notés en premier lieu.

Au contraire, aucun des problèmes physiques en rapport avec $\Delta u = 0$ ne se formule analytiquement sous la forme de Cauchy (2). Chacun d'eux conduit à des énoncés tels que celui de Dirichlet, c'est-à-dire avec une seule donnée numérique en chaque point de la frontière. C'est aussi le cas de l'équation de la chaleur. Tout ceci est d'accord avec le fait que les données de Cauchy, si elles ne sont pas analytiques, ne sont pas de nature à déterminer une solution d'une quelconque de ces deux équations.

---

(1) Cette analogie serait légitime si la deuxième espèce de méthodes mentionnées au § 10 (approximations successives) avait pu être étendue au cas des équations aux dérivées partielles. Ceci contredirait nos énoncés précédents et est, par conséquent, impossible, au moins dans le cas général (quelques essais ont été tentés dans ce sens, mais, naturellement, sans succès). Au contraire, des méthodes de cette espèce ont pu être appliquées à des cas convenables, en tenant compte de la nature de l'équation et des autres particularités du problème (particulièrement des caractéristiques), par M. Picard et ses successeurs.

(2) On peut être tenté d'assimiler les résultats ci-dessus concernant $\Delta u = 0$ à ceux que nous avons trouvés plus haut dans le cas où la variété qui porte les données est une caractéristique. Il y aurait là une erreur; car, dans ce dernier cas, le problème, quand il n'est pas impossible, devient indéterminé, ce qui ne peut jamais arriver pour $\Delta u = 0$, d'après le théorème de Holmgren. Le problème de Cauchy pour $\Delta u = 0$, dans le cas général, peut se comparer à un problème d'algèbre où on donne *plus de conditions* qu'il n'y a d'inconnues.

Cette concordance remarquable entre les deux points de vue est notre principale raison pour considérer l'attitude que nous avons prise dans ce qui précède (et qui consiste à renoncer systématiquement à l'hypothèse de l'analyticité des données) comme mieux d'accord avec la vraie nature des choses que la conception primitive de Cauchy et de ses successeurs.

Nous avons souvent soutenu, contre plusieurs géomètres, l'importance de cette distinction. Quelques-uns d'entre eux arguaient du fait que l'on peut toujours considérer des fonctions quelconques comme analytiques, attendu que, dans le cas contraire, elles peuvent être approchées avec autant de précision que l'on veut à l'aide de fonctions analytiques. Mais, à notre avis, cet argument ne porte pas, la question n'étant pas de savoir si une telle approximation altérera très peu les données, mais si elle altérera très peu la solution. Il est facile de voir que, dans le cas qui nous occupe, les deux questions ne sont en aucune façon équivalentes. Prenons l'équation classique des potentiels pour deux dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

avec les données de Cauchy (1) suivantes :

$$(15) \qquad \begin{cases} u(0, y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u_1(y) = A_n \sin(ny), \end{cases}$$

n étant un nombre très grand, mais A_n étant une fonction de n assujettie à être très petite quand n devient très grand $\left(\text{par exemple } A_n = \dfrac{1}{n^p} \text{ etc.}\right)$. Ces données diffèrent aussi

(1) Nous avons donné pour la première fois cet exemple au Congrès de la Société mathématique suisse, à Zurich (1917).

peu que l'on veut de zéro. Cependant un tel problème de Cauchy a pour solution

$$u = \frac{A_n}{n} \sin (ny) \operatorname{Sh} (nx),$$

laquelle, si

$$A_n = \frac{1}{n}, \text{ ou } \frac{1}{n^p}, \text{ ou } e^{-\sqrt{n}},$$

est très grande pour toute valeur déterminée de x différente de zéro, à cause du mode de croissance de e^{nx} et par conséquent de Sh (nx).

Dans ce cas, la présence du facteur sin ny se traduit par un « tuyautage » de la surface, et nous voyons que ce tuyautage, quoique imperceptible dans le voisinage immédiat de l'axe des y, devient énorme à une distance donnée, si petite qu'elle soit, de cet axe, à condition qu'on le suppose suffisamment fin en prenant n suffisamment grand.

19. ***Continuité par rapport aux fonctions données.*** — Comparons cet exemple avec la solution du problème de Cauchy pour l'équation (e_1) (équation des cordes vibrantes).

L'intégrale générale de cette dernière étant

$$(16) \qquad u(x, t) = \Phi(x + \omega t) + \Psi(x - \omega t),$$

les données de Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$$

donnent facilement, comme on sait,

$$(16') \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{2}\left[u_0(\xi) + \frac{1}{\omega}\int u_1(\xi)d\xi\right], \\ \Psi(\xi) &= \frac{1}{2}\left[u_0(\xi) - \frac{1}{\omega}\int u_1(\xi)d\xi\right], \end{aligned} \right.$$

la constante d'intégration étant sans influence, à condition qu'elle soit la même dans les deux formules : ce qui, substitué dans (16), donne la solution du problème. Maintenant, supposons que, le long d'un certain intervalle d'amplitude A, les fonctions u_1, u_0 soient modifiées, mais partout

très légèrement : c'est-à-dire remplaçons-les par $u_1 + \delta u_1$. $u_0 + \delta u_0$, les quantités $|\delta u_0|$, $|\delta u_1|$ étant, quelle que soit la valeur de x, inférieures à une constante très petite ε. D'après (16'), on voit que l'altération correspondante sur Φ et Ψ sera toujours inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{A}{\omega}\right)$ et sur u, plus petite que $\varepsilon\left(1+\frac{A}{\omega}\right)$ c'est-à-dire arbitrairement petite avec ε.

Nous dirons que les valeurs de u *dépendent continument* de celles de u_0, u_1 : c'est une locution suggérée par une analogie évidente avec la continuité ordinaire.

Au contraire, l'exemple du numéro précédent montre que la solution du problème de Cauchy pour l'équation des potentiels *ne dépend pas* continument des données.

20. *Divers ordres de voisinage et de continuité.* — La définition ci-dessus demande, cependant, à être précisée par des considérations aujourd'hui classiques en Calcul des Variations [1] et dans sa récente généralisation, le Calcul Fonctionnel.

Les inégalités $|\delta u_0| < \varepsilon$, $|\delta u_1| < \varepsilon$ sont, dans certains problèmes, suffisantes pour que $u_0 + \delta u_0$, $u_1 + \delta u_1$ soient considérés comme très voisins de u_0 et de u_1; mais tel n'est pas le cas pour d'autres applications. Par exemple, $y = g(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, pour n très grand, représente une courbe dont chaque point est très proche d'un point correspondant de l'axe des x. Cependant, on ne peut pas remplacer approximativement cette courbe par $y = 0$, si, par exemple, on s'occupe de la longueur : sa longueur, entre $x = 0$ et $x = \pi$, ne tend pas [2] vers π pour $n = \infty$.

Ceci est dû au fait que, dans cet exemple, $g(x)$ tend (uniformément par rapport à x) vers zéro avec $\frac{1}{n}$, *mais non pas* $g'(x) = \cos(nx)$. Une telle fonction est dite avoir avec zéro un *voisinage de l'ordre zéro*.

---

(1) Zermelo (*Untersuchungen zur Variationsrechnung : Diss.*, Berlin, Mayer et Müller, 1894).

(2) Elle reste constante si n n'admet que des valeurs entières.

La fonction $\frac{g(x)}{n} = \frac{1}{n^2}$ sin nx a un *voisinage de l'ordre un* avec zéro, pour n très grand, c'est-à-dire que $\left|\frac{g(x)}{n}\right|$ et $\left|\frac{g'(x)}{n}\right|$ sont très petits; mais il n'en est pas de même pour $\frac{g''(x)}{n} = -$ sin nx.

Plus généralement, $g(x)$ et $h(x)$ sont dits avoir, dans l'intervalle (a, b), un voisinage de l'ordre p si les $p+1$ différences $|g(x) - h(x)|$, $|g'(x) - h'(x)|$ ...., $\left|\frac{d^pg}{dx^p} - \frac{d^ph}{dx^p}\right|$ sont très petites, par exemple inférieures à ε, tout le long de (a, b), le voisinage étant d'autant plus proche que ε est plus petit.

Si les fonctions considérées et leurs dérivées jusqu'à l'ordre p sont continues — ce qui sera toujours le cas dans les applications — on peut dire aussi que deux fonctions g, h ont entre elles un vóisinage de l'ordre p si on peut établir entre x' et x'' une correspondance telle que $|x'' - x'| < \varepsilon$ et que ceci soit vrai pour toutes les différences

$$(\delta) \quad \left|g(x') - h(x'')\right|, \ \left|g'(x') - h'(x'')\right|, \ \ldots., \ \left|\frac{d^pg(x')}{dx'^p} - \frac{d^ph(x'')}{dx''^p}\right|.$$

Cette condition est équivalente à la précédente (ε étant simplement remplacé par une autre quantité qui devient infinitésimale avec la première) à cause du fait que $|x'' - x'| < \varepsilon$ implique

$$\left|h(x') - h(x'')\right| < \eta, \qquad \left|\frac{d^qh(x')}{dx'^q} - \frac{d^qh(x'')}{dx''^q}\right| < \eta$$

(pour tous les q entre 1 et p), η étant infiniment petit en même temps que ε.

Géométriquement, deux courbes planes seront dites avoir l'une avec l'autre un voisinage d'ordre p si on peut trouver entre elles une correspondance ponctuelle telle que la distance entre les points correspondants soit très petite, ainsi que les différences (δ) (ceci veut dire, par exemple — pour $q = 1$, — que l'angle des tangentes correspondantes

sera très faible). Dans ce cas, il s'ensuit de la remarque précédente que le choix de la correspondance est tout à fait arbitraire et indifférent : en particulier, s'il n'y a pas de tangente parallèle à $x = 0$, on peut prendre comme points correspondants ceux qui ont la même abscisse et, de toute façon, deux points tels que le segment qui les joint coupe les deux courbes sous un angle fini.

Tout ceci est évidemment très semblable à la théorie classique du contact; et, en fait, *cette dernière est un cas particulier de nos considérations présentes :* on peut la résumer en disant que deux courbes ont un contact d'ordre p en un point commun A si leurs arcs issus de A ont un voisinage d'ordre p arbitrairement étroit quand les arcs sont suffisamment petits. Ceci s'applique naturellement de même à des fonctions ayant entre elles un contact d'ordre p pour une valeur déterminée de la variable.

L'extension de tout ceci aux fonctions de plusieurs variables est évidente, et nous n'avons pas même besoin de la formuler. Par exemple, quand deux surfaces ont un contact d'ordre p au point A, les parties qui entourent A ont un voisinage d'ordre p qui peut être pris aussi proche qu'on le désire si les portions de surfaces sont prises suffisamment petites.

Si $G(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m) = 0$ est l'équation d'une surface, étant admis que G a des dérivées continues jusqu'à l'ordre p et que les dérivées premières de G ne s'annulent jamais toutes ensemble, l'équation d'une seconde surface qui a avec la première un voisinage d'ordre p sera $G + \delta G = 0$, δG étant très petit ainsi que ses dérivées des p premiers ordres.

20 *bis*. La notion des divers ordres de voisinage entraîne la définition des divers *ordres de continuité*. Une quantité u étant assujettie à dépendre des valeurs de $g(x)$ dans (a, b), cette dépendance sera *continue d'ordre* p si u est très peu altéré chaque fois qu'on remplace $g(x)$ par une autre fonction $h(x)$ ayant avec elle [dans (a, b)] un voisinage (suffisamment étroit) d'ordre p. Ainsi, la solution du problème de

Cauchy pour l'équation des cordes vibrantes, telle qu'elle a été fournie ci-dessus, est continue *d'ordre zéro* en u_0, u_1. La longueur d'un arc de courbe $(= \int \sqrt{1 + y'^2} dx)$ n'est pas continue d'ordre zéro, mais elle est continue d'ordre 1.

Il est à remarquer qu'un voisinage d'ordre p signifie plus qu'un voisinage d'ordre zéro, et que, par conséquent, une continuité d'ordre p signifie moins qu'une continuité d'ordre zéro.

La solution du problème de Cauchy pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*n°* **18**) *n'est pas continue, de quelque ordre que ce soit*, en u_0, u_1. Car $A_n \sin ny$ a, avec zéro, si $A_n = \frac{1}{n^p}$, un voisinage d'ordre $p - 1$, c'est-à-dire arbitrairement grand; et même, pour $A_n = e^{-\sqrt{n}}$, le voisinage est d'un ordre infini, c'est-à-dire que chaque dérivée de cette quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; néanmoins, la valeur correspondante de u ne tend pas vers zéro.

La solution du problème ne peut pas s'exprimer par des formules analogues à (16) ou (16'), car nous venons de voir que de telles expressions impliquent une continuité d'ordre zéro.

Dans les chapitres suivants, nous rencontrerons d'autres formules plus ou moins semblables à (16'), sauf que leurs seconds membres peuvent contenir (sous le signe $\int$ ou non) des dérivées de u_0 et u_1 jusqu'à un certain ordre. Aucune formule de cette espèce ne peut, par quelque moyen que ce soit, représenter une solution du problème de Cauchy tel que nous l'avons considéré au numéro **18** pour l'équation des potentiels, car elle impliquerait une continuité d'ordre p.

21. Une autre conséquence paradoxale apparaîtra encore si on considère les choses au point de vue concret.

Strictement, mathématiquement parlant, nous avons vu (c'est le théorème de M. Holmgren) qu'un ensemble de données de Cauchy u_0, u_1 correspond (au plus) à une solution

u de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, de telle sorte que, si ces quantités u_0 et u_1 sont « connues », u sera déterminé sans aucune ambiguïté possible.

Mais, dans toutes les applications concrètes, naturellement, « connu » signifie « connu avec une certaine approximation », toute sorte d'erreurs étant possibles, à condition que leur grandeur reste inférieure à une certaine limite; et on a vu, d'un autre côté, que le simple remplacement de la valeur zéro pour u_1 par la valeur (arbitrairement petite) (15) change la solution, non de très petites, mais de très grandes quantités. Tout se passe, physiquement, comme si la connaissance des données de Cauchy ne déterminait *pas* la fonction inconnue.

Ceci nous montre combien les choses se comportent différemment dans ce cas et dans ceux qui correspondent à des questions physiques. Si un problème physique se trouvait dépendre d'un problème analytique tel que le problème de Cauchy pour $\Delta u = 0$, il nous apparaîtrait comme régi par le pur hasard (que l'on sait, depuis Poincaré, consister en une discontinuité de cette nature dans le déterminisme) et non comme obéissant à une loi quelconque.

Ayant été conduit par l'interprétation physique à la nécessité des distinctions ci-dessus, nous devons maintenant essayer de les formuler analytiquement. Ceci dépend de la classification des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre en différents types.

22. ***Les trois types d'équations linéaires aux dérivées partielles.*** — Ces types se distinguent par la nature algébrique de la forme caractéristique **A** $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$.

Si cette forme contient m carrés distincts, tous du même signe (en d'autres termes, si c'est une *forme définie*), l'équation est dite appartenir au type **elliptique** : les caractéristiques sont imaginaires.

Si elle contient moins de m carrés distincts (forme *semi-définie*, lorsque les carrés sont du même signe, comme dans le cas de toutes les applications connues), l'équation appartient au type **parabolique.**

Si la forme caractéristique contient m carrés distincts, non du même signe (forme *indéfinie*), de sorte qu'il y a des caractéristiques réelles, on a le type **hyperbolique.**

De plus, il y a une distinction à faire, dans ce dernier type, quand le nombre m est supérieur à 3, car les signes peuvent être distribués de façons différentes entre les m carrés. Le seul cas qui se présente dans les applications physiques est celui où tous les carrés, sauf un, ont le même signe : nous l'appellerons le *type hyperbolique normal*. Chacune des équations notées ci-dessus (e_1), (e_2), (e_3) appartient au type hyperbolique normal.

Géométriquement, comme l'a fait remarquer M. Coulon [1], le type hyperbolique normal se distingue des autres par les caractères suivants. Supposons la forme caractéristique réduite (par une transformation linéaire convenable) à une somme algébrique de carrés, de telle sorte que

$$\mathbf{A}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) = A_m\gamma^2_m - A_1\gamma_1^2 - A_2\gamma_2^2 - \dots - A_{m-1}\gamma^2_{m-1}.$$

$\mathbf{A} = 0$ étant l'équation tangentielle du cône caractéristique, l'équation ponctuelle correspondante sera d'une forme toute semblable

$$(17)\qquad \mathbf{H}(X_1, X_2, \dots, X_m) = \frac{X^2_m}{A_m} - \frac{X_1^2}{A_1} - \dots - \frac{X^2_{m-1}}{A_{m-1}} = 0.$$

Un tel cône se compose de deux nappes et divise l'espace à m dimensions en *trois* régions, l'intérieur du cône (c'est-à-dire $\mathbf{H} > 0$) consistant en deux parties séparées ($X_m > 0$ et $X_m < 0$) entre lesquelles il n'y a pas de passage réel possible autrement que par l'extérieur du cône ou par le sommet lui-même, car $X_m = 0$ est incompatible avec $\mathbf{H} > 0$.

Au contraire, un cône tel que

$$(17')\qquad \frac{X_1^2}{A_1} + \frac{X_2^2}{A_2} + \dots - \frac{X^2_{m-1}}{A_{m-1}} - \frac{X^2_m}{A_m} = 0$$

(le premier membre contenant au moins deux carrés positifs et deux carrés négatifs) consiste en une seule nappe et

---

(1) *Thèse* (1902), p. 30.

divise l'espace à m dimensions en deux régions seulement. Pour $m = 4$, ceci peut s'interpréter dans l'espace ordinaire en considérant les X comme des coordonnées homogènes et $X_m = X_4 = 0$ comme le plan de l'infini : une équation telle que (17) représentera alors un hyperboloïde à deux nappes et l'équation (17') un hyperboloïde à une nappe.

Le type hyperbolique normal est le seul type connu pour lequel le problème de Cauchy soit correctement posé. Il y a plus : les types hyperboliques non normaux (qui ne se rencontrent pas dans les applications physiques) ne mènent à aucun problème, de quelque espèce que ce soit, dont on sache qu'il remplit cette condition [1].

Les équations elliptiques ne conduisent jamais à des problèmes de Cauchy correctement posés. Car (Voir Livre II) les solutions d'une telle équation (si ses coefficients sont pris analytiques) possèdent, comme celles de $\Delta u = 0$, les propriétés d'analyticité mentionnées et employées au paragraphe **15**, dans leur domaine d'existence; et, par conséquent, on peut reprendre à leur égard les raisonnements utilisés dans ce paragraphe.

Les données (portées sur une surface analytique S) n'étant pas analytiques, si le problème de Cauchy a une solution, elle ne peut exister que d'un côté de la surface initiale S (au delà de laquelle la fonction ainsi définie ne peut pas être étendue).

23. Mais, même pour les équations hyperboliques normales, les applications physiques ne mènent pas toujours au problème de Cauchy. Ce dernier ne se présente que

---

(1) M. Hamel (*Diss.*, *Göttingue*, 1901), qui a été conduit à l'équation non normale $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}$ par des considérations géométriques empruntées au Calcul des Variations, a déterminé une inconnue u par cette équation et des conditions aux limites, mais a dû assujettir ces dernières à être analytiques (non en toutes les variables, cependant) : M. Coulon (*Thèse*), traitant le problème de Cauchy, considère aussi le cas des équations non normales; mais il ressort alors de ses calculs mêmes qu'une infinité de conditions de possibilité sont nécessaires.

lorsqu'on s'occupe de mouvements dans les milieux entièrement *indéfinis*. Les choses changeraient si on considérait une limitation quelconque de ceux-ci, comme ce serait le cas pour le problème classique des cordes vibrantes, qui s'exprime analytiquement par l'intégration de l'équation (e_1) avec les conditions

$$(18) \qquad u(x, o) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, o) = u_1(x)$$

et

$$(18') \qquad u(o, t) = o, \qquad u(l, t) = o,$$

l étant la longueur de la corde et $x = o$ une de ses extrémités. Le mouvement se calcule pour $t \geqslant o$, $o \leqslant x \leqslant l$: c'est-à-dire, graphiquement, dans la partie R du plan des xt, qui est hachuré sur la figure 3. Les conditions (18) doivent être remplies pour $o \leqslant x \leqslant l$, les conditions (18') pour $t \geqslant o$.

Fig. 3.

Ici, il est évident que les premières sont du type de Cauchy, mais non les dernières, de sorte que nous n'avons pas affaire à un problème de Cauchy, mais à ce que nous appellerons un problème *mixte*.

En fait, les deux ensembles de conditions jouent évidemment un rôle tout à fait différent au point de vue mécanique et sont souvent, et à juste titre, appelés de noms différents. Cependant, en raison de la forme géométrique de la question, nous avons employé indifféremment le terme de « conditions aux limites »; mais si on réfléchit maintenant à sa signification mécanique, on est conduit à donner aux conditions (18) le nom de « conditions initiales », en réservant celui de « conditions aux limites » pour les conditions (18'), qui correspondent aux extrémités de la corde.

Les *conditions initiales* se trouvent toujours exprimées sous la forme de Cauchy, mais le contraire a lieu pour

les *conditions aux limites* proprement dites; celles-ci ressemblent bien plutôt à celles qu'on rencontre dans le cas du problème de Dirichlet, de telle sorte que les problèmes mixtes apparaissent chaque fois que les frontières interviennent.

24. Prenons un autre exemple en considérant à nouveau un câble conducteur homogène, mais en supposant qu'il soit indéfini dans un sens seulement — mettons dans le sens des x positifs. Dans l'autre sens, on le considérera comme se terminant à un point où il communiquera, par un contact métallique, avec une source maintenue, à chaque instant, à un potentiel donné (constant ou variable). On se donne l'état initial du câble (potentiels et intensités pour $t = 0$) : alors le potentiel u aura à satisfaire à l'équation des télégraphistes et aux conditions (si on suppose que la position du contact est prise comme origine des x)

$$(19) \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x),$$

$$(19') \qquad u(0, t) = \mathbf{u}_0(t),$$

qui correspondent encore à ce que nous avons appelé un problème mixte.

Les deux sortes de données sont portées respectivement par l'axe des x [qui, dans notre graphique (fig. 3), représente le câble pour $t = 0$] et l'axe des t [représentant l'origine des coordonnées successivement considérée pour chaque valeur positive du temps].

Il est évident que (19) et (19′) ne doivent pas être contradictoires pour $x = t = 0$, de telle sorte que

$$(20) \qquad u_0(0) = \mathbf{u}_0(0), \qquad u_1(0) = \mathbf{u}'_0(0)$$

24 *bis*. Dans ce deuxième exemple, la figure pourrait être variée d'un nombre infini de manières. Nous pouvons, en effet, imaginer que le contact métallique, au lieu d'être fixé à $x = 0$, est un contact mobile (fig. 3 *bis*) susceptible de glisser le long du câble suivant une certaine loi donnée

$x = \xi(t)$, de telle sorte que nous avons maintenant deux fonctions de $t \geqslant 0$, l'une $\xi(t)$ exprimant à chaque instant positif la position du contact mobile sur le câble, l'autre $\mathbf{u}(t)$ donnant au même moment la valeur du potentiel à ce contact. Le problème de déterminer l'état électrique pour

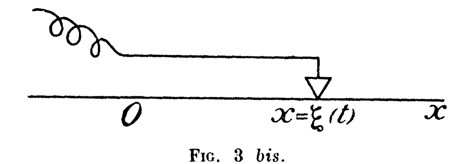


Fig. 3 *bis*.

$t > 0$, quand il est donné pour $t = 0$, consistera à trouver une solution $u(x, t)$ de l'équation des télégraphistes vérifiant les conditions

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}\right\} \quad [\text{pour } x \geqslant \xi(t)]$$

et

$$u[\xi(t), t] = \mathbf{u}(t).$$

La courbe portant les données sera alors représentée, dans le plan des xt comme le montre la figure 3 *ter*. Un tel problème est possible et déterminé (comme il est physiquement évident et comme on peut le voir aussi par des moyens analytiques) (1). Par conséquent, il ne nous serait pas permis de nous donner arbitrairement, sur la courbe $x = \xi(t)$, les données de Cauchy.

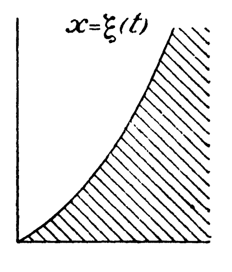


Fig. 3 *ter*.

25. On a un exemple de circonstances analogues, pour des problèmes à trois variables indépendantes, dans l'étude des vibrations transversales d'une membrane plane, fixée en chaque point de son contour s. L'équation aux

(1) Nous donnerons quelques indications sur ce sujet à la fin de l'ouvrage (Appendice II).

dérivées partielles « indéfinie » sera l'équation (e_2) des ondes cylindriques (§ **4 *bis***). Les conditions initiales seront

$$(21) \qquad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y),$$

u_0 (déplacement normal initial) et u_1 (vitesse normale initiale) étant des fonctions données de x, y, dans l'aire S′ couverte par la membrane. Les conditions aux limites sont

$$(21') \qquad u = 0$$

en chaque point de s et pour chaque valeur de t, que nous considérerons cependant exclusivement comme positif, le mouvement étant à déterminer seulement après l'instant initial $t = 0$. Dans la représentation graphique (n° 5), u doit être calculé à l'intérieur d'un demi-cylindre ayant comme base la portion S′ du plan des xy, la surface latérale S″ correspondant aux diverses valeurs positives de t. Nous avons encore là un problème mixte, (21′) étant du type de Dirichlet.

Le mouvement d'un milieu limité quelconque, à deux ou trois dimensions, donnera lieu à des remarques semblables.

26. On doit noter que ceci s'applique quelle que soit la nature des limitations. Si, par exemple, on prend, avec Duhem [1], le cas d'une sphère solide pulsante immergée dans l'air, ce dernier remplissant l'espace entier *en dehors* de la sphère, les petits mouvements du gaz dépendront, non du problème de Cauchy, mais d'un problème mixte, des données non semblables à celles de Cauchy [2] correspondant à chaque point de la surface de la sphère solide.

---

(1) *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, t. I, chap. XII, p. 23?-237.

(2) Elles ne sont pas exactement du type de Dirichlet, mais de celles du type appelé de « Neumann » ou type hydrodynamique, mais sont analogues aux données de Dirichlet en ce sens qu'une quantité et non deux, — la valeur de $\frac{du}{dn}$ seul — est donnée en chaque point de la surface sphérique.

27. Dans tous les exemples précédents, la forme géométrique des variétés qui portent les données présente évidemment une différence appréciable avec les cas qui dépendaient du problème de Cauchy.

Il est clair que l'intervention simultanée des deux sortes de données est ici en relation avec les angles ou les arêtes de nos variétés portant les données. Mais, pour $m > 2$, on peut aller plus loin. Dans l'équation des ondes cylindriques (ou des membranes vibrantes) le cône caractéristique a pour équation (par rapport à des axes passant par son sommet)

$$x^2 + y^2 - \omega^2 t^2 = 0.$$

Le plan qui porte les données de Cauchy est le plan $t =$ constante : *un tel plan ne coupe qu'une nappe du cône caractéristique, et la coupe suivant une ellipse* (dans le cas actuel, un cercle).

Nous dirons qu'une direction de plans *a une orientation d'espace* (ou est une *direction d'espace*) par rapport à notre équation (cette dernière étant supposée hyperbolique normale), si un plan ayant cette direction coupe une seule nappe du cône caractéristique, l'arête (1) d'intersection étant fermée, ou, ce qui revient au même, si un plan parallèle mené par le sommet du cône n'a pas d'autre point commun avec lui que ce sommet. Dans le cas contraire, la direction dont il s'agit sera dite *orientée dans le temps* (2).

La surface latérale cylindrique S', dans notre représentation du problème de la membrane vibrante, a partout une orientation de temps : chacun de ses plans tangents coupe un cône caractéristique suivant une hyperbole. Ceci est un fait tout à fait général : comme l'a fait remarquer M. Volterra (3), si, sur une surface S qui consiste en plusieurs parties (qu'elles soient séparées ou non l'une de l'autre par des arêtes), certaines ont une orientation d'espace et d'autres non, les données correctes, sur ces dernières, sont du type de Dirichlet.

---

(1) V. note p. 6.
(2) Locutions suggérées par la théorie de la relativité.
(3) *Congrès intern.* Rome (1908), vol. II, p. 90.

On ne rencontre jamais un problème de Cauchy correctement posé et relatif à des variétés (même dépourvues d'arêtes) qui sont orientées dans le temps. Par exemple, on ne pourrait pas prendre des données de Cauchy arbitraires pour les équations (e_2) ou (e_3), par rapport à $x = 0$ [1]. Pour le montrer, choisissons les données en question indépendantes de t : alors u lui-même devra [2] aussi être indépendant de t et, par conséquent, satisfaire à $\Delta u = 0$, ce que nous avons vu être généralement impossible si u et $\frac{\partial u}{\partial x}$, pour $x = 0$, sont choisis arbitrairement.

Les conditions qui doivent être imposées à u_0 et $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$, de manière que le problème ait une solution, constituent un sujet encore peu connu qui peut se montrer intéressant au point de vue de la théorie des fonctions : nous en reparlerons brièvement au Livre IV.

---

(1) A l'heure actuelle, on ne connaît pas de système de données portées par $x = 0$ et de nature à déterminer correctement une solution de (e_2) ou de (e_3).

(2) V. plus loin, § 29.

LIVRE II

LA FORMULE FONDAMENTALE
ET
LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE

CHAPITRE PREMIER

CAS ET RÉSULTATS CLASSIQUES

---

28. Arrivons maintenant à notre objet propre, c'est-à-dire à la solution du problème de Cauchy, que nous considérerons uniquement, en thèse générale, dans les cas où il sera correctement posé.

Cette solution est connue de longue date pour certains cas particuliers, dont le plus simple est celui de l'équation (e_1), avec des données relatives à $t = 0$ (petits mouvements d'un tuyau d'air indéfini, ou vibrations d'une corde considérée comme d'une longueur indéfinie dans les deux sens), dont nous nous sommes occupés au n° **19**.

On connaît également la solution de Poisson pour le problème de Cauchy relatif à l'équation du son [1]; on peut l'exprimer sous la forme suivante :

Soit (x_0, y_0, z_0, t_0) un point d'univers donné, pour lequel nous voulons calculer la valeur de la fonction u, définie par les conditions (C_3) (n° **4**). Soit, d'une manière générale, $M_r(\varphi)$ la valeur moyenne de la fonction $\varphi(x, y, z)$ sur la surface de la sphère Σ de rayon r décrite dans l'espace ordinaire avec (x_0, y_0, z_0) pour centre. On aura :

$$(P) \qquad u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{d}{dt_0}\left[t_0 M_{\omega t_0}(u_0)\right] + t_0 M_{\omega t_0}(u_1).$$

---

(1) Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques* (lu à l'Ac. Sc. à Paris, le 19 juillet 1819). V. aussi Rayleigh, *Theory of Sound*, t. II, p. 88; Poincaré, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lumière*, chap. III, p. 76-98); etc...

Cette formule de Poisson a été démontrée de diverses manières et résulte, par exemple, de la théorie de Kirchhoff (voir plus loin, n° **43**), cas particulier de la méthode générale que nous développerons au Livre IV. La démonstration, également bien connue [1], que nous allons reproduire ici (à un détail près) est une démonstration synthétique, consistant à vérifier directement que le second membre remplit chacune des conditions désirées; en raison du théorème de M. Holmgren, c'est la seule expression susceptible de les remplir toutes.

Une telle vérification est donnée dans les travaux que nous venons de citer et dans d'autres ouvrages classiques. Nous renverrons simplement à ceux-ci en ce qui concerne les conditions initiales (C_3), pour nous borner à la vérification de l'équation aux dérivées partielles.

Comme nous l'avons noté précédemment (p. 38, note 2), il est indispensable de convenir avec précision de ce que l'on doit considérer comme constituant une solution. Dans le cas actuel, nous devrons imposer à la fonction cherchée d'avoir en général des dérivées des deux premiers ordres satisfaisant à l'équation donnée elle-même; mais les dérivées secondes pourront éventuellement être affectées de discontinuités de première espèce sur certaines surfaces particulières. Par contre, comme nous l'avons dit à l'endroit cité il y a un instant, la continuité de la fonction elle-même et de ses dérivées du premier ordre devra avoir lieu *sans exception* : il est clair, en effet, que les conditions de Cauchy (C_3) perdraient toute signification si leurs premiers membres pouvaient être discontinus pour $t = 0$ ou même sur une certaine surface plus ou moins voisine de l'hyperplan en question.

Il est aisé de voir encore de la manière suivante ce qu'aurait d'arbitraire, de gratuit, le fait d'admettre, dans le problème actuel, des discontinuités du premier ordre, c'est-à-dire portant sur des dérivées premières. Une première solution u' de l'équation étant donnée dans une région R

---

(1) Cf. Poincaré, *loc. cit.*; etc.

de l'espace, soit S une hypersurface non caractéristique tracée dans R et qui divise cette région en deux parties R′ et R″. Retenant dans R′ la fonction u', nous pouvons, dans R″, définir une nouvelle solution u'' de l'équation par des données de Cauchy relatives à S, savoir des valeurs égales, sur S, à celles de u', et des valeurs *arbitraires* d'une de ses dérivées (toutes ces données devant être analytiques si S est orientée dans le temps, mais n'étant pas assujetties à cette condition dans le cas contraire).

On voit, en particulier, par là que si l'on admettait l'existence de solutions à discontinuités du premier ordre (telles que celle qui est constituée par une fonction égale à u' dans R′ et à u'' dans R″), rien n'obligerait de pareilles discontinuités à se propager suivant des caractéristiques, du moins en l'absence de spécifications nouvelles.

Dans les problèmes physiques qui introduisent des discontinuités du premier ordre (ou « ondes de choc »), on est le plus souvent obligé de reprendre totalement la mise en équation elle-même : c'est, par exemple, ce qui est arrivé à Riemann et à Hugoniot à propos des ondes aériennes. Il y aurait également lieu d'étudier, avec Love (*Proceedings London Math. Soc.*, série 2, t. I, 1903) le cas où une onde du premier ordre est considérée comme limite d'une « quasi-onde » au sens de Duhem (*Comptes Rendus*, t. CXXXV, 1902, p. 761), c'est-à-dire d'un mouvement comportant des variations non plus instantanées, mais simplement très rapides, quoique continues, des dérivées premières. Cette question ne sera pas abordée ici; mais il y a lieu d'observer que M. Love, en opérant ainsi, trouve que la propagation se fait encore nécessairement suivant une caractéristique. La discordance de ce résultat avec celui que nous venons de noter montre que les deux problèmes ne sont pas équivalents, que les discontinuités obtenues en partant des quasi-ondes considérées par M. Love et passant à la limite ne sont pas les discontinuités du premier ordre les plus générales que peuvent présenter les solutions de l'équation (e_3).

Ayant ainsi à obtenir des solutions continues au premier ordre (c'est-à-dire continues ainsi que leurs dérivées

premières, nous serons conduits à supposer, dans les données elles-mêmes, des conditions de régularité convenables. Comme on le verra un peu plus loin, celles que nous serons conduits à postuler se réduiront à cette même continuité au premier ordre considérée pour $t = 0$, c'est-à-dire au minimum de ce que l'on est conduit à supposer pour concorder avec les conditions du problème indiquées ci-dessus.

28 *bis*. Pour commencer, nous supposerons remplies toutes les conditions de continuité, de quelque ordre qu'elles soient, généralement admises dans la démonstration classique du résultat que nous avons en vue, de sorte que les dérivées premières et secondes des intégrales doubles de Poisson pourront s'obtenir par différentiation sous le signe $\iint$ (nous constaterons, dans un instant, que ces conditions sont la continuité au premier ordre de chacune des fonctions u_0, u_1).

Considérons, par exemple, le second terme $\frac{1}{4\pi} t_0 I_1 = t_0 M_{\omega t_0}(u_1)$ de la formule, et cherchons-en d'abord les dérivées par rapport à x_0, y_0, z_0. Elles s'obtiennent en principe par différentiation sous le signe $\iint$ ou, ce qui revient au même, en ce qui regarde la première d'entre elles, par exemple, par comparaison entre les éléments homologues pris l'un sur une sphère σ de centre (x_0, y_0, z_0), l'autre sur la sphère σ', de même rayon ωt_0 et de centre $(x_0 + h, y_0, z_0)$, c'est-à-dire entre les éléments qui dérivent l'un de l'autre par la translation h parallèle à l'axe des x. On trouve ainsi évidemment (moyennant notre hypothèse de continuité pour u_1) :

$$\frac{1}{4\pi} t_0 \frac{\partial I_1}{\partial x_0} = t_0 M_{\omega t_0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).$$

On peut différentier de même une seconde fois, si $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ est également supposé continu et, opérant de même pour les différentiations par rapport à y_0, z_0, on a :

$$\Delta I_1 = \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z_0^2} = 4\pi M_{\omega t_0}(\Delta u_1).$$

Ce premier calcul est bien connu. Nous nous écarterons, au contraire, de la méthode classiquement suivie dans les différentiations par rapport à t_0. Celles-ci sont effectuées généralement avec l'aide d'une transformation d'intégrale de surface en intégrale triple, c'est-à-dire moyennant l'introduction des valeurs de u_0, u_1 et de leurs dérivées, non seulement sur la surface de la sphère de Poisson, mais dans le volume entier de cette sphère. Il pourra nous être utile d'éviter la considération de ce volume, ce que l'on fera de la manière suivante.

La dérivée seconde par rapport à t_0, savoir

$$t_0 \frac{\partial^2 \mathrm{I}_1}{\partial t_0^{\,2}} + 2 \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial t_0},$$

étant également déterminée par différentiation sous le signe $\iint$, nous donne, pour $u = \frac{1}{4\pi} t_0 \mathrm{I}_1$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^{\,2}} = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\omega^2 t_0 \frac{d^2 u_1}{dn^2} + 2\omega \frac{du_1}{dn} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$\frac{du_1}{dn}$ et $\frac{d^2 u_1}{dn^2}$ étant les dérivées normales (extérieures) première et seconde. Mais on a l'identité (¹)

$$\frac{d^2 u_1}{dn^2} + \frac{2}{\omega t_0} \frac{du_1}{dn} = \Delta u_1 - \mathcal{D}_2 u_1,$$

$\mathcal{D}_2$ étant le « second paramètre différentiel de Lamé-Beltrami » sur la sphère

$$\frac{1}{\omega^2 t_0^{\,2}} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u_1}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2} \right].$$

Or, en raison de l'identité (²) intégrale classique à laquelle satisfait $\mathcal{D}_2$ et de la régularité supposée de u_1, l'inté-

---

(1) Voir nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. I, n° 34, p. 50.

(2) Voir Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, n° 674, formule (18), et nos *Leçons sur la propagation des ondes*, n° 35. La notation $\mathcal{D}$ est employée ici pour distinguer les paramètres différentiels sur la sphère des paramètres analogues dans l'espace.

grale du dernier terme du second membre sur la surface de la sphère est nulle : ce qui réduit la valeur de $\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2}$ à la valeur précédente de $\omega^2 \Delta u$. Le second terme $t_0 I_1$ de l'expression (P) de Poisson satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles.

On verrait de même que la quantité $t_0 I_0 = t_0 M_{\omega t_0}(u_0)$ est aussi une solution de notre équation (e_3) et que, par conséquent, il en est de même de sa dérivée par rapport à t_0.

L'expression (P) vérifie donc (e_3), du moins tant que les fonctions u_0, u_1 sont supposées parfaitement régulières.

29. Voyons maintenant comment cette conclusion sera modifiée par la présence de discontinuités. Il sera d'ailleurs uniquement question, dans ce qui va suivre, de discontinuités de première espèce portant sur les fonctions u_0, u_1 elles-mêmes ou sur leurs dérivées.

Si u_1 éprouvait une discontinuité de cette nature au passage d'une certaine surface S, l'expression de la dérivée $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$ devrait être modifiée en conséquence. Supposons, par exemple, que u_1, différent de zéro du côté 1 de S, devienne brusquement nul lorsqu'on passe au côté 2. Alors l'intégration double qui fournit la moyenne M ne devra être étendue qu'à une partie de la surface sphérique σ; il y aura, dans ces conditions, des éléments de σ qui n'auront pas de correspondants sur σ', ou inversement : cette discordance portera sur l'aire sphérique comprise entre la ligne $\mathcal{L}$, intersection de σ avec la surface S, et la ligne $(\mathcal{L}')$ déduite par translation de l'intersection $\mathcal{L}'$ de S avec σ'. Elle conduit à ajouter à l'expression de $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$ une intégrale curviligne prise le long de $\mathcal{L}$ et où figureront, sous le signe $\int$, les valeurs de u_1 calculées, bien entendu, du côté 1.

Pareille constatation s'applique aux dérivées premières par rapport à y_0, z_0, t_0. Le cas d'une discontinuité de première espèce quelconque se ramène, d'autre part, évidem-

ment, à celui que nous venons de traiter, les intégrales curvilignes introduites contenant alors, en chaque point de $\mathcal{L}$, la grandeur de la discontinuité correspondante.

Il y a lieu d'observer qu'une telle discontinuité de u_1 n'interrompt pas la continuité de I_1 lui-même, même au moment où, le point (x, y, z, t) traversant une hypersurface caractéristique $\mathcal{C}$ menée par S, σ, d'abord sans point commun avec S, lui devient tangente, puis sécante : la portion de la sphère σ comprise dans la région 2 est, en effet, tout d'abord infiniment petite dans ces conditions, et il en est de même de la portion correspondante de la sphère de rayon 1, du moins si le rayon de la sphère σ est fini (il n'en est plus ainsi au voisinage de S lui-même et là, il est clair que la continuité cesse en même temps que celle du u_1). Quant à $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$, il serait discontinu, l'intégrale curviligne correspondante étant d'emblée différente de zéro (*vide infra*, p. 67, note) quoique prise suivant une ligne $\mathcal{L}$ infiniment petite.

Si maintenant u_1 est continu, mais que ses dérivées premières soient discontinues au passage de S, on voit évidemment, de même, que :

1° les dérivées premières de l'intégrale correspondante I_1 seront continues dans les conditions indiquées en dernier lieu (c'est-à-dire au passage de l'onde);

2° que, par contre, l'expression des dérivées secondes de I_1 devra être modifiée par l'action d'une intégrale curviligne prise le long de $\mathcal{L}$ et portant sur les discontinuités en question.

Si enfin les dérivées secondes de u_1 sont seules discontinues, une telle intégrale curviligne n'interviendra plus et le calcul précédent étant certainement valable, le second terme de (P) vérifiera bien l'équation aux dérivées partielles.

On montrera, comme tout à l'heure, qu'il en sera de même du premier : car il en sera ainsi pour le produit $t_0 I_0$ et par conséquent pour sa dérivée par rapport à t_0, pourvu que les dérivées troisièmes du produit en question existent; et c'est ce qui aura toujours lieu, sauf peut-être sur la

caractéristique G elle-même, du moment que les dérivées secondes de u_0 existeront et n'auront que des discontinuités de première espèce.

Le fait que l'expression de Poisson vérifie (e_3) est donc établi en admettant :

1° la continuité de u_0 et de ses dérivées premières, ainsi qu'il est naturel, puisque cela revient à la continuité de la solution u et de ses dérivées premières en x, y, z, pour $t = 0$;

2° la continuité de u_1, qui est, de même, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t = 0$;

3° celle des dérivées de u_1, c'est-à-dire de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial z}.$$

Mais cette dernière hypothèse 3° est plus restrictive que celles qu'il est logique de faire, puisque c'est une condition de continuité « au second ordre » (continuité des dérivées secondes de u pour $t = 0$).

Or, cette condition supplémentaire est, en réalité, inutile : il n'est besoin, pour démontrer notre double conclusion, que de supposer la concordance au premier ordre exprimée par les conditions 1°, 2°.

En réalité, chacune des quantités $t_0 I_0$, $t_0 I_1$ vérifie l'équation aux dérivées partielles *quel que soit l'ordre de la discontinuité* qui est supposée affecter, suivant une surface déterminée $S(x, y, z) = 0$, l'une des fonctions u_i $(i = 0, 1)$, pourvu, bien entendu, que cette discontinuité soit de première espèce tant en ce qui concerne u_i qu'en ce qui concerne chacune de ses dérivées.

C'est ce qui résultera des conclusions générales auxquelles nous arriverons dans la suite (Livre IV).

On peut, bien entendu, donner du même fait une vérification directe, en calculant les intégrales curvilignes dont il vient d'être question. C'est ce que nous ferons ici, en nous bornant, toutefois, au cas où la discontinuité est du premier ordre, et en

faisant d'autre part, appel aux notions géométriques exposées un peu plus loin (n° **39**), et, plus complètement, dans notre *Cours d'Analyse* (1).

Supposons donc que la fonction $u_i(x, y, z)$ ait deux expressions différentes des deux côtés de la surface S représentée par l'équation $S(x, y, z) = 0$, mais sans que les valeurs mêmes de u_i soient discontinues au passage de cette surface. Par contre, les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, ... pourront être affectées, en cet endroit, de discontinuités de première espèce, dont les grandeurs (2) seront désignées par

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right], \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial y}\right], \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial z}\right].$$

Nous pourrons d'ailleurs, sans diminuer la généralité, supposer, comme il y a un instant, que l'une des deux expressions de u_i, celle qui convient à la région 2, est identiquement nulle (3), de sorte que u_i s'annulera aussi sur S et que les quantités précédentes seront les valeurs mêmes des dérivées partielles en un point quelconque dans la région 1, qui sera, pour fixer les idées, la région $\mathcal{C}(x, y, z) \geqslant 0$.

L'intégrale $I = I_i$ ne sera donc à étendre qu'à une partie de la surface de la sphère σ, celle qui est située dans la région 1. Ceci n'entraînera pas de modifications dans l'expression trouvée pour $\frac{\partial I}{\partial x_0}$, du moment que u_i est supposé continu; mais elle en entraînera une pour la valeur de $\frac{\partial^2 I}{\partial x_0{}^2}$. Considérons l'intégrale I comme une intégrale prise sur la sphère σ_0 de rayon 1 qui a l'origine pour centre, la correspondance entre les deux sphères étant réalisée par homothétie, c'est-à-dire que le point $(x_0 + \omega t_0 \sin\theta \cos\varphi,\ y_0 + \omega t_0 \sin\theta \sin\varphi,\ z_0 + \omega t_0 \cos\theta)$ de σ

---

(1) *Cours d'Analyse*, professé à l'Ecole Polytechnique, Paris, Hermann. t. I (1925), n° **354**, p. 506-507.

(2) Ces quantités ne sont pas quelconques (voir nos *Leçons sur la propagation des ondes*, liv. II) : elles sont proportionnelles aux quantités α, β, γ du texte Il se trouve que le calcul aboutit sans utilisation de cette proportionnalité.

(3) On peut, en effet, toujours considérer la distribution donnée de valeurs u_i comme la somme de deux autres dont la première serait continue dans l'ensemble des régions 1 et 2 (de sorte que la valeur qu'on en déduirait pour $u(x, y, z, t)$ vérifierait assurément l'équation aux dérivées partielles) et coïnciderait, dans 2, avec la véritable. Nous n'aurions plus alors qu'à raisonner sur la partie restante, laquelle est nulle dans 2.

sera représenté par le point (sin θ cos φ, sin θ sin φ, cos θ) de σ_0 : cette intégrale sera étendue à une région variable de σ_0, savoir celle qui est limitée par la ligne

$$(\mathcal{L}_0) \qquad \mathrm{S}_0(\theta, \varphi; x_0, y_0, z_0, t_0)$$
$$= \mathrm{S}(x_0 + \omega t_0 \sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + \omega t_0 \sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + \omega t_0 \cos\theta) = 0.$$

ou, abréviativement :

$$\mathrm{S}_0(\theta, \varphi, x_0) = 0.$$

De ce fait (*Cours d'Analyse*, loc. cit.), la dérivée de $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_0}$ par rapport au paramètre x_0 comprend, outre l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

une intégrale simple relative à $\mathcal{L}_0$ et qui est

$$\int_{\mathcal{L}_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] \frac{d\sigma_0}{dx_0} = \int_{\mathcal{L}_0} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d\sigma_0}{dx_0}.$$

L'élément différentiel $\frac{d\sigma_0}{dx_0}$ est calculé comme il sera dit au n° **39** à l'aide de l'élément superficiel $d\sigma_0 = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$: il s'écrit encore (voir passages cités) $-\ ds_0 \frac{d\mathrm{N}_0}{dx_0}$, en désignant par ds_0 l'élément d'arc de $\mathcal{L}_0$ et par $d\mathrm{N}_0$ la distance normale entre les deux courbes sphériques $\mathrm{S}_0(\theta, \varphi, x_0) = 0$, $\mathrm{S}_0(\theta, \varphi, x_0 + dx_0) = 0$, comptée comme positive si la seconde d'entre elle est, par rapport à la première, du côté de la région 1. A son tour (*Cours d'Analyse*, loc. cit.), la dérivée $\frac{d\mathrm{N}_0}{dx_0}$ peut se remplacer par le quotient

$$\frac{d\mathrm{N}_0}{dx_0} = -\frac{\partial \mathrm{S}_0}{\partial x_0} : \left(\frac{d\mathrm{S}_0}{d\mathrm{N}_0}\right).$$

Revenons à la sphère σ (compte tenu du rapport de similitude ωt_0 entre celle-ci et σ_0) : comme $\frac{\partial \mathrm{S}_0}{\partial x_0}$ est évidemment égal à $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} = \alpha$, il vient, pour l'intégrale curviligne, N étant, sur σ,

la direction parallèle à N_0,

$$\frac{1}{\omega^2 t_0^2}\int_{\mathcal{L}} \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{ds}{\left(\frac{dS}{dN}\right)}$$

avec termes analogues à ajouter aux expressions de

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

Nous désignerons par a, b, c les cosinus directeurs de la normale extérieure à la sphère, $a = \sin\theta \cos\varphi$, $b = \sin\theta \sin\varphi$, $c = \cos\theta$; par α, β, γ, les cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers la région 1 et que, moyennant une forme convenable donnée à l'équation de la surface, nous pourrons supposer coïncider avec les dérivées partielles de S; par A, B, C, les cosinus directeurs de N_0, qui sont aussi ceux de la direction correspondante N tracée sur σ; par ψ, l'angle sous lequel se coupent les surfaces S et σ, défini par

$$\cos\psi = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

La quantité (positive dans nos hypothèses) $\frac{dS}{dN}$ est égale à $\sin\psi$.

Pareillement, la dérivée première de I par rapport à t_0 n'est pas modifiée : la dérivée seconde comportera, comme terme complémentaire, l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{t_0^2}\int_{\mathcal{L}} ds \frac{du_i}{dn}\frac{dS}{dn} : \left(\frac{dS}{dN}\right)$$
$$= \frac{1}{t_0^2}\int_{\mathcal{L}} \frac{ds \cos\psi}{\sin\psi}\left(a\frac{\partial u_i}{\partial x} + b\frac{\partial u_i}{\partial y} + c\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)$$

prise également suivant $\mathcal{L}$. Si on reporte ces diverses expressions [1] dans le premier membre de l'équation aux dérivées

---

(1) Le calcul du texte ne serait plus valable au passage de la caractéristique $\mathcal{C}$, les dénominateurs $\frac{dS}{dN} = \sin\psi$ qui figurent sous les signes $\int$ étant nuls. Dans ce cas, le mieux est de partir directement de l'expression (1), en assimilant l'aire sphérique infiniment petite à une calotte sphérique. On trouve ainsi aisément, pour les dérivées $\frac{\partial^2 I_i}{\partial x_0^2}, \ldots, \frac{\partial^2 I_i}{\partial t_0^2}$, les discontinuités $2\pi\omega t_0 \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots, 2\pi\omega^2 t_0 \frac{du_i}{dn}$.

partielles, en tenant compte du calcul déjà fait au n° précédent, il vient :

$$\omega^2\Delta(t_0 I) - \frac{\partial^2(t_0 I)}{\partial t_0^2} = \frac{1}{t_0}\left\{ \iint_{S > 0} \mathcal{D}_2 u_i d\sigma \right.$$

$$\left. + \int_{\mathcal{L}} ds \frac{\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_i}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial z} - \cos\psi \left(a \frac{\partial u_i}{\partial x} + b \frac{\partial u_i}{\partial y} + c \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)}{\sin\psi} \right\}$$

Mais on a

$$\alpha - a \cos\psi = A \sin\psi, \quad \beta - b \cos\psi = B \sin\psi,$$
$$\gamma - c \cos\psi = C \sin\psi.$$

Le coefficient de ds dans l'intégrale curviligne n'est donc autre que $\frac{du_i}{dN}$ et, d'autre part, d'après la formule précédemment invoquée (1), l'intégrale de $\mathcal{D}_2 u_i$ dans l'aire définie, sur σ, par l'inégalité $S \geqslant 0$, n'est plus nulle, mais égale à $-\int_{\mathcal{L}} \frac{du_i}{dN} ds$.

29 *bis*. Les autres propriétés que doit encore posséder notre solution : — continuité de u et de ses dérivées premières, — ont également lieu moyennant les conditions 1° et 2° du numéro précédent. *L'expression* (P) *satisfait donc à toutes les conditions du problème.*

Or, les hypothèses que nous avons admises ainsi relativement aux données sont les moins restrictives qu'il y ait lieu de faire. Nous nous sommes bornés à supposer, pour $t = 0$, la continuité des mêmes quantités u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ qui doivent être continues pour toutes les valeurs de x, y, z, t. Une discontinuité portant sur l'une d'entre elles impliquerait contradiction avec ce que nous exigeons de la fonction u.

---

(1) Voir la note 2 du n° précédent, p. 61.

Il peut sembler cependant, d'après des remarques précédemment faites, qu'une pareille contradiction ne doit pas constituer un empêchement absolu à la considération de problèmes pour lesquels elle peut se présenter. Des hypothèses *comportant une contradiction de cette espèce ont été*, nous l'avons vu (page 38, note 2), souvent étudiées à propos des équations du type elliptique. Mais ici le cas est différent. Dans le cas hyperbolique, l'influence des singularités des données ne peut rester confinée à la frontière : elle se propage nécessairement par ondes (Voir plus loin, n° **31**), c'est-à-dire tout le long d'une caractéristique [1].

30. La méthode de descente. — *Des difficultés particulières se présentent déjà quand, au lieu de l'équation* des ondes sphériques, on s'attaque à l'équation (e_2) (ondes cylindriques). Cependant, pour l'instant, on peut immédiatement déduire la solution du problème relatif à (e_2) de la solution correspondante obtenue pour (e_3).

En fait, nous avons vu précédemment que la première équation n'est qu'un cas particulier de la seconde. Pour l'intégrer, il suffit de supposer que, dans la formule (P), les fonctions u_0 et u_1 sont indépendantes de z.

On a ainsi un premier exemple de ce que nous appellerons la « méthode de descente ». Il peut paraître superflu de créer un mot spécial pour une remarque, en somme, puérile et qui a été employée dès les premiers stades de la théorie [2]; mais comme nous aurons souvent à la faire intervenir, il nous sera commode de disposer d'un terme pour la désigner. Elle consiste à remarquer que qui peut

(1) La preuve rigoureuse de l'impossibilité d'une discontinuité d'un ordre déterminé — du premier ordre, par exemple, — présentée par la solution u pour $t = 0$ et disparaissant (au lieu de se propager) pour $t > 0$, s'obtient aisément en considérant u comme défini par les données de Cauchy relatives à $t = T > 0$ et imaginant que les quantités $u_0(x, y, z) = u(x, y, z, 0)$ et $u_1(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0)$ soient calculées (par une nouvelle application de la formule de Poisson) à l'aide de ces données.

(2) Parseval, dans le *Traité des Différences et des Séries*, de Lacroix, 1re édit., p. 515; le *Mémoire*, de Poisson, cité précédemment, art. 8, V. Duhem, *Hydrodynamique*, *Elasticité*, *Acoustique*, t. II, chap. VIII.

le plus peut le moins : si on peut intégrer les équations à m variables, on peut en faire autant pour celles où n'interviennent que $(m - 1)$ variables. Ici, pour intégrer l'équation (e_2), on n'a qu'à noter que chaque solution de (e_2) est une solution de (e_3) indépendante de z, et inversement.

Ainsi, le problème de Cauchy pour les équations des ondes cylindriques

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ; \\ \left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} &= u_1(x, y) \end{aligned} \right\} \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

est équivalent au même problème pour l'équation des ondes sphériques

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ; \\ \left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} &= u_1(x, y) \end{aligned} \right\} \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

qui est celui que nous avons déjà considéré [équations (e_3), (C_3)], sauf que les seconds membres des conditions initiales ne contiennent pas z. La parfaite équivalence des deux problèmes peut se démontrer analytiquement en toute rigueur. Que toute solution de (A) vérifie B est chose évidente par elle-même. Inversement, une solution de (B) doit être indépendante de z : car s'il n'en était pas ainsi — soit $u = \varphi(x, y, z, t)$ — alors $u = \varphi(x, y, z + h, t)$, où h est une constante arbitraire quelconque, serait une deuxième solution du même problème, ce qui serait en contradiction avec le théorème de Holmgren. La solution de (B) doit, par conséquent, être solution de (A).

30 *bis*. Ceci étant posé, nous n'avons plus qu'à prendre pour u_0 et u_1, dans la formule (P), des fonctions dépendant exclusivement de x et de y. Pour voir ce qu'elle devient dans ces conditions, il suffit de nous rappeler qu'une valeur moyenne sur une sphère — ou ce qui revient au même ici, sur un hémisphère limité par un plan parallèle à celui des xy — est exprimée par une intégrale double

$$\mathrm{M}_r\,(\varphi) = \frac{1}{2\pi r^2}\iint \varphi\, d\Sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de l'hémisphère. En prenant x et y pour variables indépendantes, on voit que, φ étant indépendant de z, le symbole M s'exprime par

$$(2) \qquad \mathrm{M}_r\,[\varphi(x, y)] = \frac{1}{2\pi r}\,\mu_r(\varphi),$$

$$\mu_r(\varphi) = \iint \frac{\varphi\, dxdy}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}$$

[l'intégrale étant étendue à l'aire du cercle

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2]$$

et la formule (P) devient

$$(\mathrm{P}') \qquad u\,(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi\omega}\left[\frac{d}{dt}\,\mu_{\omega t}(u_0) + \mu_{\omega t}\,(u_1)\right]$$

31. *L'intervention des ondes.* — Notons que ces formules (P) et (P′) s'accordent avec ce qu'on connaît des ondes sonores ou lumineuses [1].

Dans l'un ou l'autre de ces deux phénomènes, nous voyons que, pour calculer la valeur de u en (x_0, y_0, z_0) à l'instant t_0, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de nos fonctions u_0 et u_1 (données de Cauchy pour $t = 0$) dans tout l'espace, mais seulement à l'intérieur et sur la surface d'une sphère ayant $\mathrm{O}\,(x_0, y_0, z_0)$ comme centre et ωt_0 comme rayon. Les perturbations produites à l'origine

---

(1) On verra des raisons *a priori* pour cela, résultant des conceptions d'Hugoniot, dans *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, t. I, ou dans nos *Leçons sur la propagation des ondes*, en particulier chap. IV, n° **165**, et chap. VII, n° **290**.

des temps en des points distants de O de plus de ωt_0, ne peuvent pas agir en O avant l'instant t_0.

Pour constater l'identité de cette notion d'ondes avec celle de caractéristiques, employons notre représentation graphique. Pour plus de commodité, considérons l'équation (e_2), qui nous permet d'avoir directement une figuration complète avec trois dimensions. Traçons le plan $t = 0$ et marquons le point d'univers (x_0, y_0, t_0). Une perturbation quelconque produite au point (x, y) à un certain instant t n'agira sur ce point d'univers que si

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \omega^2 (t - t_0)^2.$$

Si on prend le signe d'égalité, ceci représente la surface d'un cône droit circulaire ayant (x_0, y_0, t_0) comme sommet et comme axe une parallèle à l'axe des t; ou, plus exactement (puisque t doit, pour le moment, être pris essentiellement inférieur à t_0), la nappe inférieure de ce cône. Quant à l'inégalité correspondante, elle signifie que le point (x, y, t) doit être intérieur à la nappe conique ainsi représentée. Le cercle à l'intérieur duquel les intégrales (2) doivent être étendues est la trace d'un tel cône sur le plan initial des xy.

Suivant une heureuse expression que nous a suggérée M. de Donder, le cône représenté par l'équation précédente joue, dans l'espace-temps à trois dimensions, le rôle d'un *cornet acoustique*, propre à recueillir les seules données susceptibles d'influer sur l'état du phénomène au point d'univers (x_0, y_0, t_0).

La surface d'un tel cône vérifie la condition

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 = 0, \tag{3}$$

qui définit les caractéristiques de l'équation des ondes cylindriques, conformément à la règle donnée au n° **13**.

Il n'y a rien d'essentiel à changer à cela (à l'introduction près de l'espace à quatre dimensions) si on envisage l'équation des ondes sphériques. Il faudra remplacer le cône par l' « hypercône » (fig. 4)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \text{ou} \leqslant \omega^2 (t - t_0)^2,$$

dont la trace sur l'hyperplan $t = t_1 < t_0$ est la sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon $\omega(t_0 - t_1)$. Cet hypercône [1] vérifie l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(4) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

définissant les caractéristiques de l'équation (e_3).

Plus généralement, si on exprime analytiquement la règle physique bien connue d'après laquelle la vitesse nor-

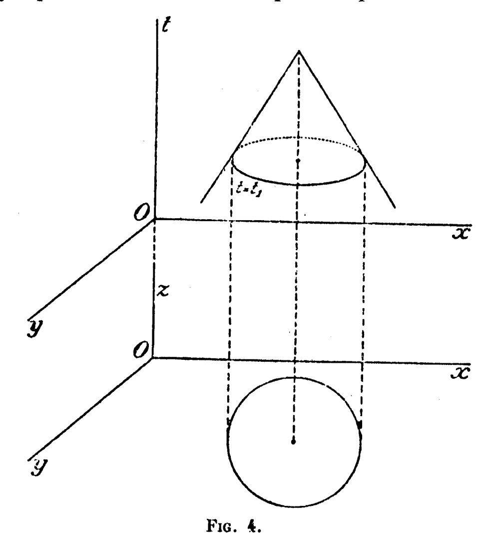


Fig. 4.

male de propagation des ondes est égale à ω, on trouve $[G(x, y, z, t) = 0$ étant le front d'onde$]$ la condition (4).

La relation entre les solutions de notre problème et les ondes est une relation générale, comme il apparaîtra plus clairement par la suite.

32. ***Ondes rétrogrades.*** — Remarquons qu'ici, comme on le fera le plus souvent dans la suite, nous considérons les ondes d'une manière un peu différente de la manière ordi-

---

(1) Dans notre « Géométrie descriptive généralisée », il faudrait le représenter comme dans la figure ci-dessus (un cône ordinaire dans l'espace des (x, y, t), et dans celui des (x, y, z), une sphère qui est la base de l'hypercône).

naire, savoir dans le sens rétrograde, en remontant le cours du temps. Au lieu de partir du point d'univers (x', y', z', t') ou (x', y', t') et de considérer quels sont les points successifs atteints aux instants qui suivent t', par des ondes émises à l'instant t en O' (x', y', z') ou (x', y'), nous nous donnons le point d'univers final (x_0, y_0, z_0, t_0), ou (x_0, y_0, t_0), et nous cherchons comment on doit choisir le point antérieur de manière qu'il soit « juste en onde », c'est-à-dire que l'onde émise par ce point d'univers initial atteigne précisément O (x_0, y_0, z_0), ou (x_0, y_0) à l'instant t_0 : le lieu de tels points d'univers antérieurs étant une anti-onde tout à fait pareille à une onde ordinaire, excepté que sa propagation se fait suivant les valeurs décroissantes de t, c'est-à-dire en renversant le cours du temps.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une onde émise en (x', y', z', t') passe juste par (x_0, y_0, z_0, t_0), est que l'anti-onde issue du dernier passe juste par le premier : c'est un fait que, dans la suite, nous reconnaîtrons, analytiquement, comme tout à fait général.

De telles circonstances, en relation évidente avec le principe du « retour inverse de la lumière », se rencontreront souvent au cours de cet ouvrage. On peut même aller un peu plus loin, en considérant le cas où deux points d'univers (x', y', t') et (x, y, t) dans l'espace à trois dimensions, par exemple, sont « sous onde » l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire où l'onde partant de O' à l'instant t', atteint O *avant* l'instant t_0. Ceci signifie, géométriquement, que (x_0, y_0, t_0) est à l'intérieur de la « nappe directe » du cône caractéristique du sommet (x', y', t'), c'est-à-dire à l'intérieur de la nappe tournée vers les t positifs. Il est intéressant de noter que, comme cela est maintenant évident, la condition

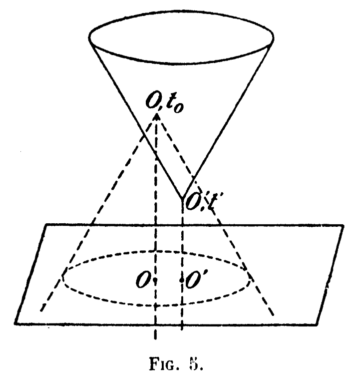


Fig. 5.

nécessaire et suffisante pour cela est que, inversement (x', y', t') soit à l'intérieur de la nappe « rétrograde » ou « inverse » du cône caractéristique ayant (x_0, y_0, t_0) comme sommet. Ce fait apparaîtra, lui aussi, comme tout à fait général : nous verrons que la condition dont il s'agit est exprimée par une inégalité dont le premier membre est symétrique par rapport aux deux points qu'il contient.

33. ***La Question du principe de Huygens*** (1). — Mais, quelque simples que soient les résultats précédents, ils ont cependant ouvert des discussions scientifiques longues et importantes, qui se rapportent à ce qu'on appelle le *Principe de Huygens.*

En fait, ainsi qu'il arrive souvent, la question discutée avait été mal posée. Le principe de Huygens peut être pris dans plusieurs sens différents, et il n'avait pas été suffisamment distingué entre eux.

On sait que, dans son ouvrage fondamental sur la lumière, le grand savant hollandais étudiait l'action d'une perturbation lumineuse produite initialement ($t = o$) en un point donné O, sur un autre point a. Au lieu de suivre strictement son exposé, nous allons, pour plus de clarté, le mettre sous forme d'une sorte de syllogisme.

(A) (*Majeure*). « L'action des phénomènes produits à l'instant $t = o$, sur l'état des choses au temps ultérieur $t = t_0$, s'opère par l'entremise de chaque instant intermédiaire $t = t'$, c'est-à-dire que (en supposant $o < t' < t_0$), pour trouver ce qui se passe au temps $t = t_0$, on peut déduire de l'état en $t = o$ celui qui existera pour $t = t'$, et, de ce dernier, l'état cherché à l'instant final $t = t_0$. »

(B) (*Mineure*). « Si, à l'instant unique $t = o$ — ou moins fictivement, pendant un court intervalle $\varepsilon \leqslant t \leqslant o$ — on produit une perturbation lumineuse localisée au voisinage immédiat de O, son effet sera localisé, pour $t = t'$, au

(1) L'orthographe adoptée ici pour le nom de Huygens est, d'après une communication que je dois à l'obligeance de M. A. Dresden, celle qui est employée par la Société hollandaise des Sciences, dans sa publication des œuvres du Maître.

voisinage immédiat de la surface d'une sphère de centre O et de rayon $\omega t'$: c'est-à-dire dans une couche sphérique très mince de centre O contenant la sphère précédente. »

(C) (*Conclusion*). « Pour calculer l'effet du phénomène lumineux initial produit en O au temps $t = 0$, on peut le remplacer par un système convenable de perturbations se produisant en $t = t'$, distribuées sur la surface de la sphère de centre O et de rayon $\omega t'$. »

Il est arrivé que différents auteurs ont appelé « Principe de Huygens », indifféremment, l'une quelconque de ces trois propositions : or, comme on le verra, notre opinion sur chacune d'elles doit être complètement différente.

La proposition (A) est ce que les philosophes (si tant est que j'emploie correctement leur langage) appellent une des « lois de la pensée » : c'est-à-dire une loi inévitable de la raison, que nous ne pouvons, par aucun moyen, concevoir comme inexistante, et sans laquelle nous ne pourrions pas penser. Si nous découvrons aujourd'hui des inscriptions assyriennes, nous ne pouvons pas songer à supposer que, à un instant quelconque entre le moment où elles ont été tracées et le moment de leur découverte, ces inscriptions ont pu cesser d'être, et toute trace de leur existence disparaître. Par conséquent, (A) doit être considéré comme un truisme, ce qui ne veut pas dire qu'il ne puisse pas nous intéresser; car le géomètre ne craint pas les truismes : la proposition ci-dessus, en particulier, correspond au fait que l'intégration des équations aux dérivées partielles définit certains groupes d'opérations fonctionnelles; et ceci, par exemple, conduit à des identités tout à fait remarquables concernant la fonction hypergéométrique, les fonctions de Bessel, les fonctions thêta, etc.

La proposition (C), quoique n'étant pas aussi évidente, se montrera comme une propriété générale des équations dont nous nous occupons.

Mais tel n'est nullement le cas pour la proposition (B). Nous verrons plus loin qu'elle est une propriété toute spéciale de certaines équations particulières : en fait, on ne

sait pas encore si l'équation des ondes sphériques (et d'autres qui n'en sont, au fond, pas distinctes), ne sont pas les seules à posséder cette propriété.

Le cas échéant, nous parlerons de (A) et de (B) comme de « la majeure » et de « la mineure » de Huygens, en les distinguant ainsi de la proposition (C).

34. Cette proposition (C) a été l'objet et le résultat des travaux fondamentaux de deux auteurs : Kirchhoff s'en est occupé, pour les ondes sphériques, dans son Mémoire classique *Zur Theorie des Lichtstrahlen* (1), et dans ses *Leçons* d'optique; puis M. Volterra l'a démontrée pour les ondes cylindriques, en particulier dans les *Acta Mathematica*, vol. XVIII, et, plus récemment, a repris le sujet au cours de ses conférences de Stockholm (2).

La manière dont ces deux auteurs posent la question est la suivante, que nous exposerons, toujours pour plus de commodité dans la représentation graphique, sur le cas de l'équation (e_2). Supposons que, initialement, le plan des xy soit complètement au repos, et que, plus tard, on lui communique certaines impulsions *à l'intérieur d'une courbe fermée* σ. Par la suite, ces impulsions se propageront à l'extérieur de σ, et, avant cela, influenceront les points de σ lui-même. Notons les valeurs de u et d'une de ses dérivées, — par exemple $\frac{du}{dn}$ — ainsi produites aux différents points de σ à tous les instants successifs, en rappelant que, dans notre mode de représentation, ces états successifs de σ seront figurés par des sections successives d'un cylindre droit S ayant σ comme base, de telle sorte que ce sera ce cylindre qui sera considéré portant les valeurs ci-dessus mentionnées de u et de $\frac{du}{dn}$. Les conditions demeurent absolument les mêmes pour les ondes

(1) *Sitzungsber. der K. Ak. der Wiss* (1882), p. 641 et suiv.; V. aussi Beltrami, *Rendic. Istituto Lombardo*, 2e série, vol. XVII; et Duhem : *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, t. I, p. 145-161, etc.

(2) *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, Upsal, 1906, et Paris, Hermann, 1912.

sphériques, à l'introduction près de l'espace à quatre dimensions, la courbe σ étant remplacée par une surface (et, par conséquent, le cylindre remplacé par un hypercylindre).

Or, Kirchhoff, pour le deuxième problème, et M. Volterra pour le premier, ont obtenu l'expression de u à un instant positif quelconque et pour un point quelconque à l'extérieur de σ, en fonction des valeurs ci-dessus mentionnées de u et de $\frac{du}{dn}$ le long du cylindre, ou de l'hypercylindre (en langage ordinaire, le long de la courbe ou de la surface σ considérées à tous les instants successifs), et ces expressions sont données par des intégrales définies prises sur S, ce qui peut s'interpréter physiquement, dans un quelconque des cas précédents, en disant que le mouvement du milieu qui entoure σ peut être considéré comme résultant d'impulsions convenablement choisies, issues à des instants variés des différents points de σ, ce qui est la proposition (C) (1).

Analytiquement, ce problème de Kirchhoff et de M. Volterra n'est autre que le problème de Cauchy pour la portion d'Univers (qui est l'espace des $xyzt$, ou des xyt) située à l'extérieur de S et au-dessus de $t = 0$ (c'est-à-dire dans la région $t \geqslant 0$), la variété qui porte les données étant constituée par la portion supérieure de S (c'est-à-dire la portion de S qui correspond à $t \geqslant 0$), et par une portion de l'hyperplan $t = 0$ (portion extérieure à σ), les données sur ce dernier étant nulles.

Par lui-même, ce problème de Cauchy n'appartient pas à la classe qui nous intéresse, car il n'est pas ce que nous appelons « correctement posé » : sa possibilité, comme on peut le voir par les travaux des auteurs précités eux-mêmes, est subordonnée à un nombre infini de conditions nécessaires. En réalité, pour une frontière d'une telle forme, le problème correctement posé serait ce que nous avons

(1) Du point de vue de l'interprétation physique, les intégrales de Kirchhoff nécessitent une transformation, ce qui a été fait par B. Brunhes, *Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, vol. IV, 16e Mémoire (1895).

appelé un problème « mixte », qui consiste à donner u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\left(\text{par exemple } u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$ pour $t = 0$, et u *tout seul* $\left(\text{ou } \frac{du}{dn} \text{ tout seul}\right)$ sur la partie précitée de la variété S.

Mais, en plus de leur intérêt physique, qui est de prouver la forme (C) du principe de Huygens, et quoique, pour parler strictement, les formules de M. Volterra puissent se déduire de celles de Kirchhoff par « descente », les méthodes de Kirchhoff et de Volterra sont directement applicables au cas général du problème de Cauchy pour les deux équations correspondantes, et donnent par elles-mêmes la solution complète de ce problème pour toutes les formes de variétés portant les données. De plus, la solution s'obtient par une méthode analytique régulière (au lieu de la méthode synthétique par laquelle nous avons démontré la formule de Poisson), de telle sorte que nous pouvons essayer de généraliser de telles méthodes pour d'autres types d'équations.

35. *Méthode de Riemann.* — En réalité, les résultats de Kirchhoff et de M. Volterra n'étaient pas les seuls, ni même les premiers de cette sorte ainsi obtenus. Longtemps avant la publication du Mémoire de Kirchhoff et l'époque des recherches de M. Volterra, il a été donné une première solution générale du problème de Cauchy pour une classe étendue d'équations : c'est la célèbre méthode de Riemann, contenue dans l'ouvrage du grand géomètre *Sur la propagation des ondes aériennes d'amplitude finie* (1). Quoique donnée d'abord par Riemann pour des équations tout à fait spéciales, la méthode, en réalité, convient pour toute équation linéaire hyperbolique aux dérivées partielles à deux variables.

Mais le travail de Riemann est resté inconnu pendant assez longtemps; c'est seulement après la publication du

---

(1) *Gött. Abhandl.*, vol. VIII (1860). *Œuvres*, 8e Mémoire de la 2e édit. allemande par Weber et Dedekind; Trad. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. 177-206 (Mémoire traduit par X. Stouff).

travail de Kirchhoff que l'attention fut attirée sur lui par du Bois-Reymond (1); il a été finalement amené à la connaissance de tous les mathématiciens, sous sa forme la plus générale, par les classiques *Leçons sur la théorie des Surfaces* (2) de Darboux.

Depuis ce moment, la méthode de Riemann peut être considérée comme universellement connue et nous n'aurions, en somme, pas besoin de l'exposer; mais ses principes se relient si étroitement à notre objet que nous aurons nécessairement à passer par les principales étapes de cette méthode, dans les chapitres suivants.

(1) Leipzig, 1864, et Tubingen, 1883 (V la note suivante).

(2) V. plus loin, n° **42**. V. aussi Dini, *Rendic. Accad. Lincei*, t. V (1896), et t. VI (1897).

CHAPITRE II

LA FORMULE FONDAMENTALE

---

36. L'objet de ces Leçons est de généraliser les méthodes de Kirchhoff, de Riemann et, tout spécialement, de M. Volterra, à toute équation linéaire hyperbolique (normale), à un nombre m quelconque de variables indépendantes.

Examinons comment procèdent les trois auteurs cités.

On peut considérer qu'ils partent tous de la même formule. En fait, on peut dire qu'il n'y a qu'une seule formule (qu'on peut appeler « formule fondamentale ») dans toute la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles, quel que soit le type auquel elles appartiennent. Commençons par écrire cette formule.

Elle est bien connue dans la théorie du potentiel : c'est la formule classique

$$\iiint (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = -\iint \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) dS.$$

On sait qu'elle a son origine dans l'identité

$$v\Delta u - u\Delta v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$P = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x},\ Q = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y},\ R = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Le point de départ de la méthode de Riemann, par exemple, est une formule toute semblable, savoir l'identité

$$v\,\mathcal{F}(u) - u\,\mathcal{G}(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

qui donne, par intégration :

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \iint [v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v)]\, dx\, dy = \int (P\, dy - Q\, dx),$$

l'intégrale simple du second membre étant prise dans le sens direct sur le contour de l'aire d'intégration du premier membre, et les fonctions u et v étant arbitraires, mais à condition d'être régulières.

Dans ces deux formules, $\mathcal{F}(u)$ signifie, symboliquement, un polynôme linéaire donné quelconque en u et ses dérivées par rapport à x, y et xy :

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu ;$$

P et Q étant, par exemple [1],

$$P = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + Auv, \quad Q = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Buv$$

tandis que $\mathcal{G}(v)$ désigne le polynôme bien déterminé suivant, ou « polynôme adjoint » de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(Av) - \frac{\partial}{\partial y}(Bv) + Cv.$$

La relation entre les deux polynômes adjoints est réciproque : c'est-à-dire que, si on opérait sur $\mathcal{G}(v)$ exactement comme on l'a fait sur $\mathcal{F}(u)$, pour obtenir son polynôme adjoint, on le trouverait égal à $\mathcal{F}(u)$. Naturellement, ceci se vérifie immédiatement, mais est aussi une conséquence du fait que le polynôme adjoint peut être considéré comme défini par l'identité (F_1) [2], qui ne change pas quand on échange $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (si on change, en même temps, les signes de P et de Q).

---

(1) V. la note suivante.

(2) Il est facile de voir qu'on peut changer P et Q sans altérer le second membre de (F_1); mais, $\mathcal{F}$ étant donné, il n'y a qu'un seul polynome $\mathcal{G}$ qui puisse donner notre identité (F_1), ainsi qu'il résulte du Lemme fondamental du Calcul des Variations : voir Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, Livre IV, chap. V, p. 114 de la 2e édition; et Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, no 404, 2e édition.

37. On peut écrire une identité analogue pour un polynôme différentiel linéaire quelconque à un nombre quelconque m de variables indépendantes

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu.$$

Si on multiplie par v, de faciles intégrations par parties montrent que l'on peut de nouveau (à l'aide de $A_{ik} = A_{ki}$) écrire l'identité

$$(5) \qquad v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v) = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x_m},$$

où l'on peut prendre, pour $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$,

$$(5') \qquad \mathcal{L}_i = \sum_k v\, A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \sum_i u\, A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} - uv\left(\sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - B_i\right).$$

et où $\mathcal{G}(v)$ représente le polynôme (¹)

$$(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{G}(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(A_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + Cv,$$

qui est dit le polynôme « adjoint » de $\mathcal{F}$, l'équation $\mathcal{G}(v) = 0$ étant également dite l'adjointe de la proposée (²)

La relation entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est, comme dans le cas précédent (et pour les mêmes raisons), réciproque.

38. A partir de (5), on obtient une formule intégrale analogue à (F_1). Ceci nécessite quelques notions et définitions concernant l'espace à m dimensions. Si, dans un tel espace, on a une hypersurface quelconque S, définie en donnant $x_1, x_2, \dots, x_m$ en fonction des $m - 1$ paramètres (coordonnées curvilignes) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, les cosinus de

---

(1) V. la note précédente.

(2) L'équation adjointe est, sauf spécification contraire, toujours prise sans second membre, même si l'équation donnée en a un.

la normale à S en un point quelconque seront, par définition, proportionnels aux quantités

$$D_1 = \pm \frac{D(x_2, \ldots\ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{m-1})}$$

$$D_2 = \pm \frac{D(x_1, x_3, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{m-1})}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_i = \pm \frac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_{m-1})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dans lesquelles les seconds membres sont des déterminants fonctionnels, dont les signes sont choisis de manière qu'ils soient proportionnels aux coefficients du développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \lambda_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_{m-1}} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \lambda_{m-1}} \\ * & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

ordonné par rapport aux éléments de la dernière ligne. Ces signes doivent donc alterner (cette convention laissant encore un signe arbitraire). Pour avoir l'analogie exacte avec les cosinus directeurs de l'espace ordinaire, on devra choisir ces « cosinus » de manière que la somme de leurs carrés soit égale à l'unité, c'est-à-dire que

$$\pi_i = \cos(n, x_i) = \frac{\varepsilon D_i}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots D_m^2}}$$

formules dans lesquelles le facteur ε est égal à ± 1, mais est le même pour toutes.

L' « élément de surface » dS autour du même point de S sera, par définition :

$$dS = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_m^2}\, d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{m-1},$$

de telle sorte que

$$(6)\quad \pi_1 dS = D_1 d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{m-1}, \qquad \pi_2 dS = D_2 d\lambda_1 \dots d\lambda_{m-1},$$
$$\dots, \quad \pi_m dS = D_m d\lambda_1 \dots d\lambda_{m-1};$$

dans cette formule, il reste un signe arbitraire, lequel correspond aux deux sens possibles de la normale. Mais, cependant, nous avons pu supprimer le double signe, car nous pouvons également produire un changement de ce signe arbitraire en changeant l'ordre des coordonnées curvilignes.

39. Nous avons défini nos cosinus et notre élément de surface pour conserver l'analogie avec les notions correspondantes de géométrie ordinaire. Mais le fait est que nous aurons toujours à traiter chacun des premiers membres des formules (6) comme un tout, de telle sorte qu'on ne changera rien en multipliant tous les cosinus par un facteur commun, à condition de diviser dS en même temps par le même facteur. En particulier, nous nous servirons souvent d'une autre forme des quantités (6) : c'est celle qui correspond au cas où S est donné par l'équation $G(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$. Les cosinus de la normale sont alors proportionnels aux quantités $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, le facteur de proportionnalité étant la dérivée normale $\frac{dG}{dn}$. Désignons par dS_G la quantité

$$dS_G = dS : \left(\frac{dG}{dn}\right) :$$

les quantités (6) deviendront égales (au signe près) à

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} dS_G, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_m} dS_G.$$

Cet élément superficiel dS_G est tel que $dS_G \cdot dG$ représente l'élément (cylindrique) de volume entre l'élément dS de la surface $G = 0$ et un élément correspondant de la surface avoisinante $G = dG$ (où dG est une constante infinitésimale) : de sorte que l'on peut parler de cet élément dS_G comme du « quotient » $\frac{dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_m}{dG}$ de l'élément d'espace par dG.

40. Moyennant ces définitions et de cette terminologie, l'identité bien connue (« formule de Green ») entre intégrales multiples peut s'écrire, pour l'espace à m dimensions :

$$(g) \qquad \mathbf{SSS}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial \mathfrak{X}_m}{\partial x_m}\right) dT$$
$$= - \mathbf{SS}(\pi_1 \mathfrak{X}_1 + \pi_2 \mathfrak{X}_2 + \ldots\ldots + \pi_m \mathfrak{X}_m)\, dS,$$

(dT désignant l'élément d'espace $dx_1 dx_2 \ldots\ldots dx_m$).

Dans cette formule et dans les suivantes, nous représenterons, en sacrifiant l'exactitude à la clarté, par la triple sommation **SSS** ce que nous devrions désigner par m signes d'intégration, savoir une intégrale m^{uple} étendue à une certaine portion de notre espace; par un double **SS**, une intégrale $(m - 1)^{\text{uple}}$ étendue à une hypersurface de notre espace; par **S**, si besoin est, une intégrale $(m - 2)^{\text{uple}}$ relative à une arête : en d'autres termes, la notation sera la même que si l'on avait $m = 3$. Une intégrale relative à une arête se distinguera d'une intégrale prise le long d'une ligne par le fait que cette dernière s'écrira avec un signe $\int$ ordinaire.

Dans la formule (g), l'intégrale **SSS** est étendue à une certaine portion (limitée) T de l'espace à m dimensions, et l'intégrale du second membre à la surface S limite de T. On désigne par n le sens *interne* de la normale à S [les signes des formules (6) étant choisis en conséquence]. Comme on l'a vu précédemment, on peut remplacer respectivement $\cos(n, x_1)$, $\cos(n, x_2)$, ..., $\cos(n, x_m)$ par

$\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}$, à condition de remplacer en même temps dS par dS_G (avec l'hypothèse que G est croissant vers l'intérieur de T).

Appliquons ceci à l'identité (5) : avec les expressions (5') pour les $\mathfrak{T}$, le facteur de dS sous le signe **SS**, dans le second membre de (g), deviendra

$$v\sum_{i,k} A_{ik}\,\pi_i\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\sum_{i,k} A_{ik}\,\pi_i\frac{\partial v}{\partial x_k} + Luv$$

$$= v\sum \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial \pi_k} - u\sum\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial \pi_k} + Luv,$$

A étant la forme caractéristique définie ci-dessus, et les π désignant indifféremment les cosinus de la normale (interne) de S, ou les quantités proportionnelles

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m},$$

si, dans le second cas, on remplace dS par dS_G.

Nous introduirons ici, avec M. d'Adhémar [1], une direction particulière dépendant du plan tangent à S en un point quelconque M. Posons

$$(\nu)\qquad \frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_2}} = \ldots\ldots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_m}} = d\nu :$$

les dénominateurs (qui ne peuvent pas être nuls simultanément, puisque le discriminant de A est supposé différent de zéro) seront proportionnels aux cosinus directeurs d'une certaine direction que nous appellerons la *transversale* [2] à S en M. Une interprétation géométrique très

---

(1) *C. R. Ac. Sc.*, 11 février 1901.

(2) Nous adoptons cette locution (au lieu du mot « conormale », dont nous nous étions d'abord servis, en accord avec son promoteur), car elle se présente, avec la même signification et la même construction, dans des questions de Calcul des Variations étroitement liées à celles-ci.

simple a été donnée de cette définition par M. Coulon [1], qui la relie au cône caractéristique (n° **13**) en M, c'est-à-dire au cône qui a M pour sommet et $\mathbf{A}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = 0$ comme équation tangentielle. La transversale est alors le diamètre conjugué du plan tangent à S par rapport à ce cône caractéristique, deux directions étant généralement dites transversales l'une à l'autre si elles sont conjuguées par rapport à ce cône.

Cette interprétation de M. Coulon demande, notons-le, à être complétée : car il y a lieu de caractériser géométriquement, non seulement la direction, mais aussi la grandeur du segment élémentaire $d\nu$. C'est un point dont nous traiterons un peu plus loin (nos **60-61**).

Pour l'équation des potentiels $\Delta u = 0$, le cône caractéristique est le cône isotrope, de telle sorte que « transversale » est synonyme de normale.

On voit immédiatement que la direction transversale n'est dans le plan tangent que quand ce dernier est caractéristique [Il est du même côté du plan tangent que la normale correspondante, dans le cas et dans le seul cas où $\mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) > 0$].

Au moyen de cette nouvelle notion, on arrive à la forme finale de la *formule fondamentale :*

$$\text{(F)} \qquad \mathbf{SSS}\,[v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v)]\,d\mathrm{T} = -\,\mathbf{SS}\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + \mathrm{L}uv\right)d\mathrm{S},$$

L désignant la quantité

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{L} = \sum_i \pi_i\left(\mathrm{B}_i - \sum_k \frac{\partial \mathrm{A}_{ik}}{\partial x_k}\right).$$

De même, dans le cas de deux variables (n° **36**), l'intégrale *simple*

$$\mathbf{SS}\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + \mathrm{L}uv\right)d\mathrm{S}$$

(1) *Thèse*, Paris (1902), p. 34.

sera celle qui figure au second membre de (F_1), c'est-à-dire .

$$\int P\,dy - Q\,dx = \int \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$
$$- \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + uv\,(A dy - B dx),$$

ν étant tel que

$$\frac{dx}{d\nu} = -\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{d\nu} = \frac{dy}{ds};$$

une telle direction ν sera symétrique de la tangente à la ligne d'intégration par rapport à des parallèles aux axes (ce qui concorde avec notre construction générale de la transversale, puisque le conoïde caractéristique se réduit à deux droites, $x =$ const., $y =$ const.).

Remarque. — La formule de Green (g) suppose la continuité des fonctions qui y figurent et qui sont, en l'espèce, les quantités (5'). Celles-ci contenant (outre les coefficients de l'équation et leurs dérivées) les dérivées premières de u et de v, on voit que pour la validité de la formule (F), les fonctions u, v et leurs dérivées du premier ordre doivent être continues dans le domaine d'intégration. C'est la condition que nous avions déjà été conduits, à un autre point de vue, à exiger de nos solutions au n° **28**.

40 *bis*. *Adjointe invariantive.* — La forme que nous venons de donner au calcul suffit dans un grand nombre d'applications. Elle offre cependant le grave défaut de ne pas être invariante vis-à-vis d'une transformation ponctuelle effectuée sur les variables indépendantes. On peut, moyennant une légère complication, remédier à cet inconvénient.

Le seul élément non invariant introduit dans le calcul qui précède n'est autre que l'élément d'intégration $dx_1\, dx_2 \ldots\, dx_m$, lequel, comme on le sait, lorsqu'on introduit d'autres variables x' fonctions des premières, n'est pas égal à l'élément analogue $dx_1'\, dx_2' \ldots\, dx'_m$, mais en diffère par un facteur égal au jacobien de la transformation.

Dès lors, comme dans toutes les autres circonstances où l'on a en vue des calculs satisfaisant à la condition d'invariance, il convient de considérer comme « élément de volume », non plus la quantité précédente $dx_1 \; \dots \; dx_m$, mais le produit

$$\overline{dT} = \rho dx_1 \; dx_2 \; \dots \; dx_m$$

de cette quantité par le facteur

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$$

où Δ est le discriminant de la forme caractéristique : ce facteur ρ est, en effet, dans une transformation ponctuelle effectuée sur les x, multiplié par l'inverse du jacobien, de sorte que le produit $\overline{dT}$ reste invariant.

Nous sommes conduits à modifier les formules du n° **37** de manière à mettre en évidence ce nouvel élément de volume (ou élément de volume riemannien, par opposition avec l'ancien élément $dT = dx_1 \; dx_2 \; \dots \; dx_m$, qu'on peut appeler élément de volume « euclidien ») (1). Au contraire, la formule de Green (g) reste telle que nous l'avons écrite au numéro précédent, de sorte que le facteur ρ devra être joint au premier membre de l'équation (5) (n° **37**) : introduisant une nouvelle fonction arbitraire $\overline{v}$ et un nouveau polynôme différentiel $\overline{\mathcal{G}}(\overline{v})$, nous devrons déterminer ce dernier de manière que l'on ait (2)

$$(\overline{5}) \qquad \rho\left[\overline{v}\mathcal{F}(u) - u\overline{\mathcal{G}}(\overline{v})\right] = \frac{\partial \overline{\mathcal{X}}^1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \overline{\mathcal{X}}^m}{\partial x_m}.$$

Point n'est besoin, pour cela, de recommencer le calcul : il est clair qu'on passera de (5) à ($\overline{5}$) en liant l'inconnue $\overline{v}$ à v par la relation :

$$\rho\overline{v} = v$$

(1) Voir l'Appendice I à la fin du volume.

(2) L'emploi des indices supérieurs au second membre a lieu en conformité avec les principes du Calcul différentiel absolu. Ces principes exigeraient que la même notation soit appliquée aux variables x elles-mêmes : c'est ce que nous ferons lorsque nous reprendrons la question dans l'Appendice ci-dessus mentionné (Note précédente).

et, sous le bénéfice de cette relation, définissant $\overline{\mathcal{G}}(\bar{v})$ par la formule

$$\overline{\mathcal{G}}(\bar{v}) = \frac{1}{\rho}\,\mathcal{G}(v) = \frac{1}{\rho}\,\mathcal{G}(\rho\bar{v}),$$

soit, finalement :

$$(\overline{\mathcal{G}}) \qquad \overline{\mathcal{G}}(\bar{v}) = \frac{1}{\rho}\sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}(\rho A_{ik}\bar{v}) - \frac{1}{\rho}\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho B_i\bar{v}) + C\bar{v}.$$

La même transformation étant opérée dans les quantités $\mathfrak{T}_i$, celles-ci donneront :

$$(\overline{5'}) \qquad \overline{\mathfrak{T}}_i = \rho\bar{v}\sum A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\sum\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\bar{v}A_{ik}) + \rho B_i u\bar{v}\,.$$

et nous serons conduits à remplacer la formule (F) par

$$(\overline{F}) \qquad \mathbf{SSS}\left[\bar{v}\mathcal{F}(u) - u\overline{\mathcal{G}}(\bar{v})\right]\rho\,dx_1dx_2\ldots dx_m = \mathbf{SS}\,\rho dS\left(\bar{v}\,\frac{du}{d\nu} - u\,\frac{d\bar{v}}{d\nu} + \overline{L}u\bar{v}\right),$$

$\overline{L}$ ayant la valeur

$$\overline{L} = \sum \pi_i\left(B_i - \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}\right) - \frac{d\log\rho}{d\nu}.$$

Remarque. — Les quantités $\pi_i dS$ qui figurent dans les calculs précédents ou, plutôt encore, leurs produits par le facteur ρ, possèdent, du moins dans leur ensemble, le caractère invariantif qui s'impose au point de vue où nous nous plaçons dans le présent numéro. Elles se présentent comme les composantes d'une certaine quantité vectorielle, laquelle n'est pas toutefois de même espèce que les vecteurs au sens le plus classique du mot, mais bien d'espèce corrélative. Nous renvoyons, sur ce point, à notre Appendice I.

41. La formule (F) est, nous l'avons dit, la base de toute recherche concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, et en particulier des recherches citées précédemment [1]. Nous désignerons généralement par u la fonction inconnue du problème; v est une fonction auxiliaire arbitraire, et c'est précisément dans le choix de cette dernière qu'apparaît l'habileté du calculateur. On la choisit généralement de manière à satisfaire à l'équation adjointe [2] :

$$\mathcal{G}(v) = 0.$$

Dans la théorie ordinaire du potentiel, v est simplement le potentiel élémentaire :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

si $m = 3$, — ou $\log \frac{1}{r}$ si $m = 2$, — ou aussi une des quantités (*fonctions de Green*) déduites du potentiel élémentaire par addition de certains termes qui restent réguliers pour $r = 0$. Ce potentiel élémentaire — dont l'introduction est commandée par les raisons mathématiques et même physiques les plus évidentes — doit le rôle qu'il joue dans la théorie (ce qu'on voit immédiatement à l'inspection des formules) uniquement à sa singularité pour $r = 0$, pour laquelle il devient infini. On notera immédiatement que cette singularité se présente non seulement pour un seul point réel ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$), mais aussi sur toute une surface imaginaire, savoir le cône isotrope ayant (x_0, y_0, z_0) comme sommet, et qui coïncide (en accord avec un théorème général que nous établirons bientôt) avec le cône caractéristique correspondant défini précédemment.

---

(1) Kirchhoff ne forme pas directement l'intégrale quadruple portant sur le premier membre de (5) dans le problème des ondes sphériques; mais il effectue successivement une intégration triple et une intégration simple, ce qui est équivalent.

(2) On rappelle la convention faite au n° 37 (note 2).

42. ***Méthode de Riemann.*** — Si on envisage maintenant la méthode de Riemann pour l'intégration des équations hyperboliques à deux variables

$$(\varepsilon) \qquad \mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = f,$$

il semble, au premier abord, que la quantité introduite par Riemann dans la formule fondamentale soit d'un tout autre caractère que le potentiel élémentaire. Le moment est venu de résumer brièvement cette méthode, au sujet de laquelle le lecteur peut se reporter aux *Leçons* déjà citées de Darboux [1].

Soient les données de Cauchy portées par un arc de courbe plane S, que nous supposerons couper une caractéristique quelconque (c'est-à-dire une parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y) en un seul point. Pour déterminer la valeur de l'inconnue u en un point donné $a(x_0, y_0)$, Riemann applique la formule fondamentale

$$(F_1) \qquad \iint [v\,\mathcal{F}(u) - u\,\mathcal{G}(v)]\, dx\, dy = \int P\, dy - Q\, dx$$

à l'intérieur d'un domaine triangulaire T (fig. 6 ou 6 *bis*, p. 94) délimité par un arc $\alpha\beta$ de S et les segments $a\alpha$, $a\beta$ des deux caractéristiques menées par a (qui coupent S en α et β), $a\alpha$ étant parallèle à l'axe des x. On désigne par u la fonction inconnue.

On prend alors, avec Riemann, pour v, une quantité [2] — qui est une fonction de x, y, mais dépend aussi de la position de a, de sorte qu'on doit l'écrire $\mathcal{V}(x, y; x_0, y_0)$ — satisfaisant (en x, y, pour x_0, y_0 constants) à l'équation

---

(1) T. II, Livre IV, nos **357-359**, p. 71-81 de la 2me édition. Voir aussi nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. IV, p. 153 à 166; Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, chap. XXVI, p. 146 à 152 de la 2me édition; Picard, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles;* 17e Leçon, p. 147 et suivantes; notre *Cours d'Analyse*, t. II, nos 346-348, p. 472-478.

(2) Quant à l'existence de cette quantité, voir Darboux (*loc. cit.*, nos **364, 365**, p. 96 à 196) et ci-dessous, nos **51** et suivants.

adjointe [1] $\mathcal{G}(v) = 0$, et définie, de plus, par les conditions supplémentaires :

$$\mathcal{V} = e^{\int_{y_0}^{y} A\,dy}, \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

$$\mathcal{V} = e^{\int_{x_0}^{x} B\,dx}, \quad \text{pour} \quad y = y_0,$$

(ce qui donne, en particulier, $\mathcal{V} = 1$ pour $x = x_0$, $y = y_0$); on voit immédiatement que les deux intégrales $\int P\,dy - Q\,dx$

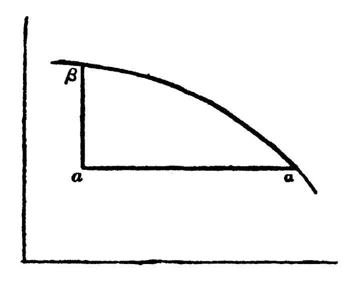


FIG. 6.

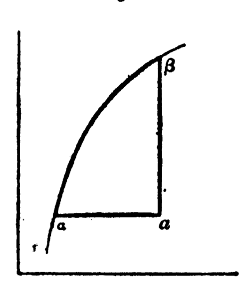


FIG. 6 *bis*.

le long des deux segments rectilignes $a\alpha$, $a\beta$, savoir [si, sur S, y est une fonction décroissante [2] de x] :

$$-\int_{x_0}^{x_1} Q(x, y_0)\,dx = -\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right) + Bu\mathcal{V}\right]dx,$$

$$\int_{y_2}^{y_0} P(x_0, y)\,dy = \int_{y_2}^{y_0}\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right) + Au\mathcal{V}\right]dy$$

(où x_1, y_0 sont les coordonnées de α, et x_0, y_2 les coordon-

(1) V. la note du n° 41.

(2) Quand y est, sur S, une fonction décroissante de x (fig. 6), les deux segments $a\alpha$, $a\beta$ sont ou tous deux parallèles aux directions positives, ou tous deux aux directions négatives des axes, et $\alpha\beta$ est le sens *direct* sur le contour de T, comme il est supposé dans la formule (F_1); si, au contraire, x et y croissent simultanément sur S (fig. 6 *bis*), le sens est le sens rétrograde, et on doit changer le signe d'un des membres de (F_1). On peut donner une formule unique convenant à tous les cas en se servant de la notation de Méray pour les intégrales multiples.

nées de β) se réduisent respectivement à $\frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\alpha - \frac{1}{2}u_a$ et $\frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\beta - \frac{1}{2}u_a$, de telle sorte que, $\mathcal{G}(\mathcal{V})$ devenant nul et $\mathcal{F}(u)$ étant égal à f, on trouve :

$$u_a = \frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\alpha + \frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\beta + \int_{\alpha\beta}(\mathrm{P}dy - \mathrm{Q}dx) - \iint \mathcal{V} f dx\, dy.$$

Ainsi qu'il est nécessaire, ceci donne la valeur de u en fonction de quantités qui sont supposées connues, savoir les données de Cauchy sur S : en particulier, ν est la direction transversale, située comme il est dit au n° **40**.

Si la courbe était ascendante (c'est-à-dire y croissant avec x), il faudrait changer le signe de l'intégrale double (1).

La fonction $\mathcal{V}$ de Riemann est, comme on le voit, de même que le potentiel élémentaire, une fonction des coordonnées de deux points. La propriété de symétrie se généralise également au cas présent par la *propriété d'échange* (2) suivante : *la quantité* $\mathcal{V}$ *ne change pas quand on échange simultanément* x, y *avec* x_0, y_0 *et le polynôme* $\mathcal{F}$ *avec son adjoint* $\mathcal{G}$ [ceci donne une symétrie en (x, y) et (x_0, y_0), si $\mathcal{F}$ est identique à son adjoint, comme c'est le cas pour Δu].

Mais il apparaît immédiatement que la quantité $\mathcal{V}$ ainsi introduite dans les calculs n'a, *a priori*, pas de singularité en a : en fait, c'est une fonction holomorphe, ou en tout cas parfaitement *régulière*, des variables dont elles dépend, quand les coefficients de l'équation le sont eux-mêmes (3). Par exemple, pour l'équation $\frac{\partial^2 u}{dxdy} + \lambda u = 0$ (λ constant) (V. plus loin n° **69** et Livre IV), $\mathcal{V}$ est égal à $J_0[\sqrt{\lambda(x - x_0)(y - y_0)}]$, où J_0 est la transcendante entière classique de Bessel.

Cependant, on verra bientôt que la fonction de Riemann dérive très directement de notre solution élémentaire.

---

(1) V. la note précédente (p. 94).

(2) Darboux, *loc. cit.*, n° 359, p. 81; Goursat, *loc. cit.*

(3) La discontinuité se présente néanmoins par le fait que l'intégration est étendue au domaine limité par les deux caractéristiques issues de (x_0, y_0); ce qui revient au même que de faire v égal à o en dehors de ce domaine et, par conséquent, discontinu le long des limites du domaine.

43. Le cas est encore différent pour les expressions introduites par Kirchhoff et M. Volterra. Le premier d'entre eux emploie l'expression

$$\frac{1}{r} \mathrm{F}\ (r - \omega t) \tag{8}$$

où on a toujours $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, et où F est une fonction *arbitraire* quelconque d'une variable. Une telle quantité est singulière pour $r = 0$, savoir $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$: ce qui signifie, en langage ordinaire (pour l'espace habituel), correspond à un point unique, mais qui, dans notre conception actuelle de l' « univers », comprend toute une ligne, étant donné que t peut prendre toutes les valeurs possibles.

De même, la quantité employée par M. Volterra (du moins pour le problème que nous traitons ici) est :

$$\mathrm{v} = \log \frac{(t - t_0) + \sqrt{(t - t_0)^2 - r^2}}{r}, \tag{8'}$$

qui a deux espèces de singularités dans le domaine réel : 1° la surface $(t - t_0)^2 - r^2 = 0$, c'est-à-dire le cône caractéristique de sommet (x_0, y_0, t_0), ce qui est absolument analogue au cas du potentiel élémentaire; 2° la ligne $r = 0$ (c'est-à-dire $x = x_0$, $y = y_0$, t arbitraire).

En conséquence de la présence de cette dernière singularité, ni la méthode de Kirchhoff, ni celle de M. Volterra ne donnent directement la valeur de l'inconnue u au point choisi, mais seulement l'intégrale de u le long d'un certain segment de ligne (1) $r = 0$: on en déduit ensuite aisément la valeur de u lui-même (par exemple en différentiant, comme dans le Mémoire de M. Volterra).

(1) Naturellement, dans notre espace à trois dimensions [pour (e_2)], ou à quatre dimensions [pour (e_3)], le point $r = 0$ décrit une ligne droite, en raison de la variabilité de t. Quand on applique la formule fondamentale, cette ligne entière (et non pas simplement un seul point) doit être séparée du champ d'intégration par un cylindre (ou un hypercylindre) dont elle est l'axe. L'intégrale simple mentionnée dans le texte provient des intégrales $\iint$ étendues à la surface de ce cylindre, lorsqu'on en fait tendre le rayon vers zéro.

Il en est de même pour la généralisation que M. Tedone (1) a donnée de ces résultats à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{m-1}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_m} = 0,$$

laquelle se comporte tout à fait de la même manière que les équations précédentes (e_1) et (e_3) ou que l'équation (e_2), suivant que m est pair ou impair. M. Tedone, lui non plus, n'arrive pas directement à la valeur de u, mais à une intégrale telle que

$$\int_{t_1}^{t_0} (t_0 - t)^{m-3}\, u(t)\, dt$$

(t désignant la variable x_m) qu'il faut différentier $(m - 2)$ fois par rapport à t_0.

44. Le caractère indirect de cette méthode ne serait qu'un inconvénient secondaire, mais il en implique un autre beaucoup plus sérieux, qui est que l'origine — au moins l'origine analytique — des expressions (8) et (8′) n'apparaît pas. La fonction de Kirchhoff est suggérée par des considérations physiques; mais celle de M. Volterra doit être formée *a priori;* et ceci a été précisément l'une des plus grandes difficultés surmontées par le grand géomètre italien.

Cette difficulté se présentera à un bien plus haut degré si on essaye de généraliser les méthodes précédentes de manière à pouvoir les appliquer à d'autres équations que (e_2) et (e_3). On n'aura plus ici de guide, ou du moins de guide sûr, pour la construction des expressions correspondant à (8) et (8′).

Tel fut précisément le cas pour les deux géomètres, MM. Coulon et d'Adhémar, qui ont entrepris d'étendre la méthode à des équations telles que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{K}u = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{K}u = 0,$$

(1) *Annali di Matematica,* 3e série, t. I (1898), p. 1.

(équations des ondes sphériques ou cylindriques amorties) ou à des équations à coefficients variables. Les formules qu'ils ont obtenues n'étaient aucunement les équivalents de celles de Kirchhoff ou de Volterra; pour obtenir la valeur désirée de u, ils avaient à faire non pas des différentiations simples, mais des résolutions d'équations intégrales plus ou moins compliquées, exigeant tout un nouveau calcul d'approximations successives. La raison en est évidemment que les quantités auxiliaires qu'ils ont introduites n'étaient pas exactement les analogues de (8) et (8') (ces analogues existent, mais ne peuvent pas être découvertes sans un fil conducteur approprié, ainsi qu'il découlera de nos considérations ultérieures).

45. On verra mieux encore pourquoi ces méthodes de Kirchhoff et de Volterra ne sont pas susceptibles de généralisation directe, si on examine dans quelle mesure la ligne singulière précitée $r = o$ est liée à l'équation elle-même. Les deux auteurs auraient évidemment vu que cette connexion était lointaine, si, à l'époque où ils ont composé leurs travaux, la Science avait été en possession de nos idées actuelles sur la Relativité. On sait maintenant qu'il n'y a pas de sens défini (ou, si on préfère, qu'il y a une infinité de sens) à parler d'un point fixe de l'espace considéré à des instants successifs, qu'il existe (comme on le savait même auparavant) une infinité de transformations linéaires en x, y, z, t (ou x, y, t) — formant le « groupe de Lorentz » — qui laissent notre équation aux dérivées partielles invariante, et que de telles transformations ne changent pas le cône caractéristique, mais peuvent transformer la droite $r = o$ en n'importe quelle autre droite menée par le sommet et à l'intérieur du cône caractéristique. Il est donc clair que cette ligne $r = o$ n'a aucun rôle spécial à jouer dans nos calculs.

Dans la suite, on verra que *tous les résultats de la théorie peuvent et doivent se déduire de la seule solution élémentaire.*

CHAPITRE III

LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE

I. — Remarques générales.

46. Il nous faut, naturellement, définir maintenant ce qu'est la solution élémentaire, et la construire. La première extension du potentiel élémentaire à d'autres équations que celles de Laplace est due à M. Picard (¹). Il considère l'équation à deux variables indépendantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Cu = o,$$

C étant une fonction donnée de x et de y, et démontre que, en désignant par (x_0, y_0) un point donné quelconque, qu'on peut appeler le *pôle*, et par r la quantité $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, cette équation admet une solution de la forme

$$\mathcal{U} \log \frac{1}{r} + w, \tag{9}$$

$\mathcal{U}$ et w étant des fonctions convenablement choisies de x, y (ainsi que de x_0, y_0) qui sont régulières dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$. Naturellement, w est, dans une certaine mesure, arbitraire, car on peut lui ajouter n'importe quelle solution régulière de l'équation donnée.

---

(1) *Comptes Rendus Ac. Sc.*, 6 avril 1891 et 5 juin 1900. Un résultat équivalent a été obtenu par M. Sommerfeld, *Encycl. der Math. Wiss.*, II, 7 c, 1900.

Ce résultat fut étendu un peu plus tard, par MM. Hilbert et Hedrick ([1]) et par nous-même ([2]) indépendamment, à l'équation plus générale :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0. \tag{10}$$

La méthode employée dans ce cas suppose cependant que les coefficients A, B, C, fonctions de x, y, sont analytiques, ce qui n'était pas nécessaire dans la démonstration de M. Picard.

Elle nous conduit à répondre à une question qui s'était présentée auparavant, savoir la relation entre la fonction de Riemann et la solution élémentaire.

Il est évident que, si nous restons dans le cas analytique, il n'existe pas de différence essentielle entre l'équation (10) et l'équation hyperbolique de Laplace

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0 \tag{ε}$$

(A, B, C, étant encore des fonctions de x et de y), que l'on déduit évidemment de la première par le changement de $x + iy$, $x - iy$ en x, y. Comme ceci change $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ en $(x - x_0)(y - y_0)$, on doit trouver, pour (ε), une solution de la forme

$$\mathcal{U} \log [(x - x_0)(y - y_0)] + w.$$

Il suffit, pour cela, qu'en substituant le premier terme dans (ε), le résultat soit une fonction régulière

$$\mathcal{F}[\mathcal{U} \log (x - x_0)(y - y_0)] = \mathcal{M},$$

car, s'il en est ainsi, on aura seulement à prendre, pour w, une solution régulière quelconque de l'équation

$$\mathcal{F}(w) = -\mathcal{M}.$$

---

(1) Hilbert, *Leçons de Göttingue*, 1901 (inédit); Hedrick. *Uber den analytischen Character der Lösungen von Differentialgleichungen* (Diss., Göttingue, 1901).

(2) *Deuxième Congrès international des Mathématiciens*, Paris, 1901; *Notice scientifique*, Paris, Hermann, 1901.

Or, on a :

$$\mathcal{F}\left\{\mathfrak{U}\log\left[(x-x_0)(y-y_0)\right]\right\} = \mathcal{F}(\mathfrak{U})\log\left[(x-x_0)(y-y_0)\right]$$
$$+\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}+\mathrm{A}\mathfrak{U}\right)+\frac{1}{y-y_0}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\mathrm{B}\mathfrak{U}\right).$$

Ceci sera une fonction régulière de x, y, au voisinage de chacune des lignes $x = x_0$, $y = y_0$, si (1) :

1° Le terme logarithmique s'annule, de telle sorte que $\mathfrak{U}$ lui-même est solution de (ε);

2° Les numérateurs des deux fractions s'annulent en même temps que les dénominateurs, de sorte que :

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}+\mathrm{A}\mathfrak{U}=0 \qquad (\text{pour } x = x_0)$$
$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\mathrm{B}\mathfrak{U}=0 \qquad (\text{pour } y = y_0)$$

Mais ces conditions (jointes à $\mathfrak{U} = 1$ pour $x = x_0$, $y = y_0$) sont précisément celles qui déterminent la fonction de Riemann dont nous avons déjà parlé (sauf que nous avons écrit $\mathcal{F}$ au lieu (2) de son polynôme adjoint $\mathcal{G}$).

Ainsi on voit que *la fonction de Riemann coïncide avec le coefficient du terme logarithmique dans la solution élémentaire de l'équation*, de telle sorte que, quoique régulier, il est en relation directe avec la quantité logarithmique (9), ce qui est un cas particulier de relations générales auxquelles conduira notre analyse ultérieure.

47. Des extensions de la solution élémentaire à $m > 2$ ont été successivement données dans un mémoire fondamental de Fredholm (3) pour les équations d'ordre

(1) Il est évident que ces conditions ne sont pas seulement suffisantes, mais nécessaires : voir nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. VII, n° 344.

(2) Une telle permutation est équivalente à celle de x, y avec x_0, y_0, à cause de la propriété d'échange (V. plus haut, n° 44).

(3) *Acta Mathematica*, t. XXIII; 1900, p. 1-42. Les recherches de Fredholm ont été, plus récemment, étendues par MM. Zeilon (*Arkiv för*

quelconque analogues à (e_2) et par M. Holmgren [1]. Toutefois même dans les travaux de ce dernier, l'extension n'est pas complète, car il suppose que le coefficient des termes du second ordre sont constants, ce qui peut s'obtenir par une transformation ponctuelle si $m = 2$, mais ne le peut pas [2] en général pour $m > 2$.

Nous allons construire la solution élémentaire pour l'équation linéaire du second ordre (analytique et non-parabolique) la plus générale.

48. ***Le conoïde caractéristique.*** — Comme on l'a déjà vu par le cas du potentiel élémentaire, la solution élémentaire doit être singulière non seulement en un point — le pôle — mais aussi le long d'une certaine surface (réelle ou imaginaire).

On voit ce que doit être cette surface grâce à un théorème important de MM. Le Roux et Delassus [3], savoir, *toute surface singulière d'une solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles* [4] (les coefficients étant réguliers) *doit être caractéristique.* Une surface singulière doit par conséquent satisfaire à l'équation différentielle du premier ordre

$$(\mathrm{A}) \quad \mathrm{A}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}; x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m\right) = 0,$$

Mat., Astr. och Phys., t. VI, 1911; *Acta Soc. Scient. Upsaliensis*, (4) V. n°s 3-4, 1919-1921) et Herglotz (*Leipz. Ber.*, t. LXXVIII, 1926, p. 43-73 et 287-318).

(1) *Arkiv för Mathematik, Astr. och Phys.*, t. I, 1904, p. 209.

(2) La possibilité d'une telle réduction dépend, comme on le verra, de la possibilité d'une représentation conforme d'un certain élément linéaire sur le ds^2 euclidien, de sorte que les conditions en sont données par les recherches de M. Cotton (*Thèse*, Paris, 1899, chap. II, n°s 15-17).

(3) Le Roux, *Thèse*, Paris, 1895; Delassus, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. XIII (1896), p. 35.

(4) Une hypothèse est faite sur la nature de la singularité, savoir que la partie principale de la solution u est $UF(G)$, U étant régulier, et F tel que $\frac{F''(G)}{F'(G)}$ et $\frac{F'(G)}{F(G)}$ sont infinis pour $G = 0$, condition qui est vérifiée dans tous les cas usuels, en particulier pour $F(G) = G^p$ et $F(G) = \log G$ (seuls cas dont nous aurons à faire usage). M. Le Roux [*Journal de Math.*, (5), IV, 1898, p. 402], donne une autre démonstration, indépendante de l'hypothèse précédente.

précédemment écrite. Parmi les solutions de cette équation, celle qui a été spécialement considérée par Darboux [1] aura le principal rôle dans nos considérations présentes : c'est celle qui a un point donné

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

comme point conique (son cône tangent étant le cône caractéristique défini ci-dessus) et que nous appellerons le *conoïde caractéristique*. Elle coïncide avec le cône caractéristique quand les coefficients de l'équation (ou au moins les coefficients des termes du second ordre) sont constants; dans le cas général, c'est une sorte de cône à génératrices courbes, dont la construction, bien connue depuis le Mémoire de Darboux, sera rappelée ci-dessous, et même sous une forme quelque peu plus précise, puisqu'on écrira son équation.

II. — Solutions à singularité algébrique.

49. Examinons d'abord le cas d'une surface sans point singulier (le résultat de cet examen peut aussi s'appliquer au conoïde caractéristique en dehors du voisinage de son sommet). Nous allons démontrer non seulement le théorème de Delassus sous les conditions qui nous concernent, mais aussi sa réciproque qui est particulièrement importante pour nous, en construisant, pour notre équation, une solution de la forme

$$u = \mathrm{U}\mathrm{G}^p + w, \tag{11}$$

où $\mathrm{G} = 0$ est l'équation d'une telle surface régulière donnée, p un exposant constant donné, U et w des fonctions régulières. Comme au n° **46**, on a seulement à vérifier que le résultat de substitution du premier terme de (11) dans le premier membre de l'équation est régulier.

---

(1) *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n° 2, p. 34 (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XXVII, 1880).

Partons de l'équation (E) que l'on prend homogène (soit $f = 0$), savoir :

$$\text{(E)} \qquad \mathcal{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0.$$

Remplaçons u par $U \,.\, F(G)$. En écrivant π_i pour $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = U \cdot \pi_i \; F'(G) + \frac{\partial U}{\partial x_i} F(G),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = U\pi_i\pi_k F''(G) + \left(\pi_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + \pi_k \frac{\partial U}{\partial x_i} + U \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k}\right) F'(G)$$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} F(G).$$

On doit multiplier la première ligne (pour chaque indice i) par B_i, la deuxième (pour chaque couple d'indices i, k) par A_{ik}, et additionner [1] à CUF. Dans cette combinaison, on voit que :

1° Le coefficient de $UF''(G)$ est $\mathbf{A}(\pi_1, \ldots, \pi_m)$;

2° Dans le coefficient de $F'(G)$, les termes en $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ sont [1] :

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \sum 2A_{ik} \, \pi_k,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i}.$$

Par conséquent, on a

$$U F''(G) \mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots, \pi_m) + F'(G) \left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} + MU \right)$$
$$+ F(G) \mathcal{F}(U) = 0,$$

où M représente

$$\text{(12)} \qquad M = \mathcal{F}(G) - CG.$$

(1) Dans une telle addition, les indices i et k peuvent être échangés, à cause de $A_{ik} = A_{ki}$.

En particulier, pour $F(G) = G^p$, on obtient :

$$(13)\quad p(p-1)\, G^{p-2}\, U \cdot A(\pi_1, \ldots, \pi_m) + p\, G^{p-1}\left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} + MU\right) + G^p \mathcal{F}(U).$$

Si les cas de $p = 0$ et $p = 1$ sont exclus, le premier terme est évidemment d'un ordre de grandeur supérieur aux suivants et la somme ne peut pas être identiquement nulle ou même être une fonction régulière tant que le coefficient $A(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ n'est pas nul, c'est-à-dire tant que $G = 0$ n'est pas une caractéristique. L'équation

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}\right) = 0$$

doit être ou une identité, ou tout au moins une conséquence de $G = 0$, de sorte qu'on a, en tout cas,

$$(13\ bis)\qquad A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}\right) = A_1 \cdot G$$

A_1 étant régulier même pour $G = 0$. Le théorème de M. Delassus est ainsi démontré. Supposons maintenant cette condition vérifiée, de sorte que G^{p-2} disparaît de la formule (13). Exprimons que le terme en G^{p-1} s'annule aussi : il faut écrire que, sur la surface $G = 0$,

$$(14)\qquad \sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} + [M + (p-1)\, A_1]\, U = 0.$$

Ceci est une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre en U, dont l'intégration conduit à l'introduction des courbes définies par les équations différentielles ordinaires

$$(L_1)\qquad \frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_2}} = \cdots\cdots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_m}} = ds.$$

Au dénominateur, on trouve les cosinus directeurs de la transversale à $G = 0$; mais, dans le cas présent, cette courbe est tangente à la surface [cette dernière étant une

caractéristique : la transversale est la direction de la génératrice de contact entre le plan $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ et le cône caractéristique], de sorte qu'une courbe satisfaisant à (L_1) et issue d'un point de $G = o$ *est entièrement située sur cette surface.* Ces courbes sont en fait *les caractéristiques* de l'équation (**A**), telles qu'elles sont définies dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On les appellera les *bicaractéristiques* [1].

Si $\mathbf{A}_1 = o$, c'est-à-dire si la fonction G vérifie identiquement $\mathbf{A} = o$, et même sans cette restriction, la théorie connue des équations aux dérivées partielles du premier ordre [2] montre qu'en plus de (L_1), ces courbes satisfont aussi à :

$$(L_2) \qquad ds = \frac{d\pi_1}{-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_1}} = \frac{d\pi_2}{-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_2}} = \cdots\cdots = \frac{d\pi_m}{-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_m}},$$

de sorte qu'on peut les déterminer *a priori* (c'est-à-dire sans connaître l'équation $G = o$) par l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires (L_1) et (L_2).

Il est déjà apparu que des bicaractéristiques se sont déjà présentées dans nos calculs précédents. Telles sont, en effet, les courbes qu'on a considérées, au n° **12**, Livre I, comme définies, sur $x_1 = o$, par l'équation différentielle (l), dans le but de déterminer les $u_1, u_2, \ldots,$ successifs : $x_3 = o$ étant tangent au cône caractéristique en chacun de ses points, la génératrice de contact a ses cosinus directeurs proportionnels à A_{31}, A_{32}.

50. La considération de ces courbes, et le fait qu'elles sont conservées dans toute transformation ponctuelle (ce qui ressort évidemment de leur signification analytique ou géométrique) vont d'abord nous servir à simplifier l'équation. La surface caractéristique donnée étant supposée être

---

(1) Pour leur signification physique comme rayons sonores ou lumineux, voir nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. VII, n^{os} **309**, **319** et **351**.

(2) V. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n° **87**.

régulière, on peut changer de variables de manière que son équation soit $x_m = 0$, et cela, de façon à ce que chaque surface $x_m =$ constante soit une caractéristique : ce qui s'exprimera par A_{mm} identiquement nul.

On supposera, en second lieu, que l'arête [1] d'intersection entre $x_m = 0$ et $x_{m-1} = 0$ n'est nulle part tangente à une direction bicaractéristique; en conséquence de quoi on peut prendre les nouvelles variables de telle sorte que les bicaractéristiques situées sur $x_m =$ const. soient $x_1 =$ const., $x_2 =$ const., ..., $x_{m-2} =$ const., ce qui s'exprimera par :

$$A_{im} = 0 \qquad (i \neq m-1)$$

On peut diviser par [2] $A_{m,m-1}$, et aussi annuler B_m en changeant u en $ue^{\int B_m dx_{m-1}}$. En remplaçant les lettres x_m et x_{m-1} respectivement par x et y, on voit qu'on peut écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \mathcal{F}_1(u) = 0 \tag{15}$$

où le nouveau polynôme $\mathcal{F}_1(u)$ ne contient aucune dérivation par rapport à x.

51. $p = 0$. *Résultat de Beudon.* Nous avions antérieurement exclu les cas de $p = 0$ et $p = 1$. Ils correspondent à u non singulier, et ramènent aux considérations du premier Livre [3]. Mais en nous plaçant dans le cas d'une surface caractéristique, ils nous intéresseront pour cette raison même, comme conduisant à la réponse à la question posée au n° **12**; savoir le mode d'indétermination du problème de Cauchy dans ce cas.

---

(1) V. note (1) p. 6.

(2) $A_{m,m-1}$ doit être différent de zéro, sinon $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{m-1} = 0$ annulerait toutes les dérivées de $A(\gamma_1, ..., \gamma_m)$, hypothèse exclue puisque nous ne sommes pas dans le cas parabolique.

(3) Le cas de p entier et > 1 peut être considéré comme inclus aussi bien dans nos considérations passées que présentes : $p = 2$, par exemple (avec $U_1 = 0$, de sorte que $u = Ux^2$) correspondrait à un problème de Cauchy, avec $u_0 = u_1 = 0$, auquel cas, nous savons déjà qu'on ne peut obtenir de solution différente de zéro si $x = 0$ n'est pas une caractéristique.

Cette question est résolue par le résultat suivant :

Dans le cas actuel de $x = 0$ caractéristique [1], *on peut déterminer une solution de l'équation différentielle si on connaît sa valeur*

$$u(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0, y) = u_0(x_1, \ldots, x_{m-2}, y);$$
$$u(x_1, \ldots, x_{m-2}, x, 0) = \mathbf{u}(x_1, \ldots, x_{m-2}, x);$$

sur chacune des surfaces $x = 0$, $y = 0$ [2], *lesquelles valeurs peuvent être choisies arbitrairement à la condition qu'elles n'impliquent aucune contradiction le long de la ligne d'intersection, savoir :*

$$(16) \qquad u_0(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0) = \mathbf{u}(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0), \quad \text{soit } \mathbf{u}_0(x_1, \ldots, x_{m-2}).$$

Ce théorème a, comme cas particulier, la démonstration de l'existence de la fonction de Riemann (n° **40**). Il a été énoncé pour la première fois, dans ce but, par Darboux pour $m = 2$, de sorte que $x = 0$, $y = 0$ étaient deux lignes, les données étant analytiques, et en supposant que ces *deux* lignes étaient des caractéristiques. Il a été étendu par M. Goursat [3] aux équations non linéaires, en supposant seulement que les tangentes initiales à leurs points d'intersection avaient des directions caractéristiques.

Beudon (*loc. cit.*) [4] a généralisé le résultat de Darboux et de M. Goursat pour $m > 2$, et, à la suite de M. Goursat, s'en est servi pour démontrer l'indétermination du problème de Cauchy pour une caractéristique.

Mais, ainsi que M. Picard [5] (admettant même des données non analytiques) et ensuite M. Goursat [5] (avec extension aux équations non linéaires) l'ont montré pour le cas

(1) Il est même suffisant de supposer que $x_m = 0$ est tangent à une caractéristique en chaque point commun avec $x_{m-1} = 0$.

(2) L'hypothèse que la ligne d'intersection n'est nulle part tangente à une bicaractéristique est impliquée ici de nouveau.

(3) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 91-94, Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (V. note 3).

(4) V. note 2, p. 24.

(5) Picard, *in* Darboux, *Leçons*, t. IV, p. 355-359 (note I). Goursat, *Equations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 303-308.

de $m = 2$, l'hypothèse que $y = 0$ est caractéristique n'est pas nécessaire. Démontrons le théorème de Beudon avec cette généralisation.

Supposons, pour l'instant du moins, toutes les données analytiques, de sorte que les coefficients dans $\mathcal{F}_1$ seront des fonctions holomorphes des variables indépendantes [1], et substituons de nouveau à u un développement ordonné suivant les puissances de x :

$$u = u_0 + u_1 x + \dots + u_h x^h + \dots \tag{17}$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x, on obtient les conditions successives

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mathcal{F}_1\,(u_0), \\ &2\,\frac{\partial u_2}{\partial y} = \mathcal{F}_1\,(u_1) + \dots\dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &h\,\frac{\partial u_h}{\partial y} = \mathcal{F}_1\,(u_{h-1}) + \dots\dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right. \tag{18}$$

dont, réciproquement, le système est équivalent à (15).

La première d'entre elles nous donnera $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ [le second membre ne contenant d'autre terme de (17) que u_0]; la seconde nous donnera $\frac{\partial u_2}{\partial y}$, etc..., le second membre de l'équation en $\frac{\partial u_h}{\partial y}$ ne dépendant que de u_0 [2], u_1, ..., u_{h-1} et des coefficients de $\mathcal{F}_1$. Nous voyons ainsi :

1° que u_0 reste arbitraire;

---

(1) x apparaît, en général, explicitement parmi les coefficients de $\mathcal{F}_1$: les termes dus à cette circonstance sont ceux que nous avons remplacés par des points, dans le second membre de l'équation (18) (dans le premier terme, au contraire, on doit faire $x = 0$).

(2) Il résulte de la note précédente que les $u_{h'}$ d'indice h' inférieurs à $h - 1$ apparaissent aussi dans $\frac{\partial u_h}{\partial y}$.

2° que nous pouvons aussi choisir arbitrairement les valeurs de chacun des u_h suivants pour $y = 0$; après quoi, nous aurons (si $\mathbf{u}_h$ est la valeur de u_h pour $y = 0$) :

$$u_h = \mathbf{u}_h + \int_0^y \mathscr{F}_1\,(u_{h-1})\,dy. \tag{19}$$

Ce dernier fait équivaut à dire qu'on *peut prendre arbitrairement la valeur du développement* (15) *pour* $y = 0$, savoir la fonction

$$\mathbf{u}\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{m-2}, x) = \sum_h \mathbf{u}_h\, x^h \tag{20}$$

au premier terme $\mathbf{u}_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})$ près, lequel doit être égal à la valeur de u_0 pour $y = 0$.

51 *bis*. Remarques. — Cette dernière condition n'est autre que la condition (16).

La condition en $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ est la condition de possibilité pour le problème de Cauchy — condition (7) — écrite au n° **12**, Livre I. On voit que, quand elle est remplie, le développement (17) reste indéterminé, ses éléments arbitraires étant les coefficients $\mathbf{u}_h$ successifs du développement (20).

De même, les autres équations (18), ou les équations équivalentes (19), représentent les relations formées au n° **12** [relation (7') et ses analogues].

Ces relations, ou du moins les premières d'entre elles, peuvent être écrites même si les données et la solution sont simplement supposées régulières et développables par la formule de Maclaurin jusqu'à un certain ordre.

Les u_h étant déterminés pour toute valeur de y dès qu'on en connaît la valeur pour $y = 0$, *deux solutions qui coïncident tout le long d'une surface caractéristique et qui ont un contact d'ordre déterminé quelconque* $p \geqslant 1$ *en un point de cette surface, sont tangentes au même ordre tout le long de la bicaractéristique issue de ce point*. Pour $p = 1$ et dans l'espace-temps à quatre dimensions ordinaire, on voit qu'*une solution continue en* x, y, z, t *et dont les dérivées premières sont continues en tous les points*

du plan (non caractéristique et non tangent à une bicaractéristique) $t = 0$, *a ses dérivées premières continues dans tout l'espace.*

52. Nous n'avons pas encore le droit de parler d'une solution u présentant le degré d'indétermination annoncé ci-dessus : nous n'aurons ce droit, même dans le cas analytique où nous allons nous placer, que lorsque nous aurons démontré la convergence de (17). C'est ce que nous ferons ([1]) sous l'hypothèse que toutes les données sont holomorphes autour d'un point donné de l'arête $x = y = 0$ (point qu'on prendra pour origine des coordonnées) : en vertu de quoi on donnera la démonstration demandée pour la série de Maclaurin multiple qui développe u suivant les puissances de x, y, x_1, x_2, ..., x_{m-2}.

D'abord, on voit que chacun des calculs (19) n'implique que des différentiations, des intégrations (à partir de la limite inférieure o), des multiplications et des additions, de sorte que chaque coefficient de (17) sera exprimé en fonction d'autres précédemment calculés (c'est-à-dire correspondant à des valeurs inférieures de h et à des valeurs non supérieures de l'ordre total de différentiation), et des coefficients des développements des A_{ik}, B_{ik}, C qui entrent dans $\mathcal{F}_1$, par un polynôme ne contenant que des termes positifs.

Par conséquent, il suffira de montrer l'existence de la solution en remplaçant les développements $\mathcal{F}_1$, u_0, u par des développements majorants convenablement choisis.

On peut également admettre que les fonctions u_0, **u** sont identiquement nulles, car, dans le cas contraire, il suffirait

---

(1) Plus précisément, nous allons construire une solution satisfaisant aux conditions du problème pour x suffisamment petit *et pour un petit domaine* D *de valeurs de* x_1, x_2, ..., x_{m-2}, y. En ce qui regarde le cas contraire où D a une étendue quelconque, nous signalons simplement (car il est relatif aux équations non linéaires que nous laissons de côté un remarquable résultat de M. Goursat (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, (2), VIII, 1906) d'après lequel il peut arriver que le problème de Cauchy, au premier abord indéterminé, qui est relatif à $x = 0$, n'admette aucune solution qui soit valable et régulière dans *tout* le domaine D; mais cette circonstance ne peut pas se présenter dans le cas linéaire.

d'introduire, à la place de u, la nouvelle inconnue :

$$u - u_0 - \mathbf{u} + \mathbf{u}_0,$$

et on peut supposer que ceci a été effectué préalablement.

N'importe quels développements à coefficients positifs majoreront, comme au n° **10**, Livre I, de telles valeurs nulles de u et de u_0.

Un développement majorant pour $\mathcal{F}_1$ sera :

$$(21) \quad K \frac{(u + \Sigma' p_i + \Sigma' r_{ik})}{1 - \dfrac{x + y + x_1 + \ldots x_{m-2}}{\rho}} \quad (K > 0,\ \rho > 0, \text{ constants})$$

(où p_i représente $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, r_{ik} représente $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ et les Σ' se rapportent à toutes les valeurs de i, ou de i et k, depuis 1 jusqu'à $m - 1$), de sorte qu'il suffit à nouveau de montrer que l'équation obtenue en égalant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ à cette quantité ou à toute autre quantité majorante, admet une solution représentée par une série de Maclaurin à coefficients positifs.

En nous servant encore de l'artifice de M. Goursat [1], nous écrirons une majorante de (21) en changeant, au dénominateur, x en $\dfrac{x}{\alpha}$ avec $\alpha < 1$, de sorte que nous partirons de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = K \frac{u + \Sigma' p_i + \Sigma' r_{ik}}{1 - \dfrac{\dfrac{x}{\alpha} + y + x_1 + \ldots x_{m-2}}{\rho}}.$$

pour laquelle il faut trouver une solution sous forme d'une série de Maclaurin à coefficients positifs ou nuls. Prenons pour u une fonction des variables :

$$(22) \qquad X = x + \alpha y, \qquad Y = x_1 + \ldots . + x_{m-2}.$$

---

(1) Ceci n'était pas nécessaire dans le Mémoire primitif de Beudon, parce que Beudon supposait que $y = 0$ était aussi une caractéristique, c'est-à-dire que $A_{m-1,\, m-1}$ était également nul : de sorte que l'extension du théorème au cas où $x = 0$ seul est une caractéristique, est liée à l'introduction, par M. Goursat, du paramètre α.

Pour une telle forme de u, l'équation devient, en désignant par C le coefficient numérique $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$,

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = K \frac{u + \alpha \frac{\partial u}{\partial X} + (m-2)\frac{\partial u}{\partial Y} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \alpha(m-2)\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}}{1 - \frac{1}{\rho}\left(\frac{X}{\alpha} + y\right)}$$

ou, en résolvant par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$,

$$(23) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{K}{\alpha} \frac{u + \alpha \frac{\partial u}{\partial X} + (m-2)\frac{\partial u}{\partial Y} + \alpha(m-2)\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}}{L - \frac{1}{\rho}\left(\frac{X}{\alpha} + y\right)}$$

où $L = 1 - K\alpha$

Prenons α tel que $L > 0$. On voit qu'en développant la fraction au second membre de (23) suivant les puissances de X et de Y, chacun des coefficients sera positif.

En conséquence du théorème de Cauchy-Kowalewsky, l'équation (23) admettra une solution s'annulant en même temps que $\frac{\partial u}{\partial X}$ pour $X = 0$ et dont le développement, ainsi qu'on le voit comme au n° **10**, n'a que des coefficients positifs.

En substituant pour X et Y les valeurs (22), on obtient le développement majorant cherché, ce qui démontre le théorème.

53. *p arbitraire*. Nous allons maintenant établir une conclusion analogue pour une valeur quelconque de l'exposant constant p, sauf si p est un entier négatif.

En prenant $u = Ux^p$, on a pour U l'équation

$$(15') \qquad x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + p \frac{\partial U}{\partial y} = x \mathcal{F}_1 (U).$$

En remplaçant U par

$$(24) \qquad U = U_0 + U_1 x + \dots + U_h x^h + \dots$$

et égalant les coefficients des puissances semblables de x (les points, au second membre, ayant la même signification qu'au n° **51**) on a

$$(18') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial y} = 0, \\ (p+1)\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = \mathcal{F}_1(U_0) + \dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p+h)\dfrac{\partial U_h}{\partial y} = \mathcal{F}_1(U_{h-1}) + \dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Réciproquement, le système de (24) (lorsque le second membre est convergent) et de (18') équivaut à (15').

Si p est un entier négatif, ce système n'admet généralement pas de solution [1] : l'impossibilité d'y satisfaire apparaît en ceci que l'une des équations de (18'), par exemple, pour $p = \acute{1}$, la seconde, ne contient plus U_1, et devient

$$\mathcal{F}_1(U_0) = 0,$$

qui devrait admettre une solution indépendante de y.

En mettant à part le cas où p est un entier négatif, les équations (18') nous font connaître les U_h successifs. Cependant, dans chacune de ces fonctions, il reste une constante additive indéterminée. On peut, par conséquent, les choisir arbitrairement pour une valeur déterminée de y, par exemple pour $y = 0$.

Pour démontrer la convergence du développement (24) ainsi obtenu, il suffit d'observer $\left(\text{comme on le fait dans la théorie classique de l'équation différentielle } x\dfrac{dy}{dx} = ax + by + \dots\dots\right)$ que le rapport $\dfrac{p+h}{h}$, qui n'est jamais nul dans l'hypothèse adoptée, et dont la

(1) V. *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 339, n° **346**.

limite est 1 lorsque h croît indéfiniment, est toujours supérieur en valeur numérique à un certain nombre positif q. Par conséquent, on obtiendra des majorants pour les U successifs si on majore $\mathcal{F}_1$ et qu'on remplace, en même temps, dans l'équation qui donne $\frac{\partial U_h}{\partial y}$, le coefficient $(p+h)$ par qh.

Ceci équivaut (1) à faire $p = o$ dans l'équation (15') après avoir multiplié le second membre par $\frac{1}{q}$. Il devient alors possible de diviser directement par x et on est ramené au problème de Beudon déjà traité. Puisque, dans ce dernier problème, *on peut choisir arbitrairement les valeurs de l'inconnue pour* $y = o$, c'est-à-dire *sur n'importe quelle surface qui coupe la première sans être tangente à une de ses bicaractéristiques*, il en est de même dans le problème actuellement posé.

La conclusion demandée est ainsi établie, du moins dans l'hypothèse qu'on est dans le cas analytique : restriction qui, toutefois, est loin d'être indifférente, d'après ce que nous avons déjà vu.

III. — Cas du conoïde caractéristique. La solution élémentaire.

54. Le conoïde caractéristique décrit d'un point quelconque $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ comme sommet, admet ce point comme point singulier, de sorte que le calcul précédent cesse d'être valable : en fait, on va voir que p ne peut plus être pris arbitrairement comme on l'a fait ci-dessus.

Pour traiter ce nouveau cas, il faut d'abord former l'équation du conoïde caractéristique dont on vient de

(1) Strictement parlant, la première équation (18'), savoir $\frac{\partial U_0}{\partial y} = o$, disparaîtrait pour $p = o$, puisque son premier membre a été primitivement multiplié par p; on a naturellement à la conserver dans la discussion présente. Connaissant les valeurs de U pour $y = o$, elle les détermine pour $x = o$, fournissant ainsi toutes les données nécessaires au Théorème de Beudon.

parler. Il est, comme on le sait, le lieu de toutes les bicaractéristiques issues de a. Analytiquement parlant, on doit prendre un système quelconque de quantités $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ remplissant la condition (A) et, avec les conditions initiales $p_i = p_{0i}$, $x_i = a_i$ pour $s = 0$, intégrer les équations différentielles formées au n° **49**

$$(L) \qquad \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}.$$

Comme les quantités $p_{0i}, \ldots, p_{0m}$ (ou plus exactement leurs rapports mutuels), sous la condition (A), dépendent de $m - 2$ paramètres, le lieu de la courbe ainsi engendrée est une surface. Il importe de donner une forme précise pour l'équation de cette surface : cette forme a été indiquée par M. Coulon (1); le calcul que nous allons donner un peu plus loin n'est pas foncièrement différent du sien.

55. ***Introduction des géodésiques.*** — Pour l'obtenir, nous allons construire toutes les courbes issues de $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et vérifiant le système différentiel (L), *que les valeurs initiales* $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ des variables p_i *satisfassent* à (A) *ou non*. De telles courbes ne sont autres que les géodésiques d'un élément linéaire convenablement choisi.

Résultats empruntés à la théorie générale des géodésiques (2). — Soit

$$H(dx_1, dx_2, \ldots, dx_m; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum H_{ik} dx_i dx_k$$

une forme quadratique quelconque (son discriminant étant toutefois supposé $\neq 0$) en $dx_1, \ldots, dx_m$, les coefficients H_{il} étant des fonctions données de $x_1, \ldots, x_m$. Si $dx_1, \ldots, dx_m$ sont considérés comme différentielles de $x_1, \ldots, x_m$, on peut considérer **H** comme un élément linéaire ou « forme

(1) Thèse, p. 22.

(2) V. Darboux, *Leçons*, t. II.

Beaucoup des principes qui vont suivre, tels que géodésiques pour un élément linéaire indéfini, géodésiques de longueur nulle, paramètres différentiels, etc..., seront familiers à beaucoup de lecteurs, car ils sont constamment utilisés dans la récente théorie de la Relativité. Cependant on ne supposera pas, ici, la connaissance de cette théorie (V. l'Appendice I à la fin du volume).

métrique » (1) d'une variété à m dimensions. L'intégrale

$$\mathcal{L} = \int \sqrt{\mathbf{H}(dx_1, \ldots, dx_m)} = \int \sqrt{\mathbf{H}(x_1', \ldots, x_m')}\, dt$$

$\left(\text{où, au second membre, } x_i' \text{ représente } \frac{dx_i}{dt}\right)$ représentera donc la longueur d'un arc de courbe dans cette variété, et les *géodésiques* correspondantes sont les courbes qui annulent la variation de $\mathcal{L}$. Leurs équations différentielles sont

$$(25) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathbf{H}}}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial\sqrt{\mathbf{H}}}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

Les principes de la Dynamique classique conduisent à écrire ces équations différentielles sous une forme différente, savoir

$$(25') \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

laquelle exprime le mouvement d'un système dont la force vive serait $\mathbf{H}(x'. x)$ et sur lequel aucune force n'agirait.

Ces deux formes (qui correspondent à deux formes du principe de moindre action) ne sont pas exactement équivalentes, mais le deviennent moyennant une condition. La forme (25) détermine les courbes demandées, mais non t, ce dernier demeurant un paramètre arbitraire dont le choix est indifférent. Les équations (25) restent inchangées par le changement de la variable indépendante t en $\varphi(t)$, φ étant une fonction quelconque.

La deuxième forme (25′) ne définit pas seulement une courbe, mais aussi un mouvement sur cette courbe, et ce

---

(1) Dans cette conception, le carré de la distance entre deux points infiniment voisins x, $x + dx$ est considérée comme égale à $\mathbf{H}(dx; x)$. C'est cette convention qui conduit à prendre pour élément d'étendue de l'espace, ainsi que nous l'avons fait au nº **40** *bis*, la quantité $\sqrt{|D|}\, dx_1\, dx_2 \ldots, dx_m$, où D est le discriminant de $\mathbf{H}$, ainsi que la théorie classique de l'élément à deux dimensions en donne déjà un exemple. Cette quantité est invariante pour toute transformation ponctuelle effectuée sur les x, car une telle transformation multiplie D par le carré du Jacobien des anciennes variables par rapport aux nouvelles.

mouvement n'est plus arbitraire dans le temps : il doit vérifier l'intégrale des forces vives

$$\mathbf{H} = \text{const.}, \tag{26}$$

de sorte que le point représentatif $(x_1, \ldots, x_m)$ doit se mouvoir sur la courbe à énergie cinétique constante. Si nous tenons compte de cette dernière équation, les deux systèmes (25) et (25') sont (en général) équivalents [1].

Mais le second d'entre eux offre, à notre point de vue, un avantage précieux, qui est d'admettre des solutions pour lesquelles la valeur constante de l'intégrale (26) est *nulle*, et qui ne sont autres que les bicaractéristiques. Ces lignes doivent donc être encore regardées comme des géodésiques, mais par une certaine extension du sens de ce mot, car, pour l'une quelconque d'entre elles, le système primitif (25) cesse d'avoir un sens.

Partant du système (25'), réduisons-le à la forme de Hamilton en introduisant les quantités

$$p_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i'}. \tag{27}$$

En éliminant les x_i', $\mathbf{H}$ devient une forme quadratique $\mathbf{A}$ en p, la forme adjointe [2] de $\mathbf{H}$ divisée par le discriminant D de $\mathbf{H}$ et, comme on le sait, les m équations (25') du second

---

(1) Si, dans (25), on suppose que le paramètre arbitraire t est choisi de manière que $\mathbf{H} = \text{const.}$, alors le dénominateur $2\sqrt{\mathbf{H}}$, dans

$$\frac{\partial\sqrt{\mathbf{H}}}{\partial x_i'} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{H}}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i'}$$

peut sortir du signe $\frac{d}{dt}$ et on trouve (25').

Réciproquement, si on voulait écrire (25') de telle sorte que la variable indépendante t puisse devenir arbitraire, on n'aurait qu'à remarquer que, comme fonction d'une telle quantité t, s peut facilement se calculer grâce à (26), savoir $ds = \sqrt{\mathbf{H}}dt$. En remplaçant ds par cette valeur et en même temps x_i' par $\frac{x_i'}{\sqrt{\mathbf{H}}}$, on trouve (25). Voir Darboux, *Leçons*, t. II. n° 571 de la deuxième édition.

Tout ceci cesse d'avoir un sens pour une bicaractéristique.

(2) $\mathbf{A}(p_1, \ldots, p_m) = \Sigma A_{ik}p_ip_k$, le coefficient A_{ik} étant le quotient, par D, du mineur du déterminant D correspondant à l'élément $\mathbf{H}_{ik}$.

La dénomination de *forme adjointe* est (depuis Gauss) classique, comme l'est celle d'*équation linéaire adjointe* employée dans ce qui précède, de sorte que toutes deux sont imposées par l'usage. Il est à peine utile de faire observer que ces deux sens du mot « adjointe » sont sans rapport entre eux.

ordre sont remplacées par les $2m$ équations de Hamilton du premier ordre

$$(L_1) \qquad \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i},$$

[équivalentes à (27)] et

$$(L_2) \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}.$$

Ces équations admettent de nouveau l'intégrale $A =$ const., équivalente à (26).

56. Nous allons nous servir des calculs précédents en faisant en sorte que la forme quadratique **A** soit celle qu'on a précédemment désignée par cette lettre, savoir la forme caractéristique de notre équation. On sait comment il faut choisir **H** dans ce but : la relation entre **A** et **H** est réciproque, de sorte qu'il faut prendre **H** égal à la forme adjointe de **A** divisée par le discriminant Δ de **A** : chaque coefficient de **H** s'obtient en prenant le mineur du déterminant Δ relatif au coefficient correspondant de **A** et divisant par Δ. Les discriminants D et Δ de **H** et de **A** sont inverses l'un de l'autre; les variables p_i de **A** sont reliées aux variables x_i' de **H** par un quelconque des deux systèmes (équivalents) (27), (L_1), les variables x_i étant, naturellement, les mêmes dans les deux formes.

Il est utile de noter que l'usage que nous faisons de cette notion des géodésiques est légèrement différent de l'usage qui en est fait habituellement (du moins en mettant à part les applications à la Relativité) en ce sens que **A** (ou **H**) peut être — et sera en fait, dans le cas hyperbolique, qui est celui qui nous intéresse spécialement — une forme *indéfinie*. Ceci, évidemment, n'aura pas d'importance pour beaucoup des propriétés analytiques des géodésiques; $\mathcal{L}$ peut devenir imaginaire, mais non son carré, qui est précisément la quantité que nous aurons à introduire [1].

---

(1) La seule différence importante introduite dans les opérations par la possibilité que **A** soit indéfinie, est que l'on ne peut pas, comme on le fait souvent, choisir sur chaque géodésique la variable s de sorte que la constante **A** devienne égale à 1, puisque le cas de $A = 0$ est précisément celui qui nous intéresse le plus.

57. Nous allons maintenant traiter les géodésiques définies ci-dessus par une méthode équivalente, au fond, à la méthode bien connue de Lipschitz [1].

Comme nous l'avons remarqué, les équations (25') n'admettent pas un changement arbitraire de variable indépendante; mais elles admettent toutefois un changement linéaire, savoir le remplacement de s par $\alpha s + \beta$, α et β étant des constantes quelconques : et, en effet, un tel changement laisse l'équation (26) inchangée, à un changement près de la constante qui figure au second membre.

La propriété correspondante des équations (L) est qu'elle ne sont pas changées lorsqu'on remplace s par αs et p_i par $\frac{p_i}{\alpha}$ (α étant une constante), sans changer les x; et ceci laisse de même inchangée chacune des courbes intégrales de (L) (en changeant seulement sa représentation paramétrique).

Considérons maintenant exclusivement les géodésiques issues d'un point particulier donné $a(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de l'espace à m dimensions, s étant nul en ce point. L'une d'entre elles sera déterminée si on donne les valeurs initiales (valeurs pour $s = 0$) $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ de $p_1, \ldots, p_m$. De plus on obtiendrait le même résultat, comme nous venons de le voir, si on remplaçait s par αs et $p_1, \ldots, p_m$ par $\frac{p_1}{\alpha}, \ldots \frac{p_m}{\alpha}$, les p_{0i} devant naturellement être changés en $\frac{p_{0i}}{\alpha}$. Ceci peut s'exprimer en disant que les $2m + 1$ quantités

$$p_1, \ldots, p_m, p_{01}, \ldots, p_{0m}, s$$

se présentent seulement dans les $2m$ combinaisons :

$$\text{(28)} \qquad P_i = sp_i \qquad q_i = sp_{0i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Donc, les formules d'intégration de (L) doivent être de la forme

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} x_i = \Phi_i(q_1, \ldots, q_m; a_1, \ldots, a_m) \\ P_i = \Psi_i(q_1, \ldots, q_m; a_1, \ldots, a_m) \end{cases}$$

(1) *Bull. des Sc. Math.*, 1re série, t. IV, p. 99-110. V. Darboux, *Leçons*, t. II, Livre V, n° **518**.

et on peut noter immédiatement que ces formules ne changent pas par permutation des x_i avec les a_i correspondants, et, en même temps, de P_i avec $-q_i$ [c'est ce que montrent les équations (L_1), (L_2) en y changeant s en $-s$].

Considérons maintenant la première série d'équations (29) comme définissant une transformation ponctuelle entre les x et les q, le point a correspondant à $q_1 = \dots = q_m = 0$; comme

$$\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_{0i}},$$

on voit que le développement de $x_i - a_i$ admet $\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q_i}$ comme ensemble de termes du premier degré. Le Jacobien

$$\text{(30)} \qquad J = \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(q_1, \dots, q_m)}$$

a, par conséquent, en a, la valeur Δ différente de zéro, de sorte que les q peuvent certainement être exprimés en fonctions des x dans le voisinage de a.

Les variables q se rattachent très simplement aux *variables normales* de Lipschitz [1] : ces dernières sont, par définition, les quantités

$$\xi_i = s\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$$

de sorte qu'on a, entre elles et les q, la substitution linéaire à coefficients constants

$$q_i = \frac{1}{2}\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i}$$

ou, sous une forme équivalente,

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial q_i},$$

A_0, H_0 étant les quantités A, H considérées au point initial a, soit :

$$A_0(q_1, \dots, q_m) = A(q_1, \dots, q_m; a_1, \dots, a_m),$$
$$H_0(\xi_1, \dots, \xi_m) = H(\xi_1, \dots, \xi_m; a_1, \dots, a_m).$$

---

(1) *Loc. cit.* V. note précédente.

Si on se sert des coordonnées particulières q_i (ou ξ_i), les géodésiques issues de a seront représentées par des lignes droites, les coordonnées étant proportionnelles à s.

57 *bis*. Rien de ce que l'on vient d'écrire n'exige l'hypothèse que les coefficients A_{ik} soient analytiques : il est seulement nécessaire qu'ils soient réguliers, autant qu'il le faut pour l'application des théorèmes généraux concernant l'existence des intégrales des équations différentielles et leur dérivabilité par rapport aux conditions initiales. (V. la Note additionnelle à la fin du présent Livre.)

Si les A_{ik} sont des fonctions holomorphes des x, alors les x seront, dans le voisinage de a, des fonctions holomorphes des q, et, réciproquement, les q seront des fonctions holomorphes des x.

Toutes les considérations actuelles — et par conséquent celles du n° suivant — continueront à être valables aussi longtemps que la résolution de la première série d'équations (29) par rapport aux q sera possible : en d'autres termes, aussi longtemps que le problème de joindre le point x (x_1, ..., x_m) à a par une ligne géodésique peut être considéré comme déterminé. La région $\mathcal{R}$ dans laquelle une telle validité persiste peut se définir en considérant, par exemple, une famille de surfaces à un paramètre, contenant a et s'enveloppant l'une l'autre quand le paramètre croît (telles que des sphères de centre a) : l'intérieur d'une surface appartiendra [1] à $\mathcal{R}$ tant que chacune d'elles coupera un arc de géodésique issue de a en un seul point P et que, de plus, le Jacobien (30) ne s'annulera pas sur l'arc aP.

---

(1) V. nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, note finale A. On obtient le plus souvent une région $\mathcal{R}$ en déterminant, sur chaque géodésique issue du point a, l'arc partant de a et autour duquel la propriété demandée (c'est-à-dire le fait que chaque point peut être joint au point initial par une courbe géodésique continue et bien déterminée) ne cesse pas d'exister : lequel arc se termine en un point défini par J [formule (30)] $=$ o, appelé *foyer conjugué* de a (V. *Leçons sur le Calcul des Variations*, Livre II, chap. III), et où la géodésique peut être touchée par l'enveloppe d'une famille à un paramètre, convenablement choisie, d'autres géodésiques issues de a; mais, dans certains cas, une telle définition de $\mathcal{R}$ pourrait être erronée.

Au lieu de considérer le Jacobien (30), on pourrait considérer une géodésique arbitraire issue de a comme fonctions de $m - 1$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ définissant sa direction initiale, chaque point d'une telle géodésique étant ainsi défini par un système de valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$. Le Jacobien

$$\text{(30 \textit{bis})} \qquad \mathbf{J} = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)}$$

jouera le même rôle que le Jacobien (30).

58. ***Equation du conoïde caractéristique.*** — Ayant ainsi défini les quantités auxiliaires P et q, on forme l'expression

$$\Gamma = \mathbf{A}(P_1, \ldots, P_m; x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{A}(q_1, \ldots, q_m; a_1, \ldots, a_m).$$

Ceci est une forme quadratique en q, à coefficients constants, et une fonction holomorphe des x (en fonction desquels on peut supposer exprimés les P et les q); son développement suivant les puissances des $(x_i - a_i)$ commence par des termes du second degré, savoir :

$$\text{(31)} \qquad \Gamma = \mathbf{H}_0(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m) + \ldots$$

(puisque, au voisinage de a, on a sensiblement

$$x_i - a_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i}\Bigg).$$

Γ est *le carré de la distance géodésique du point* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *au point* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, cette distance étant calculée au moyen de l'élément linéaire **H** tel qu'il est défini au n° 56.

Ceci conduit à évaluer les dérivées partielles de Γ : celles de $\sqrt{\Gamma}$ sont, en effet, données par l'équation classique en Calcul des Variations [1]

$$\text{(31')} \quad \delta\sqrt{\Gamma} = \sum_i \frac{\partial\sqrt{\mathbf{H}}}{\partial x_i'}\,\delta x_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{H}(x')}}(p_1\,\delta x_1 + \ldots + p_m \delta x_m)$$

---

(1) V. nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, Livre II, chap. III, p. 142.

On voit ainsi, en tenant compte de

$$\Gamma = \mathbf{A}(\mathrm{P}) = s^2\,\mathbf{A}(p) = s^2\,\mathbf{H}(x'),$$

que la dérivée partielle de Γ par rapport à x_i n'est autre que (1) $2 s p_i = 2\mathrm{P}_i$ et que *la fonction* Γ *est une solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :*

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i};\, x_i\right) = 4\Gamma. \tag{32}$$

L'expression Γ est symétrique par rapport aux deux points $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(a_1, \ldots, a_m)$ dont elle dépend.

$\Gamma = 0$ *est l'équation du conoïde caractéristique.*

Si les variables normales ξ sont prises comme coordonnées cartésiennes, le conoïde caractéristique est un cône quadratique ordinaire (ou plutôt pour $m > 3$, un hypercône) qui est réel pour une équation hyperbolique. Comme on l'a dit au Livre I, *quand, de plus, l'équation est normale*, il se compose de deux nappes et divise l'espace en trois régions, deux d'entre elles intérieures et une extérieure.

Ces propriétés qualitatives valent aussi pour l'espace primitif où les coordonnées sont $x_1, \ldots, x_m$, puisque la transformation ponctuelle entre les x et les ξ est régulière. On peut, par conséquent, parler des deux nappes du conoïde caractéristique, ou, comme nous le dirons souvent pour abréger, des deux *demi-conoïdes* de sommet donné quelconque a.

Le plus souvent, on écrira l'équation de manière que $\Gamma > 0$ corresponde aux régions intérieures, c'est-à-dire que la forme caractéristique se compose d'un carré positif et de $m - 1$ carrés négatifs.

59. *Les paramètres différentiels de Lamé-Beltrami pour la quantité* Γ. — On connaît (2) la définition des paramètres

---

(1) Par conséquent, le plan tangent à n'importe quelle surface $\Gamma = $ const. est transversal (n° 40) à la géodésique correspondante : fait général, du reste, en calcul des Variations (V. nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, n° 137).

(2) Voir Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, Livre III, chap. I.

différentiels formés à l'aide d'un élément linéaire quelconque. Ceux que l'on déduit de la forme métrique **H** introduite ci-dessus jouent un rôle primordial dans les questions qui nous occupent. C'est manifestement le cas pour le premier d'entre eux [1] Δ_1 (U), lequel, pour la forme métrique **H**, n'est autre que la forme caractéristique elle-même

$$\mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right) = \sum \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k}.$$

On voit que l'*équation qui définit les caractéristiques n'est autre que*

$$\Delta_1(\mathrm{U}) = 0.$$

Nous allons nous proposer de calculer les valeurs que prennent les paramètres différentiels en question lorsqu'on y introduit, pour U, la quantité Γ. La propriété essentielle de ces paramètres différentiels étant [2] leur invariance vis-à-vis des transformations ponctuelles effectuées sur les x, nous ferons ce calcul sous forme invariante, c'est-à-dire avec les notations employées au n° **40 *bis***, et sur lesquelles nous reviendrons dans l'Appendice I à la fin du volume [3].

Tout d'abord, l'équation (32) du numéro précédent montre que l'on a :

$$\Delta_1(\Gamma) = 4\Gamma,$$

résultat que, du reste, l'on peut aussi considérer comme une simple conséquence de l'équation bien connue [4]

$$\Delta_1(\sqrt{\Gamma}) = 1 \tag{32'}$$

vérifiée par la distance géodésique.

Plus généralement, nous allons pouvoir exprimer simplement le paramètre différentiel [5] Δ_1 (Γ, U), où U est une

---

(1) *Loc. cit.*, n° **672**, et aussi *ibid.*, t. II, 2e édit., n° **531**.
(2) Darboux, *loc. cit.*, t. III, Livre VII, chap. I.
(3) Ce changement de notation n'a pas d'influence sur l'expression du premier paramètre Δ_1. Il modifie, par contre, le paramètre Δ_2.
(4) *Ibid.*, t. II, 2e édit., n° **531**.
(5) *Ibid.*, t. III, n° **673**.

fonction quelconque. Adjoignons, en effet, les m relations

$$(33) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 2 s p_i$$

aux équations différentielles (L_1) (n° **55**). Si on multiplie celles-ci par les dérivées correspondantes $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ d'une fonction arbitraire U, et qu'on ajoute les m produits ainsi obtenus, il vient :

$$\frac{dU}{ds} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial p_i},$$

ce qui, avec les notations de Lamé, donne, pour (33) :

$$(34) \qquad \Delta_1 (\Gamma, U) = 2 \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} = 4s \frac{dU}{ds}.$$

Passons maintenant au paramètre différentiel du second ordre, lequel est défini [1] à l'aide du précédent par une transformation analogue à celle qui (nos **39** et suivants) nous a donné le polynôme adjoint. Il convient ici, conformément à ce qui a été dit plus haut, de rendre ce calcul invariant vis-à-vis des transformations ponctuelles et, par conséquent, d'introduire, comme au n° **40 *bis***, l'élément riemannien [2] $\overline{dT} = \rho dT$. Le paramètre différentiel cherché $\Delta_2 \Gamma$, lequel a la valeur

$$\Delta_2 \Gamma = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \rho A_{ik} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} \right),$$

est défini par la condition que l'on ait, pour toute fonction U, l'identité intégrale

$$(35) \qquad \mathbf{SSS}\, \rho \Delta_1 (\Gamma, U)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m + \mathbf{SSS}\, \rho U \Delta_2 \Gamma dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$
$$= \mathbf{SS} \ldots\ldots,$$

où les intégrales m^{uples} du premier membre sont étendues à une région de l'espace à m dimensions; l'intégrale

(1) Darboux, *loc. cit.*, t. III, n° **674**. Voir page précédente, note 3.
(2) Pour l'invariance de cet élément, voir p. **90**.

$(m-1)^{\text{uple}}$ du second membre, à la frontière de cette région, la quantité remplacée par des points sous le signe **SS** étant [1] le produit de U par une combinaison linéaire des dérivées premières de Γ.

Nous utiliserons ceci en transformant les premiers **SSS** par l'introduction des coordonnées définies précédemment, soit s, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. En désignant encore par **J** le Jacobien de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par rapport à ces paramètres, cette première intégrale devient

$$2s\,\frac{\partial U}{\partial s}\cdot\rho\,|\,\mathbf{J}\,|\,d\lambda_1 d\lambda_2\ldots.d\lambda_{m-1}ds,$$

qu'on peut transformer directement en

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\pm\ \mathbf{SS}\ 2U\rho|\,\mathbf{J}\,|\,sd\lambda_1 d\lambda_2\ \ldots.\ d\lambda_{m-1}\\ &-\ \mathbf{SSS}\ 2U\,\frac{\partial(\rho|\mathbf{J}|s)}{\partial s}\,d\lambda_1 d\lambda_2\ \ldots.\ d\lambda_{m-1}ds\\ &=\pm\ \mathbf{SS}\ 2\rho U\,|\,\mathbf{J}\,|\,sd\lambda_1 d\lambda_2\ \ldots.\ d\lambda_{m-1}\\ &-\ \mathbf{SSS}\ 2U\,\frac{1}{\mathbf{J}}\,\frac{d(\rho\mathbf{J}s)}{ds}\,dx_1 dx_2\ \ldots.\ dx_m. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\rho U dx_1\ dx_2\ \ldots\ dx_m$ dans l'intégrale m^{uple} de cette expression finale est forcément la valeur demandée de $\Delta_2\Gamma$:

$$(37)\qquad \Delta_2\Gamma = 2\left(1 + s\,\frac{d\log(\rho\mathbf{J})}{ds}\right),$$

Remarque. — Rappelons que le polynôme différentiel Δ_2 est identique à son adjoint, celui-ci étant, bien entendu, *formé à la manière invariantive du* n° **40 *bis***, puisque c'est à ce point de vue que nous venons de nous placer. Cette propriété, utilisée depuis l'apparition de la théorie du potentiel en ce qui concerne le symbole Δ de Laplace, tient,

---

(1) On peut facilement voir que cette quantité est $\pm\ 2\rho s\mathbf{J}U$, c'est-à-dire celle qu'on trouve dans (36); mais cette vérification est d'ailleurs inutile, car, en raison du lemme fondamental du Calcul des Variations, il ne peut exister deux transformations de la forme (35) pour la même quantité (valables pour U arbitraire), qui ne coïncident pas terme à terme.

dans le cas général comme dans ce cas particulier, au fait que le symbole Δ_1 (U, V) est symétrique par rapport aux deux fonctions dont il dépend. L'identité intégrale qui, au n° **40 *bis*,** caractérise les polynômes adjoints, se déduit en effet, dans ces conditions, de notre formule (35) qui définit Δ_2, en échangeant les deux fonctions U et Γ (ou plutôt U et V, en remplaçant Γ par une fonction arbitraire V) qu'elle contient et soustrayant.

La forme métrique **H** étant choisie comme il a été dit ci-dessus, les termes du second ordre de l'expression Δ_2 sont identiques à ceux de l'équation donnée. Il en résulte que celle-ci peut s'écrire, avec MM. Cotton et Levi Cività,

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad \Delta_2 u + \sum \mathrm{B}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{C}u = 0,$$

forme dont les avantages nous apparaîtront particulièrement au Livre IV.

59 *bis*. Il peut être intéressant de remarquer que l'équation (32) caractérise la forme présente de l'équation du conoïde caractéristique, c'est-à-dire qu'une fonction quelconque, holomorphe (1) autour de a, s'annulant sur le conoïde et vérifiant la formule (32), n'est autre que Γ elle-même.

Car une telle quantité doit être de la forme

$$\Gamma\Pi$$

(Π étant encore holomorphe). En substituant dans (32), on a :

$$4\Pi\Gamma = \Pi^2\Delta_1\Gamma + 2\Pi\Gamma\Delta_1(\Pi,\Gamma) + \Gamma^2\Delta_1\Pi,$$

ou [en raison de la formule (34) et en remarquant que l'équation est vérifiée pour $\Pi = 1$] :

$$\Pi + s\frac{d\Pi}{ds} + \frac{\Gamma}{4\Pi}\Delta_1\Pi - 1$$
$$= \frac{d}{ds}[s(\Pi - 1)] + \frac{\Gamma}{4\Pi}\Delta_1\Pi = 0.$$

(1) Par contre, il existe des solutions non holomorphes en nombre infini. savoir le carré de la distance géodésique (calculée par rapport à **H**) de $(x_1, \ldots, x_m)$, à toute surface inscrite dans le conoïde.

Ceci montre que $\Pi = 1$ sur tout le conoïde, d'où :

$$\Pi = 1 + \Gamma^l R,$$

l étant un exposant positif et la nouvelle fonction holomorphe R ne s'annulant pas sur toute la surface du conoïde. Mais ceci impliquerait une contradiction, car, en substituant $\Pi - 1 = \Gamma^l R$ dans l'équation précédente, on trouverait que, sur le conoïde,

$$s \frac{dR}{ds} + (2l + 1) R = 0,$$

équation qui n'admet d'autre solution *régulière* que zéro.

60. Les principes précédents relatifs aux géodésiques et au premier paramètre différentiel Δ_1 permettent de répondre à une question que nous nous étions posée au n° **40** et qui consiste à interpréter géométriquement, non seulement la direction transversale (conormale de M. d'Adhémar), mais aussi la grandeur de la variable infinitésimale $d\nu$ qui figure dans la formule (F). Pour une pareille interprétation, il y a tout d'abord évidemment lieu de préciser le choix de l'élément précédemment appelé dS et dont $d\nu$ dépend par l'intermédiaire des π_i. Nous supposerons qu'on a pris, au sens du n° **39**, $dS = \frac{dT}{dG}$, — ce qui laisse d'ailleurs encore provisoirement arbitraire le facteur de proportionnalité figurant dans dS tant que la forme donnée au premier membre G de l'équation reste elle-même arbitraire. Les quantités π_i représenteront, dans ces conditions, les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial x_i}$.

Cela posé, les équations (ν) du n° **40**, qui définissent la transversale ainsi que la quantité $d\nu$, sont de la même forme que les équations (L_1) (n° **49**) qui entrent dans la définition des géodésiques. ν ne sera donc autre chose que la variable s qui figure dans les équations d'une telle géodésique transversale à S, si nous nous arrangeons pour que les variables p_i correspondantes soient identiques aux π_i.

On y arrive immédiatement si l'on suppose que le plan tangent à S n'est pas caractéristique, en prenant tout simplement pour G la distance géodésique (supposée petite) du

point x à S, distance qui, d'après les principes du Calcul des Variations, se compte sur une géodésique transversale à S. Cette géodésique n'étant elle-même pas bicaractéristique en vertu de l'hypothèse faite sur l'orientation de S, on pourra supposer que l'on y choisit une variable s précisément égale à l'arc de la courbe, mesuré à l'aide de la métrique **H**. Dans ces conditions, comme le montre la formule (31') du n° 58 (laquelle, d'après les principes du Calcul des Variations, s'applique lorsqu'on remplace $\sqrt{\Gamma}$ par notre distance géodésique actuelle G), les dérivées $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ ne sont autres que les p_i.

En prenant pour G *la distance géodésique dont il s'agit, la variable* v *n'est autre que l'arc* s *de transversale à* S, *c'est-à-dire que cette même distance géodésique.*

60 *bis*. On ne peut, par contre, opérer ainsi si l'on veut que le résultat soit applicable même lorsque S est caractéristique : car, dans ce dernier cas, les transversales issues d'un point quelconque de S sont situées entièrement sur S elle-même et, inversement, il ne passe par aucun point x voisin de S sans être situé sur elle, une géodésique coupant transversalement S après un très petit parcours. On peut triompher de cette difficulté sous la première forme suivante. Sur la géodésique transversale à S au point α considéré (que cette ligne soit ou sécante à S), soit pris un point a distinct du premier, et soit, comme précédemment, Γ le carré de la distance géodésique d'un point arbitraire x au point a. La surface S est, par construction, tangente à une surface $\Gamma =$ const., de sorte que les quantités P_i, demi-dérivées partielles de Γ, sont nécessairement proportionnelles à celles de la quantité G, premier membre de l'équation de S, et que l'on peut même choisir G de manière à ce que cette proportionnalité soit une égalité. Cela fait, et l'élément dS étant pris en conséquence comme égal à $\frac{d\Gamma}{dG}$ on aura évidemment :

$$dv = \frac{ds}{s},$$

en appelant s la variable qui figure (n° **55**) dans les équations de la géodésique $a\alpha$ considérée comme ayant a pour origine.

61. Cette première solution n'est évidemment qu'un pis aller, étant donné que la signification géométrique de la variable s n'apparaît elle-même pas clairement, surtout dans le cas d'une géodésique de longueur nulle qui est précisément celui sur lequel nous devons, en ce moment, porter spécialement notre attention. Une réponse satisfaisante sera au contraire fournie par les propriétés du symbole $\Delta_1(u, v)$ et, particulièrement, par sa symétrie par rapport aux deux fonctions qu'il contient.

Introduisons en effet une fonction arbitraire u et exprimons $\frac{du}{d\nu}$. Les π_i étant pris respectivement égaux aux dérivées partielles correspondantes de G, la quantité

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i}$$

n'est autre que $\Delta_1(u, G)$, ce qui est d'ailleurs la généralisation naturelle d'une définition classique de l'invariant en question comme lié à une dérivée normale (Darboux, *Leçons*, tome III, n° **673**).

Cette remarque faite, menons, par le point considéré α de S, une surface σ dont le plan tangent ne soit ni caractéristique ni transversal à S, et soit ν_1 la direction transversale à σ au point α, laquelle, d'après la double hypothèse que nous venons de faire, n'est tangente ni à S, ni à σ. Nous pourrons donc désigner par u la distance géodésique (transversale) d'un point arbitraire x à σ et par G la distance d'un tel point à S, *comptée sur des géodésiques transversales à* σ (cela, que S soit ou non caractéristique). Cette dernière définition entraînera encore celle de $dS = \frac{dT}{dG}$.

Conformément à ce qui vient d'être dit au n° **60**, la variable infinitésimale $d\nu_1$ [définie en prenant pour les quantités π_i, dans la formule (ν) du n° **40**, les dérivées partielles

de u] ne sera autre chose que la valeur même de u. Or, il est clair que, le long de la géodésique de direction ν_1 menée au point considéré, les quantités u et G sont identiquement égales entre elles. On aura donc, en ce point :

$$\frac{dG}{d\nu_1} = 1.$$

Or on a, d'autre part :

$$\frac{dG}{d\nu_1} = \Delta_1(u, G) = \frac{du}{d\nu}$$

en vertu de la propriété de symétrie du symbole Δ_1.

Donc *la valeur de $d\nu$, en un point β de la transversale à* S *menée par α, n'est autre que du, distance transversale de β à σ* : ce qui résout la question.

Par exemple, dans l'espace euclidien ordinaire, la construction du n° 60 conduirait à prendre pour ν la distance δ du point β à S, comptée normalement à la manière ordinaire, dS ayant aussi sa signification géométrique ordinaire. La construction indiquée en dernier lieu donnerait $\nu = \delta/\cos\theta$, en désignant par θ l'angle des deux surfaces S, σ; mais dS serait multiplié par $\cos\theta$.

Lorsque S n'est pas caractéristique, on peut prendre σ confondu avec S lui-même et la construction est alors celle même du n° 60.

62. *Construction de la solution élémentaire.* — Ceci dit, nous allons aborder notre problème principal et rechercher, pour l'équation donnée, une solution de la forme

$$u = U\Gamma^p, \tag{38}$$

Γ étant la fonction que l'on vient de former, dans laquelle le pôle a, de coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_m$, sera considéré comme donné, et le point $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme variable. Nous allons commencer par ne prendre que le cas analytique, de sorte que les coefficients seront supposés holomorphes en x.

Joignons de nouveau x à a par une géodésique, sur laquelle on a :

$$(\mathrm{I}'_1) \qquad \frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_m}} = ds.$$

Ecrivons, sous ces conditions, l'équation (13) : $\mathbf{A}_1$, tel qu'il est défini par (13 *bis*), est identiquement égal à 4, par l'équation (32). Quant à la quantité

$$M = \sum A_{ik} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i},$$

la formule (31) donne sa valeur à l'origine; on a

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i \partial x_k} = 2H_{ik} + \dots ,$$

et, par conséquent $\left(\text{les dérivées } \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \text{ étant initialement nulles}\right)$:

$$M = 2 \sum_{i,k} A_{ik} H_{ik} + \dots = 2m + \dots$$

Les π_i de la formule (13), c'est-à-dire les dérivées de Γ, doivent être remplacés par $2P_i$.

Par conséquent [en divisant (13) par $p\Gamma^{p-1}$ après avoir remplacé G par Γ], on a :

$$(39) \qquad 2\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} + (M + 4p - 4)\, U + \frac{\Gamma}{p} \mathcal{F}(U)$$

$$= 2\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} + (2m + 4p - 4 + \dots) U + \frac{\Gamma}{p} \mathcal{F}(U) = 0,$$

et, pour $\Gamma = 0$, en divisant par 2 et tenant compte de (34) (n° **59**) :

$$(39') \qquad 2s \frac{dU}{ds} + \left(\frac{M}{2} + 2p - 2\right) U$$

$$= 2s \frac{dU}{ds} + (m + 2p - 2 + \dots) U = 0.$$

Puisque U doit être une fonction régulière de s, *cette équation n'est possible que si l'on a :*

$$p = -\frac{m-2}{2} - p_1, \tag{40}$$

p_1 *étant un entier positif ou nul;* U est donc, pour s voisin de zéro, de l'ordre de s^{p_1}. Pour $p_1 = 0$, et par conséquent,

$$p = -\frac{m-2}{2}, \tag{40'}$$

U aura, au point a, une valeur différente de zéro. On la prendra [1] égale à $\frac{1}{+\sqrt{|\Delta_a|}}$, inverse de la racine carrée du discriminant de **A** au point a.

La solution u ainsi obtenue est la seule qu'il soit nécessaire de considérer, car les autres, déduites de $p_1 > 0$, peuvent aisément se réduire à cette première. En effet u, une fois calculé, sera une fonction, non seulement des x, mais aussi des a, et ce sera une fonction analytique de ces diverses variables [2]. Les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial a_1}, \frac{\partial u}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_m}$$

sont solutions de l'équation donnée, et on voit immédiatement qu'elles ont, au point a, la singularité correspondant à $p_1 = 1$. On obtiendrait de même [3] la solution correspondant aux valeurs suivantes de p_1, en différentiant de nouveau par rapport aux a.

---

(1) Cette convention correspond à la forme que nous donnons ici au calcul et, en particulier, à la formation du polynôme adjoint telle que nous l'avons indiquée au n° **40**. Dans le calcul invariantif, l'adjointe étant celle qui était formée au n° **40** *bis*, on prendra simplement $U_a = 1$ (V. Appendice I).

(2) Cette propriété de u peut être considérée comme presque évidente dans l'hypothèse présente de A_{ik}, B_{ik}, C holomorphes; elle s'ensuivra strictement, tout au moins pour m impair, du fait que chaque terme de la série (43) (V. plus bas) vérifie cette condition, et que, d'un autre côté, cette série est uniformément convergente. Ceci sera valable pour m pair, si on donne une précision suffisante à la définition de u.

(3) Les solutions de M. Picard à singularité simultanément polaire et logarithmique, pour $m = 2$ (*Comptes-Rendus Ac. Sc.*, t. CXXXVI, p. 1293, juin 1903) résultent aussi de la solution élémentaire, telle qu'on l'a trouvée au n° **46**, par le calcul indiqué dans le texte.

Mais, d'après ce qu'on a vu précédemment, il est toute une série de valeurs de m pour lesquelles aucune de ces solutions n'existe (du moins, en général), et pour lesquelles, par conséquent, *le problème est généralement impossible :* ce sont les valeurs paires, pour lesquelles le nombre p devient un entier négatif. On rencontrera naturellement de nouveau cette impossibilité, au cours du calcul qui déterminera la solution.

62 *bis*. Ce calcul utilisera d'abord l'équation (39′) qui donne les valeurs de U sur le conoïde. On a $\left(\text{puisque U est égal à } \frac{1}{+\sqrt{|\Delta_a|}} \text{ au sommet}\right)$:

$$(41) \qquad U = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}} e^{-\int_0^s \frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2} + 2p - 2\right) ds}$$

Nous partirons d'une fonction U_0 égale *dans tout l'espace* (ou dans toute la portion d'espace où Γ est défini) à l'expression ci-dessus; en d'autres termes, qui vérifie, dans tout cet espace, l'équation (39′). U_0 sera une fonction holomorphe des x, comme on le voit immédiatement si on prend les q comme variables [comparer à l'équation (45 *bis*)]. On aura évidemment

$$U = U_0 + \Gamma U_1,$$

U_1 étant une fonction régulière.

En remplaçant U par cette valeur dans l'équation (39), on verra que U_1 doit vérifier l'équation

$$(42) \quad 2(p+1)\sum_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} + (p+1)(M+4p)U_1 + \Gamma\mathcal{F}(U_1) + \mathcal{F}(U_0)$$
$$= (p+1)\left[4s\frac{dU_1}{ds} + (M+4p)U_1\right] + \mathcal{F}(U_0) + \Gamma\mathcal{F}(U_1) = 0.$$

On déterminera une fonction U_1 par l'équation

$$(42') \qquad 4s\frac{dU_1}{ds} + (M+4p)U_1 + \frac{1}{p+1}\mathcal{F}(U_0) = 0,$$

supposée vérifiée dans tout l'espace. Cette équation (quoique différentielle) admet une solution régulière et une seule; car elle s'écrit

$$\frac{d}{ds}\,\frac{sU_1}{U_0} = -\,\frac{1}{4(p+1)U_0}\,\mathcal{F}(U_0),$$

et, si U_1 doit rester fini pour $s = 0$, ceci donne nécessairement :

$$U_1 = -\,\frac{U_0}{s}\int_0^s \frac{1}{4(p+1)}\,\frac{\mathcal{F}(U_0)}{U_0}\,ds\,;$$

U_1 est, comme U_0, une fonction holomorphe des q, et, par conséquent, des x.

Le reste du calcul est maintenant évident. On pose

$$\text{(43)}\qquad U = U_0 + \Gamma U_1 + \ldots + \Gamma^h U_h + \ldots,$$

et le développement ainsi écrit donnera une solution du problème si les U_h sont donnés par les équations successives [où chaque premier membre est le coefficient de $(p + h)\,\Gamma^{p+h-1}$ dans $\mathcal{F}(U\Gamma^h)$] (1)

$$\text{(44)}\qquad 4s\,\frac{dU_h}{ds} + [M + 4(p + h - 1)]\,U_h + \frac{1}{p+h}\,\mathcal{F}(U_{h-1}) = 0$$

d'où :

$$\text{(44')}\qquad U_h = -\,\frac{U_0}{4(p+h)s^h}\int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0}\,\mathcal{F}(U_{h-1})\,ds.$$

Si m est impair et que, par conséquent, p n'est pas

---

(1) On voit que cette méthode permettra de construire la solution (unique) de la forme $u = U\Gamma^{p'+1}$ pour toute équation aux dérivées partielles donnée telle que $\mathcal{F}(u) = W\Gamma^{p'}$ (avec W holomorphe) à condition que p' ne soit égal à aucun des nombres :

$$-\,\frac{m-2}{2} - 1,\ \frac{m-2}{2} - 2,\ \ldots,\ \frac{m-2}{2} - p_1,\ \ldots$$

Au contraire, quand p prend une des valeurs précédentes, l'équation n'admet pas de solution de la forme $U\Gamma^{p'+1}$, comme il apparaît dans le texte (ni, comme on peut le voir aussi, de solution algébroïde quelconque).

entier, tous les $(p + h)$ seront égaux à des entiers plus $\frac{1}{2}$: donc, toutes les expressions (44′) existeront. Elles seront des fonctions holomorphes : si les q (ou, ce qui revient au même, les variables normales de Lipschitz) sont pris comme variables indépendantes, et que la quantité $\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_{h-1})$ ait l'expression

$$\frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_{h-1}) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k + \dots, \tag{45}$$

où Q_0, Q_1, ... sont des polynômes homogènes par rapport aux variables ainsi choisies (leurs degrés étant marqués par leurs indices), on aura :

$$\frac{U_h}{U_0} = -\frac{1}{4(p+h)h}Q_0 - \frac{1}{4(p+h)(h+1)}Q_1 - \dots - \frac{1}{4(p+h)(h+k)}Q_k - \dots, \tag{45 bis}$$

une expression semblable — dans laquelle on doit remplacer h par zéro et le second membre (45) par $\left(\frac{M}{2} - m\right)$ — s'appliquant aussi à $\log U_0$, en raison de (41) (et avec l'addition du terme constant $-\frac{1}{2}\log|\Delta_a|$).

Si les coefficients étaient simplement réguliers (n° 9), on serait cependant à même de dire que les U_h existent, avec la définition et les propriétés ci-dessus, jusqu'à une certaine valeur de h.

63. En admettant que les coefficients sont holomorphes, il faut maintenant démontrer la convergence de la série (43).

Dans ce but, nous allons former, cette fois, directement (et non plus par comparaison), des fonctions majorantes pour les termes successifs.

On simplifiera un peu le calcul par un changement d'inconnue. Après avoir déterminé U_0 comme on l'a dit précédemment, nous allons, au lieu de (E), introduire la nouvelle équation :

$$\mathcal{F}_1(u) = \frac{1}{U_0}\mathcal{F}(U_0 u) = 0 \tag{E$_1$}$$

Il est évident que toute solution de (E_1) se déduit d'une solution correspondante de (E) en divisant par U_0, et aussi que les solutions élémentaires des deux équations sont liées de la même façon (à la multiplication par un facteur constant près); et (nous reviendrons sur ce point au Livre IV) ceci s'applique à chaque terme dans les développements des deux numérateurs. C'est ce qu'on vérifie, en particulier, aisément pour U_0 [1]. Par conséquent, la nouvelle valeur de U_0 correspondant à l'équation (E_1) se réduira à la constante :

$$\frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}.$$

Admettons encore que, pour les x, on ait pris des variables normales [2] (les q ou les variables normales de Lipschitz) par rapport au pôle donné a.

Soit σ la somme des valeurs absolues des variables ainsi adoptées. Chaque coefficient de l'équation donnée (E_1) admettra (si les constantes positives α, r sont convenablement choisies) la majorante

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\sigma}{r}}$$

de sorte que (le signe $<<$ indiquant, comme d'ordinaire, les fonctions majorées), si l'on a

$$v << \frac{K}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^n}, \tag{46}$$

on aura aussi [en tenant compte de ce que $\mathcal{F}$ renferme un

---

(1) Il y a avantage, pour cela, à prendre l'équation donnée sous la forme ($\overline{E}$) (59, Rem. II) de manière à mettre en évidence, au premier membre, la quantité $\Delta_2 u$, et à utiliser les relations données par Darboux (*Leçons*, t. III, nº 679), ainsi que la formule (37) du nº 59.

(2) Les opérations définies par les formules (39'), (44) sont manifestement invariantes par une transformation ponctuelle effectuée sur les variables indépendantes.

terme non différentié, m termes du premier ordre [1] et m^2 termes du second] :

$$(47)\quad \mathcal{F}(v) << \frac{\alpha' \mathrm{K} n(n+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{n+3}} \quad \text{avec } \alpha' = \alpha\left[\left(1+\frac{m}{r}+\frac{m^2}{r^2}\right)\right]$$

Dans ces conditions, on va voir qu'on peut écrire

$$(48)\qquad \mathrm{U}_h << \frac{\mathrm{K}_h}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h}},$$

où les K sont des nombres positifs que nous allons calculer un peu plus loin.

Admettons que l'inégalité (48) est vérifiée pour une certaine valeur de h, et démontrons-la en changeant h en $h+1$. On a (en se rappelant que U_0 est une constante) :

$$\mathcal{F}(\mathrm{U}_h) << \frac{\alpha' \mathrm{K}_h . 2h(2h+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}$$

d'où, pour U_{h+1},

$$\mathrm{U}_{h+1} << \frac{\alpha' \mathrm{K}_h . 2h(2h+1)}{4(p+h+1)} \cdot \frac{1}{s^{h+1}} \int_0^s \frac{s^h\, ds}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}.$$

Le facteur

$$\frac{1}{s^{h+1}} \int_0^s \frac{s^h\, ds}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}$$

peut s'écrire (comme σ est proportionnel à s sur chaque géodésique) :

$$\frac{1}{\sigma^{h+1}} \int_0^\sigma \frac{\sigma^h\, d\sigma}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}$$

---

(1) Nous comptons pour deux termes le terme double

$$(\mathrm{A}_{ik} + \mathrm{A}_{ki}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 2\mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$$

et, comme on peut le voir aisément (¹), est majoré, puisque $2h + 3 > h + 2$, par

$$\frac{1}{h+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+2}}.$$

Par conséquent,

$$U_{h+1} << \frac{\alpha' K_h . 2h(2h+1)}{4(h+1)(p+h+1)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+2}}.$$

Ceci est de la forme demandée

$$U_{h+1} << \frac{K_{h+1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2(h+1)}},$$

avec

$$K_{h+1} = K_h \cdot \alpha' \frac{2h(2h+1)}{4(h+1)(p+h+1)}.$$

Le rapport $\frac{K_{h+1}}{K_h}$ tendant, pour $h = \infty$, vers la limite finie α', la série (43) convergera pour $|\Gamma| < \frac{1}{\alpha'}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2$.

L'existence de u est donc complètement démontrée.

On peut ajouter que, si on fait varier le point a dans une région quelconque strictement inférieure à $\mathcal{R}$, les nombres r, α auront, le premier un minimum, le second un maximum, de sorte que la convergence de l'expression (43) sera uniforme.

64. Remarquons que l'analyse ci-dessus s'applique, sans aucune modification, à la détermination de la solution holomorphe de (E) admettant des valeurs données sur le conoïde

(1) Car

$$\frac{1}{h+1}\left[\frac{\sigma^{h+1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{l-1}}\right]' = \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^l}\left[1 - \frac{\sigma}{r} + \frac{l-1}{h+1}\frac{\sigma}{r}\right]$$

$$>> \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^l} \qquad (\text{si } l \geqslant h+2).$$

caractéristique, à condition qu'on connaisse déjà une fonction holomorphe quelconque $\mathfrak{U}_0$ qui admette ces mêmes valeurs pour $\Gamma = 0$. En écrivant

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1\Gamma + \dots + \mathfrak{U}_k\Gamma^k + \dots, \tag{49}$$

les équations aux u_k successifs seront les précédentes, dans lesquelles on fera $p = 0$, savoir

$$4s\frac{d\mathfrak{U}_1}{ds} + \mathrm{M}\mathfrak{U}_1 + \mathcal{F}(\mathfrak{U}_0) = 0,$$

. . . .

$$4s\frac{d\mathfrak{U}_k}{ds} + (\mathrm{M} + 4k - 4)\,\mathfrak{U}_k + \frac{1}{\mathrm{K}}\,\mathcal{F}(\mathfrak{U}_{k-1}) = 0,$$

. . . .

ou, en intégrant de nouveau à l'aide de U_0 :

$$\mathfrak{U}_1 = -\frac{\mathrm{U}_0}{4s^{1-p}}\int_0^s \frac{s^{-p}}{\mathrm{U}_0}\,\mathcal{F}(\mathfrak{U}_0)\,ds$$

(49′) . . . .

$$\mathfrak{U}_k = -\frac{\mathrm{U}_0}{4k.s^{k-p}}\int_0^s \frac{s^{k-p-1}}{\mathrm{U}_0}\,\mathcal{F}(\mathfrak{U}_{k-1})\,ds.$$

Un tel problème admet donc une solution holomorphe (et une seule).

65. Supposons maintenant m pair : soit, par exemple, $m = 4$, d'où $p = -1$. U_0 ayant encore la valeur (41), l'équation (42) devient une impossibilité si l'on n'a pas

$$\mathcal{F}(\mathrm{U}_0) = 0$$

tout le long du conoïde caractéristique.

Il est évident que cette condition ne sera pas vérifiée en général. Si, par exemple, tous les coefficients de l'équation étaient donnés à l'exception de C, elle ferait connaître les valeurs de C sur tout le conoïde ayant a comme sommet [puisque l'expression de U_0 est indépendante de C et différente de zéro [1]].

---

(1) Les conditions pour que ceci se passe [et par conséquent pour qu'il existe une solution élémentaire de la forme (38)] pour toute

Une conclusion semblable apparaîtrait évidemment pour toute autre valeur paire de m, l'impossibilité venant de l'équation (44) qui correspond à $h = -p = \frac{m-2}{2}$, savoir :

(50) $$\mathcal{F}(U_{-p-1}) = 0.$$

Les résultats précédents de M. Picard (V. n° 46) conduisent à compléter l'expression (37) par l'addition d'un terme logarithmique, en posant :

(51) $$u = U\Gamma^p - \mathfrak{U} \log \Gamma.$$

Si on substitue cette nouvelle valeur de u, on trouve :

$$\mathcal{F}(U\Gamma^p) - \left[2\sum \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial P_i} + (M-4)\mathfrak{U}\right]\frac{1}{\Gamma} - \log \Gamma \, \mathcal{F}(\mathfrak{U}) = 0$$

où le premier terme a déjà été développé suivant les puissances de Γ.

Comme auparavant, les termes logarithmiques ne disparaîtront que si $\mathfrak{U}$ lui-même est une solution [1] de (E). De plus, en tenant compte du développement écrit plus haut $\mathcal{F}(u)$, on voit que les équations (44) correspondant à $h < -p$, ne sont pas modifiées. Mais, pour $h = -p$, c'est-à-dire la valeur qui annule le coefficient de $\frac{1}{\Gamma}$, il faut écrire, au lieu de (44) :

(52) $$4s \frac{d\mathfrak{U}}{ds} + (M-4)\mathfrak{U} - \mathcal{F}(U_{-p-1}) = 0,$$

équation qu'on voit aussitôt être de la même forme que les formules (44'), et n'en différant que par l'absence du dénominateur (qui aurait été nul) ainsi que par un changement de signe.

---

position de a, demanderaient une investigation beaucoup plus difficile : mais cette recherche serait particulièrement importante, comme nous le verrons au Livre IV. On peut ajouter que la valeur (37) obtenue ci-dessus (n° 59) pour $\Delta_2\Gamma$, y jouerait un rôle important.

(1) Ceci démontre qu'on n'a pas à examiner une solution de la forme :

$$U\Gamma^p + \mathfrak{U}\Gamma^q \log \Gamma$$

avec $q \neq 0$, puisque la solution $\mathfrak{U}\Gamma^q$ ne peut pas exister. Les infinis algébriques et logarithmiques ne se multiplient pas l'un par l'autre dans le problème actuel.

Soit $\mathcal{U}_0$ la fonction définie, dans toute la région $\mathcal{R}$, par l'équation différentielle (52). $\mathcal{U}$ doit être la solution de (E) qui admet sur le conoïde la même valeur que $\mathcal{U}_0$.

On vient de voir comment cette fonction $\mathcal{U}$ doit être déterminée. Les coefficients de son développement (49) suivant les puissances de Γ dépendent des équations (49'). On voit de nouveau qu'ils sont exactement les mêmes que celles qui déterminent les U_h en prenant $h = p + k$.

En d'autres termes, *on est conduit exactement aux mêmes opérations que tout à l'heure* (à un coefficient numérique près, dont le changement est introduit par le calcul de $\mathcal{U}_0$), U_{-p+k}, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, étant maintenant désigné par $\mathcal{U}_k$.

Or, réciproquement, si on calcule les U_h pour $h = 0, 1, 2, \ldots, (-p-1)$ et $\mathcal{U}$ comme on vient de l'expliquer, et si on substitue dans l'équation donnée l'expression

$$(53) \qquad -\mathcal{U} \log \Gamma + \Gamma^p \sum_{p=0}^{-p-1} U_h \Gamma^h,$$

il résulte de ce que nous avons dit que, dans le résultat de la substitution, les termes en $\Gamma^{p-1}, \ldots, \frac{1}{\Gamma}$ et $\log \Gamma$ vont disparaître. Le résultat de cette substitution, désigné par $\mathcal{M}$, sera, par conséquent, une fonction holomorphe, et tout ce qui reste à faire est d'ajouter à l'expression (53) une solution holomorphe quelconque w de l'équation

$$\mathcal{F}(w) = -\mathcal{M},$$

(dont l'existence s'ensuit du théorème fondamental de Cauchy) pour obtenir une solution

$$u = -\mathcal{U} \log \Gamma + U\Gamma^p, \qquad \left(U = w\Gamma^{-p} + \sum_{h=1}^{-p-1} U_h \Gamma^h\right)$$

de l'équation donnée [1].

---

(1) On pourrait aussi trouver w en l'écrivant :

$$w = W_{-p} + W_{-p+1}\Gamma + \ldots\ldots + W_{-p+k}\Gamma^k + \ldots\ldots,$$

substituant la valeur totale de u dans l'équation, et égalant à zéro les

En ce cas, au contraire de ce qui s'est passé pour m impair, il y a un large degré d'indétermination pour le résultat, puisque w peut être modifié par l'addition de toute solution régulière de (E).

On a ainsi réussi à calculer la solution élémentaire (pour toute équation non parabolique) sous l'hypothèse que les coefficients sont analytiques. On verra plus tard comment l'on peut atteindre le même résultat dans l'hypothèse contraire.

66. ***Application au cas elliptique.*** — En s'en tenant à l'hypothèse analytique, tout ceci est commun aux cas elliptique et hyperbolique. A l'avenir, nous ne nous occuperons que de ce dernier; mais il faut noter que l'existence de la solution élémentaire est la base sur laquelle repose la théorie des équations elliptiques à coefficients analytiques, à laquelle on étend les propriétés principales rencontrées pour $\Delta u = 0$. On peut immédiatement énoncer, pour le cas général, les propriétés obtenues par M. Sommerfeld (1) pour deux variables, telles que :

Une équation elliptique à coefficients analytiques n'a que des solutions analytiques (à l'intérieur de leur domaine d'existence, limite exclue);

Si deux solutions d'une telle équation sont tangentes l'une à l'autre (2) *le long d'une surface, elles sont le prolongement analytique l'une de l'autre,*

---

coefficients des puissances de Γ supérieures à $-p-1$, qui n'ont pas été considérées jusqu'à présent : ceci donne les W_{-p+k} successifs par

$$4s\frac{dW_{-p+k}}{ds} + (M + 4k - 4)W_{-p+k}$$
$$+ \frac{1}{k}\left[\mathcal{F}(W_{-p+k-1}) - 4s\frac{d\mathfrak{U}_k}{ds} - (M + 8k - 4)\mathfrak{U}_k\right] = 0$$

à partir de W_{-p+1}, tandis que W_{-p} reste arbitraire, donnant ainsi l'indétermination demandée.

Le résultat dépendra analytiquement des coordonnées du pôle si on a soin de choisir cet élément arbitraire (pour chaque position de a) d'après une loi analytique déterminée : par exemple, si on convient de prendre $U_{-p} = 0$.

(1) *Encyclopädie der Math. Wissensch.*, II A. 7 c.

(2) V. n. 1, p. 22.

dont la démonstration se fait en remplaçant seulement $\log \frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{r^{m-2}}$ par la solution élémentaire dans le raisonnement classique donné par Duhem [1]; puis, en considérant des fonctions analogues à celles de Green [2];

Pour une surface telle que le problème de déterminer à son intérieur une solution de l'équation adjointe par ses valeurs à la frontière, soit toujours possible, le problème est déterminé pour l'équation donnée;

etc...

67. Le cas parabolique demeure en dehors de l'analyse précédente. Le rôle des solutions élémentaires est joué, dans ce cas, par une quantité dont la valeur :

$$(54) \qquad \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

est bien connue pour l'équation classique de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

L'extension à l'équation plus générale contenant les mêmes termes du second ordre avec des termes du premier ordre, est due à M. Gevrey [3] et à nous-même. Nous ne donnerons pas de plus amples détails sur l'équation parabolique, sujet qui a été traité magistralement par M. Volterra, dans ses conférences à Stockholm, déjà citées. Nous renvoyons simplement à ces ouvrages, et l'on peut aussi noter qu'il serait possible d'obtenir la solution élémentaire pour l'équation parabolique — même la plus générale

(1) Ceci tient au fait que la solution élémentaire est une fonction analytique, non seulement des x, mais aussi des a.

(2) On doit ici noter que, dans le cas elliptique, on peut modifier la solution élémentaire par addition de solutions régulières de (E) (comme cela doit arriver pour les fonctions de Green), tout à fait quelconques par ailleurs (tant qu'on ne se sert pas des conditions aux limites) aussi bien pour m impair que pour m pair : ce qui ne sera pas le cas pour nos calculs futurs concernant les équations hyperboliques.

(3) V. *Comptes Rendus Ac. Sc.*, t. CLII, 1911, et Gevrey, *Thèse*, Paris, 1913, chap. V.

— par un passage à la limite qui la déduirait du cas elliptique ou hyperbolique, dans lequel les coefficients varieraient de telle sorte qu'un carré de la forme caractéristique tendrait vers zéro. Par exemple, on obtient ainsi sans difficulté la première expression (54) comme valeur limite de la fonction de Riemann.

Soit le cas le plus simple de l'équation

(55) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 :$$

on la considérera comme un cas limite (pour $K = 0$) de

(55') $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

(K étant une constante) que l'on peut rapporter à ses caractéristiques en introduisant les nouvelles variables

$$y = Y, \qquad x - \frac{y}{K} = X.$$

Elle prend ainsi la forme (pratiquement équivalente à celle qu'on nomme « équation des télégraphistes ») :

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} = 0,$$

pour laquelle la fonction de Riemann — x_0, y_0 étant, pour plus de simplicité, égalés à zéro — est (1) :

$$e^{\frac{X}{K} - \frac{Y}{K^2}} J_0\left(2\sqrt{\frac{XY}{K^3}}\right),$$

J_0 étant la fonction transcendante entière de Bessel

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2.1} + \frac{\xi^4}{2^4.(2!)^2} - \cdots\cdots + (-1)^h \frac{\xi^{2h}}{2^{2h}.(h!)^2} + \cdots$$

Ceci donne, pour les anciennes variables,

(56) $$e^{\frac{x}{K} - \frac{2y}{K^2}} J_0\left(\frac{2}{K^2}\sqrt{y(Kx - y)}\right).$$

---

(1) V. plus loin, n° 69.

Or, quand K tend vers o, l'argument qui figure dans J_0 devient infini, cas pour lequel la fonction de Bessel admet une évaluation asymptotique bien connue, savoir :

$$J_0(i\eta) \sim \frac{e^\eta}{\sqrt{2\pi\eta}}.$$

Si, d'un autre côté, on développe $\sqrt{y(Kx - y)}$ jusqu'aux termes en K^2

$$\left[\text{savoir } \frac{i}{2}\left(2y - Kx - \frac{K^2x^2}{4y}\right) + \ldots\right],$$

on voit que l'expression (56) se réduit pratiquement à

$$\frac{K}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

qui est précisément la quantité fondamentale employée dans la théorie de l'équation (55), au facteur $\frac{K}{\sqrt{4\pi}}$ près (lequel est détruit par un dénominateur correspondant quand on le substitue dans la formule du n° **42**).

68. ***Conclusions générales.*** — En réunissant ce que l'on a trouvé pour le cas non parabolique, on voit que :

Une équation linéaire aux dérivées partielles non parabolique (analytique) du second ordre, à m variables indépendantes, admet une solution élémentaire ayant comme pôle un point arbitraire de l'espace à m dimensions.

$\Gamma = 0$ *étant l'équation du conoïde caractéristique de sommet a, cette solution élémentaire est de la forme* $\frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}$ (*en désignant par* U *une fonction holomorphe qui prend au pôle a même, la valeur* $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$) *pour m impair; elle est de la forme* $\frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} - \mathfrak{U} \log \Gamma$ (*en désignant par* $\mathfrak{U}$ *une autre fonction holomorphe qui peut être nulle*) *pour m pair.*

Dans le premier cas, l'expression de cette solution est complètement déterminée.

69. *Quelques exemples courants.* — La solution élémentaire de $\Delta u = 0$, pour $m > 2$ variables, est :

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2\right]^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Ceci (en ne distinguant pas encore le réel et l'imaginaire) donne immédiatement le résultat correspondant pour (e_2), (e_3), ... et, en général, pour toute équation (équations $\Delta^{p,q}u = 0$ de M. Coulon) de la forme

$$\Delta^{p,q}\,u = \left(\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_h^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right)u = 0,$$

savoir :

$$u = \frac{1}{\left(\sqrt{\pm\left[\sum_h (x_h - a_h)^2 - \sum_k (y_k - b_k)^2\right]}\right)^{m-2}}$$

pour $\Delta^{p,q} = 0$, et, par exemple, pour (e_2) :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}.$$

Pour l'équation, un peu plus générale, des ondes amorties (1) :

$$(57)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots\dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{m-1}} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{K}u = 0,$$

le résultat correspondant peut être obtenu facilement par

(1) On rappelle qu'on peut ramener toute équation linéaire du second ordre à coefficients constants (non parabolique) à la forme ci-dessus,

une simple généralisation de ce calcul. En posant d'abord $\omega t\sqrt{-1} = x_m$, $\omega t_0\sqrt{-1} = a_m$, de sorte que l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{m-1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_m} + \mathrm{K}u = 0,$$

et

$$\rho^2 = \sum_1^m (x_h - a_h)^2,$$

on prend pour u une fonction de ρ, pour laquelle nous avons l'équation différentielle ordinaire de Bessel :

(58) $$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{m-1}{\rho}\frac{du}{d\rho} + \mathrm{K}u = 0.$$

Cette équation a la propriété que, lorsqu'on en connaît une solution u pour une valeur spéciale $m = m_0$ de m, on a une solution u_1 de l'équation correspondant à $m = m_0 + 2$, par

(59) $$u_1 = \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho}.$$

de sorte qu'il suffit de l'intégrer pour $m = 1, 2$.

Pour $m = 1$, on a $u = \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\sqrt{\mathrm{K}}\rho)$, ce qui donne la réponse pour $m = 3, 5, \dots$, savoir pour $m = 3$, $u = \frac{1}{\rho}\cdot\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\sqrt{\mathrm{K}}\rho)$, où — de même que pour les valeurs impaires suivantes de m — le symbole cos doit être pris pour obtenir la solution élémentaire demandée. Si, conformément à ce que l'on a dit au n° **58** et que nous aurons le plus souvent à faire dans les Livres suivants, on écrit les résultats comme si tous les signes de (57) étaient changés, de manière à introduire

$$[\omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]$$

---

car 1° une transformation linéaire des variables l'amène à la forme :

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = 0$$

et que 2° les coefficients a_i se réduisent à zéro par un changement d'inconnue, savoir

$$u = e^{-\frac{1}{2}(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m)} . u'$$

comme valeur de Γ, on trouve ainsi, pour l'équation des ondes cylindriques amorties

$$(E_2) \qquad \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - Ku = 0,$$

la solution élémentaire :

$$(60) \qquad u = \omega \cdot \frac{\mathrm{Ch}\ \sqrt{K[\omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]}}{\sqrt{\pm[\omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]}}$$

(où apparaît un cosinus hyperbolique, en raison du dit changement de signe de Γ).

Pour $m = 2$, l'équation (58) a une solution holomorphe et une solution logarithmique, cette dernière donnant la solution élémentaire. Toutes deux sont exprimées par la fonction de Bessel

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2} + \frac{\xi^4}{2^4.(2!)^2} \cdots + (-1)^h \frac{\xi^{2h}}{2^{2h}.(h!)^2} + \cdots$$

et, en particulier, la solution logarithmique de (58) est :

$$(61) \qquad J_0(\rho\sqrt{-K}) \log \rho + w \qquad [\rho^2 = \omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2]$$

(w holomorphe) de sorte que (avec la même remarque que plus haut pour le signe), cette formule donne la solution élémentaire de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku = 0.$$

Par conséquent, pour $m = 4$, une solution de (58) dérive de la précédente [savoir (61)], à l'aide de la relation (59), ce qui donne

$$\frac{1}{\rho^2} J_0(\rho\sqrt{-K}) + \frac{\sqrt{-K}}{\rho} J_0'(\rho\sqrt{-K}) \log \rho + \text{fonction holomorph}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\, j\left(\frac{K\rho^2}{4}\right) + \frac{K}{2}\, j'\left(\frac{K\rho^2}{4}\right) \log \rho + \text{fonction holomorphe},$$

où

$$\rho^2 = \omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2 = \Gamma$$

et où la fonction (entière) j est

$$J_0(2\sqrt{-\lambda}) = j(\lambda)$$
$$= 1 + \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} + \dots + \frac{\lambda^n}{(n!)^2} + \dots,$$

avec

$$j'(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda}.$$

Ceci donne la solution élémentaire de l'équation des *ondes sphériques amorties*

$$(E_3) \qquad \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Ku = 0,$$

savoir, puisque le facteur de $\frac{1}{\Gamma}$ doit être initialement $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} = \omega$:

$$(61\ bis) \qquad \frac{\omega j\left(\frac{K}{4}\Gamma\right)}{\Gamma} + \frac{\omega K}{4} j'\left(\frac{K}{4}\Gamma\right) \log \Gamma + \text{fonction holomorphe},$$

laquelle quantité admet la singularité demandée pour

$$\omega^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2 = 0.$$

Le numérateur du premier terme peut être remplacé par la constante ω, puisque l'altération correspondante de la fraction consiste en une fonction holomorphe. Mais ceci ne serait plus valable si on considérait la formation de la solution élémentaire de (57) pour $m = 6, 8, \dots$, par applications successives de l'opération (59) à l'expression ci-dessus

70. *Effets de la descente.* — Il est utile de voir ce que deviennent ces calculs si on applique la « méthode de descente » dont il a été parlé plus haut (n° **29**).

En d'autres termes, on va considérer, en même temps

que l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$ contenant m variables indépendantes, la nouvelle équation

$$\mathcal{F}_1(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

où z est une variable indépendante supplémentaire qui ne figure dans aucun des coefficients. Pour cette nouvelle équation, on considérera de nouveau le conoïde caractéristique $\Gamma = 0$ de sommet $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$ si on désigne par c une valeur déterminée quelconque de la $(m+1)^e$ coordonnée z. La nouvelle forme caractéristique étant

$$\mathbf{A}'(P_1, \ldots P_m, R) = \mathbf{A}(P_1, \ldots, P_m) - R^2,$$

il faut compléter les équations (L) par

$$ds = \frac{dz}{-r} = \frac{dr}{0}$$

(r et R étant des variables supplémentaires respectivement analogues à $p_1, \ldots, p_m$; $P_1, \ldots, P_m$), ce qui donne $r = \text{const.}$, $z - c = sr = R$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Gamma' &= s^2\left[\mathbf{A}(p_1, \ldots, p_m) - r^2\right] \\ &= \mathbf{A}(P_1, \ldots, P_m) - R^2 = \Gamma - (z-c)^2.\end{aligned}$$

M′, nouvelle valeur de M [formule (12)], est évidemment égal à M + 2.

Donc, si (c étant pris égal à zéro) on veut former la fonction

$$\begin{aligned}U' &= U_0' + U_1'\Gamma' + \ldots \\ &= U_0' + U_1'(\Gamma - z^2) + \ldots + U'_h(\Gamma - z^2)^h + \ldots\end{aligned}$$

analogue à U, on sera conduit à écrire les équations successives :

$$\left\{\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_0'}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U_0'}{\partial z} + \left[M' + 4\left(p - \frac{1}{2}\right) - 4\right]U_0' \\ &= 2\sum\frac{\partial U_0'}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U'_0}{\partial z} + (M + 4p - 4)\,U_0' = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_1'}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U_1'}{\partial z} + (M' + 4p - 2)\,U_1' \\
\qquad + \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\,\mathcal{F}_1(U_0') \\
= 2\sum\frac{\partial U_1'}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U_1'}{\partial z} + (M + 4p)\,U_1' \\
\qquad + \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\,\mathcal{F}_1(U_0') = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_h'}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U_h'}{\partial z} + \left[M' + 4\left(p - \frac{3}{2} + h\right)\right]U_h' \\
\qquad + \frac{1}{p+h-\frac{1}{2}}\,\mathcal{F}_1(U_{h-1}') \\
= 2\sum\frac{\partial U_h'}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U_h'}{\partial z} + [M + 4(p + h - 1)\,U_h' \\
\qquad + \frac{1}{p+h-\frac{1}{2}}\,\mathcal{F}_1(U'_{h-1}) = 0. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

La première d'entre elles ne diffère de l'équation (39') qui est vérifiée par U_0, que par le terme en $\frac{\partial U_0}{\partial z}$: par conséquent, elle est aussi vérifiée par U_0; et, comme on sait que cette équation, avec la condition de prendre la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$ en a, la détermine entièrement, on voit que U_0' n'est pas distinct (1) de U_0.

(1) Cette même conclusion apparaît aisément, si on considère les U_h successifs comme déterminés par (45 *bis*).

De la même façon, la deuxième équation, définissant U_1' [dans laquelle $\mathcal{F}_1(U_0') = \mathcal{F}_1(U_0) = \mathcal{F}(U_0)$] est vérifiée par

$$U_1' = \frac{p+1}{p+\frac{1}{2}}\, U';$$

et, comme sa solution régulière autour de a est unique, il faut que U_1' ait précisément cette valeur [1].

Chacune des équations successives se comportera de la même façon, et on voit que *tous les* U' *sont indépendants de* z et ne diffèrent des U correspondants que par des facteurs numériques : on a

$$(62)\quad \begin{cases} U_0' = U_0,\ U_1' = \dfrac{p+1}{p+\frac{1}{2}}U_1 = \dfrac{-\frac{m}{2}+2}{-\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}U_1 = \dfrac{\frac{m}{2}-2}{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}}U_1; \dots \\[2ex] U_h' = \dfrac{(p+1)(p+2)\dots\dots(p+h)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)\dots\dots\left(p+h-\frac{1}{2}\right)}U_h \\[2ex] \qquad = \dfrac{\left(\frac{m}{2}-2\right)\left(\frac{m}{2}-3\right)\dots\dots\left(\frac{m}{2}-h-1\right)}{\left(\frac{m}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{m}{2}-\frac{5}{2}\right)\dots\dots\left(\frac{m}{2}-h-\frac{1}{2}\right)}U_h, \dots \end{cases}$$

ces relations restant valables jusqu'à ce que le dénominateur ou le numérateur (suivant la parité de m) devienne nul en raison de $p+h=0$ ou de $p+h-\frac{1}{2}=0$; ensuite elles resteront valables en changeant seulement la valeur du facteur numérique, savoir [2] :

$$(62\ bis)\qquad \mathfrak{U}'_{p-\frac{1}{2}+h} = U_h'$$

$$= \frac{\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\left(m_1-\frac{7}{2}\right)\dots\dots\frac{1}{2}}{(m-2)(m-3)\dots 1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\dots\dots\left(h-m_1+\frac{3}{2}\right)}{1.2\dots(h-m_1+1)}\,U_h,$$

(1) Voir la note précédente.

(2) Le changement consiste simplement, comme on l'a vu auparavant

à partir de $h = \frac{1}{2} - p = m_1 - 1$, pour m impair $= 2m_1 - 1$; et :

(62 *ter*)

$$U_h' = \frac{(m_1-2)(m_1-3)\ldots.1}{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\ldots.\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1.2\ldots.(h-m_1+1)}{\frac{1}{2}\ldots.\left(h-m_1+\frac{1}{2}\right)} U_h$$

(avec $U_h = \mathfrak{U}_{p+h}$),

à partir de $h = -p = m_1 - 1$, pour m pair $= 2m_1$.

Au Livre IV, on retrouvera tout ceci sous une forme plus simple et plus instructive, montrant les relations qui existent, non seulement entre les coefficients U_h, U_h' dans les développements des solutions élémentaires, mais aussi entre ces solutions élémentaires elles-mêmes.

à remplacer le facteur o par — 1 quand il se présente dans le numérateur ou le dénominateur de (62), tous les autres facteurs restant inchangés.

On a inscrit séparément, dans les seconds membres de (62 *bis*) et de (62 *ter*), les facteurs correspondants à cette circonstance.

NOTE ADDITIONNELLE

SUR LES ÉQUATIONS DES GÉODÉSIQUES

On a considéré ci-dessus les géodésiques définies par les équations de Hamilton [1] :

$$(\mathrm{L}) \qquad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{ds} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}$$

et, en particulier, celles qui partent d'un point déterminé $a\,(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$. L'intégrale générale des équations (L) — autrement dit, la géodésique la plus générale, avec sa représentation la plus générale à l'aide de la variable indépendante s (laquelle n'est définie qu'à une transformation du premier degré près) — dépend de $2m$ constantes arbitraires $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{2m}$. Quant aux géodésiques qui partent du point donné a, chacune d'elles est caractérisée par les valeurs de $m - 1$ paramètres $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{m-1}$, de sorte que les coordonnées x sont fonctions de ces paramètres et de s.

Nous avons eu aussi à considérer les dérivées de ces fonctions non seulement par rapport à s, mais aussi par rapport à n'importe lequel des λ ou des μ. Des théorèmes généraux, aujourd'hui classiques [2], montrent que de telles dérivées partielles :

$$x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_m', \qquad p_1',\ p_2',\ \ldots,\ p_m'$$

---

(1) Dans les applications que nous aurons à faire des principes qui vont suivre, les dérivations par rapport à s seront désignées par le symbole de Newton $\dot{x}$, ce qui nous permet d'employer l'accent habituel pour les équations et les inconnues du système auxiliaire.

(2) V., par exemple, Goursat, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. III (1913), chap. XXIII, en particulier nº **462**; nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, nºs **20-22**, ou notre *Cours d'Analyse*, t. II, nº **243** *bis*.

existent (¹), et sur une géodésique déterminée — en d'autres termes, pour tout système déterminé de valeurs des λ ou des μ — vérifient le système différentiel *linéaire*, les « équations aux variations » d'après la terminologie de Poincaré (« système auxiliaire » de Darboux) :

$$(\mathrm{L}')\quad \frac{dx_i'}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i'}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots m),$$

A' étant une forme quadratique en x et p [savoir la partie quadratique du développement de Taylor de

$$\mathrm{A}(x_1 + x_1', x_2 + x_2', \ldots, x_m + x'_m,$$
$$p_1 + p_1', p_2 + p_2', \ldots, p_m + p'_m)$$

suivant les puissances de $x_1', x_2', \ldots, p_1', p_2', \ldots, p'_m$]. Les dérivées par rapport aux λ sont des solutions de ce système telles que les x_1 sont initialement nuls, puisqu'on se limite aux géodésiques d'origine commune a.

On peut dire la même chose des dérivées partielles d'ordres supérieurs par rapport aux λ (ou aux μ). Si x_i'', p_i'' ne désignent plus des dérivées du premier ordre, mais celles d'ordre h, relativement aux λ, par exemple, — soit

$$x''_i = \frac{\partial^h x_i}{\partial \lambda_1^{h_1} \partial \lambda_2^{h_2} \ldots\ldots}, \qquad p_i'' = \frac{\partial^h p_i}{\partial \lambda_1^{h_1} \partial \lambda_2^{h_2} \ldots\ldots},$$

— de telles quantités vérifient un système linéaire [ne différant de (L′) que par la non-homogénéité] :

$$(\mathrm{L}'')\quad \frac{dx_i''}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial p_i''} + \mathrm{X}_i, \quad \frac{dp_i''}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x_i''} + \mathrm{P}_i,$$

où les X et les P dépendent de dérivées déjà connues des x et des p, c'est-à-dire de dérivées d'ordre inférieur à h, et contiennent aussi les coefficients A_{ik} et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $(h - 1)$. Les x'' sont encore nuls pour $s = 0$ (du moment qu'il s'agit de dérivées prises par rapport aux λ) et, par conséquent, sont au moins du premier ordre en s.

---

(1) Le choix des λ est supposé tel que les p_{0i} en dépendent régulièrement.

Ceci ne montre pas seulement que l'on peut parler des dérivées en question, mais aussi permet — ce qui peut être utile — d'obtenir pour elles des limites supérieures en valeur absolue, si on connaît : 1° leurs valeurs initiales (ou, au moins, des limites supérieures correspondantes); 2° des limites supérieures pour les valeurs absolues des A_{ik} et de leurs dérivées jusqu'au $(h+1)^e$ ordre. En ce qui concerne le premier système aux variations (L′), ce fait est une conséquence des méthodes bien connues employées pour démontrer le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles [1]; pour les systèmes suivants (L″), on peut le démontrer de la même manière, ou plus simplement, le déduire de l'intégration bien connue d'un système linéaire à second membre, une fois le système sans second membre correspondant intégré.

On déduit aussi des remarques précédentes que *la transformation ponctuelle* (n° 57) *qui introduit les variables normales au lieu des x, est régulière* (jusqu'au même ordre moins un, que les A_{ik}) *dans toute la région* $\mathcal{R}$ où elle est définie (n° 57 *bis*).

On peut considérer les expressions des solutions x, p à un autre point de vue : car elles dépendent non seulement des valeurs initiales correspondantes, mais aussi des fonctions A_{ik} $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ qui représentent les coefficients de l'équation aux dérivées partielles (coefficients des termes du second ordre). On peut chercher leur *ordre de continuité* (Livre I, 20 *bis*) par rapport à ces A_{ik}.

Il suit de ce qui précède que cet ordre est 1 pour les x, p eux-mêmes, 2 pour leurs dérivées premières par rapport aux λ, ..., $(h+1)$ pour les dérivées d'ordre h. Si on a construit une géodésique déterminée à partir de a pour une

(1) La démonstration de M. Picard pour le théorème fondamental donne l'énoncé suivant : « Si, dans le système linéaire sans second membre :

$$\frac{dy_i}{ds} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots\cdots + a_{iN}y_N \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots N),$$

les a_{ik} ont des valeurs absolues qui sont partout inférieures à K, et si les valeurs initiales (valeurs pour $s = 0$) des y sont toutes inférieures à M, on a, pour toute valeur de s, $|y_i| < Me^{NKs}$. ».

équation donnée $\mathcal{F}(u) = 0$, dont les coefficients (pour les termes du second ordre) sont A_{ik}, les équations de cette courbe étant valables dans l'intervalle $0 \leqslant |s| \leqslant s_0$, et si, nous donnant un nombre positif quelconque s_0' plus petit que s_0 et un nombre positif quelconque η, quelque petit qu'il soit, on considère les valeurs modifiées $A_{ik} + \delta A_{ik}$ les plus générales, telles que les accroissements δA_{ik} et leurs dérivées partielles du premier ordre aient des valeurs absolues partout inférieures à ε, la quantité ε peut être choisie suffisamment petite pour que, pour toute altération de ce genre [1] des A_{ik} : 1° il parte de a, avec les mêmes p_{0i} que primitivement, une géodésique de la nouvelle espèce, dont les équations sont valables pour $0 \leqslant |s| \leqslant s_0'$; 2° les valeurs des x et des p, pour cette nouvelle géodésique, ne diffèrent des valeurs correspondantes pour la géodésique primitive, que d'accroissements plus petits que η. Ceci se déduit immédiatement de la démonstration générale du théorème fondamental; et la conclusion correspondante est de même valable pour les dérivées des x et des p considérées plus haut.

---

(1) Il est bien entendu, naturellement, que la condition de Lipschitz (puisque supposée dans le théorème fondamental) est remplie par les dérivées premières (par rapport aux x et aux p eux-mêmes) des nouveaux A_{ik} comme des anciens.

LIVRE III

LES ÉQUATIONS A NOMBRE IMPAIR DE VARIABLES INDÉPENDANTES

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE SORTE D'INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I. — Discussion de résultats antérieurs.

71. Nous allons voir maintenant quel usage on peut faire de la solution élémentaire et quelle est sa relation avec les fonctions précédemment employées.

Pour l'équation des ondes cylindriques (e_2), avec $\omega = 1$ (ce qui peut être supposé moyennant un choix convenable des unités), la solution élémentaire est :

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}}.$$

Comme nous l'avons dit, M. Volterra ne s'est pas servi de cette quantité, mais de la suivante :

$$(2) \qquad \mathrm{v} = \log \frac{t_0 - t + \sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}}{r}$$

Ces deux expressions sont liées simplement l'une à l'autre; (2) peut se déduire de (1) par une intégration par rapport à t_0, savoir

$$\mathrm{v} = \int \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}} \cdot$$

Géométriquement, on l'obtient en faisant varier le sommet du cône caractéristique le long de la ligne $x = x_0$, $y = y_0$, et en intégrant entre des limites convenables [1], par rap-

---

(1) V. plus loin, n° 73.

port à cette variation. Il n'y a rien d'étonnant à ce que l'introduction d'une telle quantité dans la formule fondamentale donne une expression de l'intégrale $\int u(t_0)\,dt_0$ le long de cette même ligne.

Comme l'a fait remarquer M. Volterra (1), un tel procédé correspond exactement à ce qu'on trouverait, pour $\Delta u = f$, en intégrant et en différentiant immédiatement à nouveau, par rapport à z_0, la formule classique

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f}{r}\,dx\,dy\,dz$$
$$\left(r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right),$$

ce qui donne

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1}{4\pi}\int_S \left(u\,\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\,\frac{du}{dn}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi f\,dx\,dy\,dz\right],$$

où

$$\varphi = \log\left[\frac{z - z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}\right.$$
$$\left. + \sqrt{1 + \frac{(z-z_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}\right].$$

On a, en d'autres termes, intégré et fait immédiatement ensuite la différentiation inverse, et la même remarque s'appliquerait à la généralisation de M. Tedone (n° **43**).

M. Volterra avait une raison impérieuse pour agir ainsi. S'il avait introduit directement la solution élémentaire $v = \frac{1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}}$ dans la formule fondamentale, il

(1) Conférences de Stockholm (Hermann, 1912), p. 45.

aurait trouvé des intégrales sans signification, les quantités sous les signes d'intégration devenant infinies, d'une manière non permise, sur la surface du cône caractéristique. C'est ce qui apparaît immédiatement quand on fait le calcul. On s'en apercevra également si on exécute l'opération (équivalente) qui consiste à faire opérer réellement la différentiation dans la formule écrite au n° **30**, soit (pour $\omega = 1$)

$$(1') \qquad u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\mu_{t_0}(u_1) + \frac{d}{dt_0}\mu_{t_0}(u_0)\right],$$

$$\mu_{t_0}(f) = \iint \frac{f(x, y)\,dxdy}{\sqrt{t_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}.$$

Pour cela, la méthode usuelle consisterait à différentier par rapport à t_0, sous le signe $\iint$, ce qui porterait seulement sur le dénominateur; et, d'un autre côté, à tenir compte du fait que la limite est variable avec t_0, ce qui donnerait lieu à un terme de frontière, savoir une intégrale simple le long de la circonférence. Mais il apparaît immédiatement que les intégrales double et simple sont dépourvues de sens : la première, en raison de la présence d'un infini d'ordre 3/2 le long de la frontière, la seconde, parce que chacun de ses éléments est infini. Naturellement, des artifices simples permettraient de faire la différentiation en évitant cet inconvénient (1) : mais ils seraient sans intérêt pour nous, car — quelque paradoxal que cela semble — notre méthode va consister à ne pas l'éviter.

72. Nous noterons, d'abord, qu'on pourrait imiter strictement les procédés de MM. Volterra et Tedone. Pour $m = 3$, par exemple, considérons l'équation

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

(1) Nous pourrions, par exemple, représenter l'intérieur du cercle en coordonnées polaires r, φ avec (x_0, y_0) comme pôle et, à la place de la première d'entre elles, introduire une variable auxiliaire λ définie par $r = \lambda t_0$. L'intégration par rapport à λ et φ ayant maintenant lieu entre des limites fixes $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, la différentiation par rapport à t_0 n'offrira pas de difficultés spéciales.

l'équation adjointe

$$\mathcal{G}(v) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k} (A_{ik} v) - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv = 0,$$

et sa solution élémentaire

$$v = \frac{V}{\sqrt{\Gamma}}.$$

Supposons que le point (a_1, a_2, a_3) décrive un segment de ligne (droite ou courbe) $\mathcal{L}$ donné *arbitraire*, avec comme seule condition qu'il soit tout entier à l'intérieur du conoïde caractéristique ayant un quelconque de ses points comme sommet. Considérons l'intégrale

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{v}(x) = \int_{\mathcal{L}} v(x \,|\, a) \, \chi(t) \, dt,$$

t étant le paramètre qui définit la position d'un point (a_1, a_2, a_3) sur $\mathcal{L}$, et $\chi(t)$ une fonction arbitraire choisie. Ceci mènera à la formule (2) si l'on part de (1), la ligne $\mathcal{L}$ étant une parallèle à l'axe des t et $\chi(t)$ étant pris simplement égal à 1. Pour d'autres buts (tels que la solution du problème de Cauchy pour des systèmes), M. Volterra a introduit d'autres expressions semblables qui se déduisent de (3) par le choix d'autres formes [1] de la fonction $\chi(t)$.

On peut reconnaître qu'une telle expression a une singularité logarithmique comme celle de (2). Ce calcul étant quelquefois utile, nous allons en dire quelques mots. Dans l'équation du conoïde caractéristique

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_m; a_1, \ldots, a_m) = 0,$$

supposons qu'un des deux points $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(a_1, \ldots, a_m)$ est voisin de la ligne

$$\mathcal{L} \; (a_1 = a_1(t), \ldots, a_m = a_m(t)),$$

tandis que l'autre décrit cette ligne même.

(1) La solution Φ, que forme M. Volterra dans son mémoire des *Acta Mathematica*, vol. XVIII, p. 169, et dont il use pour l'extension de la théorie aux systèmes (tels qu'il s'en présente en élasticité) correspond à $\chi(t) = t_0 - t$.

Si on suppose que toutes les fonctions sont développables suivant la formule de Taylor (tout au moins jusqu'à des termes d'un certain rang) autour d'un point

$$a^0 \ [a_1{}^0 = a_1(t_0), \ \dots, \ a^0{}_m = a_m(t_0)],$$

qui correspond à une certaine valeur t_0 du paramètre, et si on reprend la forme (31) (n° 58) des premiers termes du développement de Γ quand les deux points x et a sont très proches l'un de l'autre, on voit que, dans le voisinage de a_0, le développement de $v[x; a(t)]$ suivant les puissances de $(x_i - a_i{}^0)$, $(t - t_0)$ commence par des termes du second degré, le coefficient de $(t - t_0)^2$, savoir :

$$\mathrm{N}_0 = \mathbf{H} \ [a_1'(t_0), \ a_2'(t_0), \ \dots, \ a'_m(t_0)]$$

étant différent de zéro, car $\mathcal{L}$ n'est pas tangent au cône caractéristique ([1]). Alors, par une application convenable du « Théorème de factorisation » de Weierstrass et Poincaré (ou plutôt de Cauchy) ([2]) pour les fonctions de plusieurs variables, on peut écrire :

$$\Gamma \ [x; a(t)] = \mathrm{N}(x, t) \ [(t - \beta)^2 - \gamma], \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}_0 + \dots$$

---

(1) La tangente à $\mathcal{L}$ étant intérieure au cône caractéristique, N_0 sera positif si nous écrivons notre équation (comme on l'a dit précédemment) de telle sorte que $\mathbf{H} > 0$ corresponde à l'intérieur du cône.

(2) *Bull. de Férussac*, 1831; *Exercices d'Analyse*, t. II; etc. V. Lindelöf : *Leçons sur la théorie des résidus*, note, p. 27, et Osgood : *Madison Colloquium*, 4e conférence, n° 1, où, cependant, il est fait une distinction entre deux formes du théorème que nous considérons ci-dessus comme équivalentes. L'emploi du théorème de factorisation peut d'ailleurs être évité, ou, tout au moins, restreint au cas tout à fait élémentaire concernant le premier degré, c'est-à-dire au fait que :

$$c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots - \mathrm{T} = 0,$$

avec $c_1 \neq 0$, peut être « inversé », en donnant :

$$\tau - \left(\frac{\mathrm{T}}{c_1} + \mathrm{C}_2\mathrm{T}^2 + \dots\right) = 0,$$

avec la conséquence évidente que le quotient des deux premiers membres est une série de puissances en τ, T, avec le terme constant c_1. Pour le voir, commençons par résoudre l'équation $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma \ [x; a(t)] = 0$ par rapport à t, ce qui peut se faire régulièrement (puisque le coefficient de $(t - t_0)$ est $2\mathrm{N}_0$)

β et γ étant de nouveau des développements en x $(x_1 - a_1^\circ)$, $(x_2 - a_2^\circ)$, ..., $(x_m - a_m^\circ)$, le premier commençant généralement par des termes linéaires et le deuxième par des termes quadratiques. Dans l'intégrale (3) où, à présent, on prend $m = 3$, pendant que $v = \frac{V}{\sqrt{\Gamma}}$, on peut supposer que $\frac{V[x;a(t)]\chi(t)}{\sqrt{N(x,t)}}$ est développable suivant les puissances de $(t - \beta)$, de telle sorte que

$$\frac{V}{\sqrt{N}} = P_0 + P_1(t - \beta) + ..., \quad \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{P_0 + P_1(t-\beta) + ...}{\sqrt{(t-\beta)^2 - \gamma}},$$

les P étant des fonctions régulières des x.

Chaque terme impair en $(t - \beta)$ donne, par intégration, une puissance positive de $\sqrt{(t-\beta)^2 - \gamma}$. On peut alors introduire, dans les termes pairs, la variable $(t - \beta)^2 - \gamma$

---

et donne $t = \vartheta$, où ϑ est une série ordonnée suivant les puissances de $(x_i - a_i^0)$. En posant $t - \vartheta = \tau$, on trouve :

$$\Gamma[x; a(t)] = -K + N_0\tau^2 + ... ;$$

K (qui est le minimum de Γ quand x reste fixe et que a décrit $\mathcal{L}$) est, lui aussi, une série de puissances en $(x_i - a_i^0)$, commençant par des termes quadratiques (les points représentent des termes en τ^3, τ^4, etc.). On peut extraire la racine carrée de la somme des termes autres que $-$ K, ce qui donne :

$$\Gamma[x; a(t)] = -K + N_0(\tau + ...)^2$$

$$= [-\sqrt{K} + \sqrt{N_0}(\tau + ...)]\ [+\sqrt{K} + \sqrt{N_0}(\tau + ...)].$$

Si maintenant nous appliquons à chaque facteur le principe d'inversion ci-dessus mentionné, on trouvera que le premier facteur, par exemple, est proportionnel à une série telle que

$$\tau = C_1\sqrt{\frac{K}{N_0}} - C_2\frac{K}{N_0} - C_3\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\frac{3}{2}} - .... = \tau - \mu\sqrt{K} - \nu,$$

(μ et ν sont des séries entières en K); et le produit

$$(\tau - \mu\sqrt{K} - \nu)(\tau + \mu\sqrt{K} - \nu) = (\tau - \nu)^2 - \mu^2 K$$

aura la forme voulue, avec $\vartheta + \nu = \beta$, $\mu^2 K = \gamma$.

Le résultat du texte, ainsi que la manière dont nous l'employons, est dû à Poincaré, dans son mémoire *Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes* (*Acta Mathematica*, vol. XXII, 1899, p. 114 et suiv.)

au lieu de $(t-\beta)^2$. Le développement suivant les puissances entières de cette nouvelle variable étant

$$Q_0 + Q_1 \left[(t-\beta)^2 - \gamma\right] + Q_2 \left[(t-\beta)^2 - \gamma\right]^2 + \cdots,$$

on voit que chaque terme, sauf le premier, donne des quantités finies et même infinitésimales dans le voisinage de $\mathcal{L}$; le premier terme, d'un autre côté, admet l'intégrale indéfinie

$$(4) \qquad Q_0 \int \frac{dt}{\sqrt{(t-\beta)^2 - \gamma}} = Q_0 \log \left[\frac{t-\beta+\sqrt{(t-\beta)^2-\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\right],$$

expression entièrement semblable à (2) à notre point de vue, $\sqrt{\gamma}$ correspondant à la quantité $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ de M. Volterra (1).

73. Nous avons seulement considéré l'intégrale indéfinie de

$$v(x;\, a)\, \chi\, (t)\, dt.$$

Mais on doit, pour le but qui nous intéresse, faire une remarque essentielle concernant les limites d'intégration.

Si on les prend constantes, et quelles que soient les valeurs de ces constantes, de telle sorte que le segment d'intégration sur $\mathcal{L}$ soit complètement indépendant de la position du point x, l'intégrale (3) ainsi obtenue vérifiera certainement l'équation donnée, pour la même raison que dans le cas classique de la théorie des potentiels (savoir que chaque différentiation par rapport aux x peut se faire sous le signe $\int$, en traitant t comme une constante).

Darboux (2) a été le premier, à notre connaissance, à

(1) γ est, à un facteur près, holomorphe et différent de zéro, le minimum de Γ quand a décrit $\mathcal{L}$, le point x restant fixe.

(2) V. *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II,, p. 67. Darboux opère sur l'intégrale

$$\int \varphi(u)\, (u-x)^{\mu}\, (y-u)^{\mu'} du,$$

qui, prise entre des limites constantes, vérifie (comme fonction de x et de y)

découvrir la raison générale d'un fait digne de remarque dont des cas particuliers s'étaient déjà rencontrés pour quelques formules antérieures : savoir que cette même propriété de **v** est encore valable quand on intègre entre des limites variables convenablement choisies. Cette remarque de Darboux peut être considérée comme contenant implicitement le principe qui servira de base à nos calculs ultérieurs. Son raisonnement est remarquablement simple et peut, dans notre notation, s'exprimer comme il suit.

Intégrant tout d'abord le long d'un arc fixe de $\mathcal{L}$, il peut évidemment arriver que Γ soit susceptible de changer de signe le long de cet arc : tel sera, en particulier, le cas si l'une au moins des nappes du conoïde caractéristique de sommet x coupe $\mathcal{L}$ à l'intérieur de l'arc en question. Supposons, par exemple (fig. 7), qu'il en soit ainsi pour une seule nappe, la nappe « directe ». Le segment d'intégration — qui correspondra, par exemple, à $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$ — étant ainsi divisé par le point d'intersection a en deux parties, l'une à l'extérieur du conoïde, l'autre à l'intérieur : supposons que la dernière corresponde aux plus grandes valeurs de t, c'est-à-dire contienne la limite supérieure t_0. Alors, si θ est la valeur de t qui donne le point de division a, l'intégrale (dans laquelle V et χ sont, bien entendu, des quantités réelles) se composera de deux parties, l'une imaginaire $\mathbf{v}_1$ et l'autre réelle $\mathbf{v}_2$, et il est

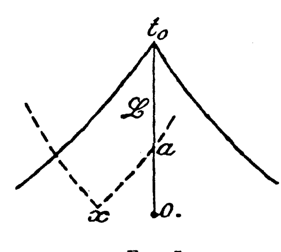


FIG. 7.

l'équation aux dérivées partielles d' « Euler-Poisson », et on suppose les limites constantes prises de manière à inclure à la fois x et y : ce qui correspondra, dans notre figure, au cas où les deux nappes du conoïde caractéristique ayant ce point n pour sommet couperont toutes les deux $\mathcal{L}$ à l'intérieur du segment d'intégration (fixe) primitif, la partie utile de l'intégrale étant relative à la portion de $\mathcal{L}$ qui est extérieure au conoïde. Quant aux constantes μ et μ', Darboux observe que le raisonnement du texte s'applique toutes les fois que leurs valeurs sont des nombres fractionnaires de la forme $\frac{2p+1}{2q}$ (où p et q sont des entiers).

clair, par conséquent, que *chacune d'elles doit, séparément, être une solution de l'équation donnée.*

Ceci est la conclusion générale de Darboux. On voit que, au lieu d'intégrer depuis o jusqu'à t_0, on peut prendre une limite égale à θ, laquelle quantité a, dans la notation du numéro précédent, la valeur

$$\beta + \sqrt{\gamma}.$$

Telles sont, par exemple (θ étant égal à $t + r$), les limites entre lesquelles on a à intégrer (1) pour obtenir la quantité (2) de M. Volterra; t étant, d'un autre côté, remplacé par t_0, l'intégrale indéfinie calculée au numéro précédent sera aussi l'intégrale définie et donnera la valeur de (3) si cette dernière est considérée comme il a été dit ci-dessus. Naturellement, cette expression d'une solution de l'équation différentielle n'est valable que si θ est supposé plus petit que t_0, c'est-à-dire quand le point x est à l'intérieur du demi-conoïde inverse ayant $t = t_0$ comme sommet.

Cette solution, comme nous venons de le prouver, admet $\mathcal{L}$ comme singularité logarithmique. On peut prévoir que, si on la substitue dans la formule fondamentale, elle se comportera exactement comme (2) dans la méthode de M. Volterra [le petit cylindre de M. Volterra [1] devant être remplacé par une surface tubulaire autour de $\mathcal{L}$] et donnera une valeur de l'intégrale :

$$\int_{\mathcal{L}} \chi(t) u \,[a(t)]\, dt.$$

74. Il peut être commode, cependant, d'introduire, dans des cas semblables, un système spécial de coordonnées curvilignes pour le point x. L'une d'entre elles sera la quantité déjà employée θ. Pour chaque valeur donnée de θ, le lieu du point x sera le demi-conoïde caractéristique (ayant le point ω, correspondant sur $\mathcal{L}$ à $t = \theta$, pour sommet) sur lequel la position de ce point sera complètement déterminée si on donne :

1° Un paramètre [2] λ définissant la direction initiale d'une des bicaractéristiques qui sont les génératrices du conoïde;

---

(1) *Acta Mathematica*, vol. XVIII, p. 174.

(2) Nous traitons le cas de $m = 3$. Mais des calculs analogues seraient valables pour toutes les valeurs impaires de m:

2° Une valeur de s, définissant un point de cette bicaractéristique.

La valeur de s contiendrait (voir Livre II) un facteur arbitraire de proportionnalité (α, dans la notation du n° 57) : on peut choisir ce facteur d'une manière déterminée pour chaque valeur de λ et supposer que cela ait été fait de manière que :

a) s soit positif sur le demi-conoïde utile (c'est-à-dire rétrograde) de sommet ω.

b) les valeurs initiales (valeurs au sommet) de $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ sur chaque bicaractéristique (λ) soient des fonctions régulières de θ et de λ;

c) ces trois quantités ne s'annulent pas simultanément et que, par exemple, la somme de leurs carrés soit toujours plus grande qu'un nombre positif donné, quels que soient θ et λ.

Moyennant ces hypothèses, on peut prendre θ, λ et s comme coordonnées curvilignes; x_1, x_2, x_3 seront des fonctions régulières (ou même holomorphes) de θ, λ et s, et la réciproque sera vraie toutes les fois que nous ne serons pas dans le voisinage de $\mathcal{L}$.

75. a étant un point de $\mathcal{L}$ correspondant à une valeur de t supérieure à θ, la quantité $\Gamma\ (x;\ a)$ sera de la forme :

$$\Gamma = (t - \theta)\ w\ (\theta,\ \lambda,\ s,\ t), \tag{5}$$

$w > 0$ étant régulier et différent de zéro quand le point x s'approche d'un point du conoïde autre que le sommet a (le signe du premier facteur doit être inversé quand le demi-conoïde employé pour w est celui qui contient la direction des t croissants sur $\mathcal{L}$).

Dans le voisinage du sommet, cette expression n'est plus valable, mais la suivante subsiste : si on appelle τ la différence

$$\tau = t - \theta,$$

on peut écrire

$$\Gamma = 2\mathrm{M}s\tau + \mathrm{N}\tau^2,$$

M et N étant deux fonctions régulières prenant, quand x coïncide avec a, les valeurs

$$\mathrm{M}_0 = \sum_i \frac{1}{2}\ \xi_i\ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha_i}, \qquad \mathrm{N}_0 = \mathrm{H}\ (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

où les α et les ξ signifient

$$\alpha_i = \frac{da_i}{dt}, \quad \xi_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{s=0}; \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

M_0 et N_0 ne sont pas seulement différents de zéro, mais aussi positifs (N_0, comme on l'a dit précédemment à cause de notre hypothèse sur le signe de $\mathbf{H}$; M_0, à cause de notre hypothèse (a) concernant le signe de s sur le demi-conoïde) (1).

On obtient immédiatement la formule ci-dessus en remarquant que le second terme peut représenter $\Gamma(\omega; a)$ et le premier la différence $\Gamma(x; a) - \Gamma(\omega; a)$. On voit même que l'on peut supposer N indépendant de s et de λ. Ce n'est naturellement pas le cas pour M; mais on peut supposer sa valeur initiale M_0 indépendante de λ (donc fonction du seul θ) par un choix convenable du facteur de proportionnalité dans s (et cela sans contradiction avec nos hypothèses précédentes (a), (b), (c)). Comme, pour les faibles valeurs de s, on a sensiblement

$$x_i = a_i + s\frac{dx_i}{ds} = a_i + s\xi_i,$$

cela signifie, géométriquement, que, pour de telles valeurs de s, les directions des tangentes aux deux lignes coordonnées, qui correspondent respectivement à θ variant seul et à λ variant seul, sont transversales l'une à l'autre, c'est-à-dire conjuguées par rapport au conoïde caractéristique, de telle sorte que si cette petite valeur de s reste constante ainsi que θ, λ variant seul, le point correspondant décrira sensiblement une petite ellipse dont le plan est transversal à $\mathcal{L}$.

Avec cette évaluation de Γ, on a

$$\mathbf{v} = \int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi(\theta+\tau)\mathrm{V}(\theta,\lambda,s,\theta+\tau)}{\sqrt{2\mathrm{M}s\tau + \mathrm{N}\tau^2}}\,d\tau\,;$$

V est une fonction holomorphe égale à $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ pour $s = \tau = 0$.

Quant à la fonction $\chi(t)$, supposons, non seulement qu'elle est régulière, mais aussi qu'elle ne change pas de signe — soit, par exemple $\chi(t) > 0$ — dans le voisinage d'un point déterminé $A(t = \theta_0)$ de $\mathcal{L}$ que nous allons considérer en particulier.

Essayons, x étant pris voisin d'un point tel que A, de trouver les valeurs asymptotiques de $\mathbf{v}$ et des dérivées $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial\lambda}$, $\frac{d\mathbf{v}}{ds}$.

(1) Car x doit être à l'intérieur du conoïde de sommet a — par conséquent Γ est positif — quand s et τ sont tous deux positifs (ce dernier suffisamment petit).

En commençant par cette dernière, on a :

(6) $$\frac{dv}{ds} = -\int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi V \left(M + s\frac{dM}{ds}\right) \tau d\tau}{(2\,Ms\tau + N\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi \frac{dV}{ds}\, d\tau}{\sqrt{2\,Ms\tau + N\tau^2}}.$$

Le premier terme de cette expression en donne évidemment la partie principale. De A comme centre, on peut décrire une petite sphère telle que, si elle contient les points x et a, les quantités M, N, χ et V peuvent être remplacées, avec une erreur relative arbitrairement petite, par les valeurs M_0, N_0, $\chi = \chi(\theta_0)$, $\frac{1}{\sqrt{\Delta_A}}$ qu'elles ont au point A. Si on désigne par τ_1 la valeur positive de τ correspondant à une intersection de cette surface sphérique avec $\mathcal{L}$, l'intégrale de τ_1 à $t_0 - \theta$ reste finie et continue quand s tend vers zéro. L'intégrale de zéro à τ_1, qui a tous ses éléments positifs, peut être, avec une très petite erreur relative, représentée par :

$$\frac{M_0}{\sqrt{\Delta}}\,\chi\,(\theta) \int_0^{\tau_1} \frac{\tau d\tau}{(2M_0 s\tau + N_0\tau^2)^{\frac{3}{2}}} = -\,\frac{\chi}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\frac{\tau_1}{2M_0 s + N_0\tau_1}}$$

Comme τ_1 est choisi une fois pour toutes, ceci donne, quand s tend vers zéro :

(6 *bis*) $$\frac{dv}{ds} \sim -\,\frac{\chi}{s\sqrt{N_0\Delta}},$$

le signe $\sim$ signifiant une égalité asymptotique.

Une méthode semblable donnerait la valeur approchée de **v**; mais on trouve celle-ci immédiatement en intégrant l'égalité asymptotique précédente, savoir :

(6 *ter*) $$v \sim \frac{-\chi}{\sqrt{N_0\Delta}} \log s,$$

valeur dont on peut voir aisément qu'elle concorde avec le résultat du numéro 72; et on aurait évidemment une évaluation analogue pour le second terme de (6).

On arriverait de la même manière à des expressions asymptotiques des autres dérivées.

Quant à l'autre singularité de **v**, c'est-à-dire au demi-conoïde de sommet $t = t_0$, on peut voir facilement quelle est la forme de **v** quand le point x s'approche d'un point déterminé quelconque du demi-conoïde (autre que le sommet) car, comme on a

$$\Gamma = (t - \theta) w,$$

où w est holomorphe (et non nul) même quand θ et t sont sensiblement égaux, ceci donne :

$$\mathbf{v} = \int_\theta^{t_0} \chi(t)\, v\,(x\,;a)\, dt = \int_\theta^{t_0} \frac{\mathrm{W}dt}{\sqrt{t-\theta}},$$

$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{V}\chi(t)}{\sqrt{w}}$ étant de nouveau holomorphe, et une telle expression est sensiblement égale à

$$2\mathrm{W}_0\sqrt{t_0 - \theta},$$

W_0 étant la valeur de W au point limite de x. Les dérivées de par rapport à λ ou s seront évidemment d'une forme tout à fait semblable.

76. L'analogie de **v** avec la quantité (2) de Volterra est donc évidente; voyons ses conséquences pour notre problème d'intégration.

Dans l'espace à trois dimensions, S étant une surface pour chaque point de laquelle les données de Cauchy sont données, et qui, de plus, a une orientation d'espace (n° **27**) par rapport aux conoïdes caractéristiques, soit a un point déterminé en lequel on désire trouver la valeur de la solution u de l'équation donnée

(E) $$\mathcal{F}(u) = f,$$

qui correspond aux données précédemment mentionnées sur S. De a comme sommet, on tracera un demi-conoïde Γ, que l'on suppose délimiter avec S un volume limité Γ (fig. 8). On trace du même point à un point a' de S, à l'intérieur de Γ, une ligne arbitraire $\mathcal{L}$ (sujette uniquement, comme ci-dessus, à être intérieure à tout conoïde ayant un de ses points comme sommet), le point donné a correspondant à la valeur t_0 du paramètre. A l'aide de v et d'une fonction

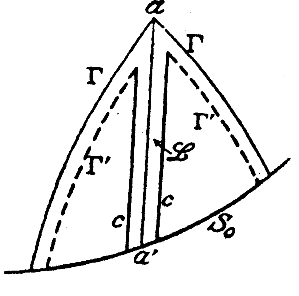


FIG. 8.

arbitraire $\chi(t)$, on construit la fonction $\mathbf{v}(x)$, solution de $\mathcal{G}(v) = 0$; puis on substitue $\mathbf{v}$ et la fonction inconnue u dans la formule fondamentale

$$\text{(F)} \qquad \iiint [\mathbf{v}\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(\mathbf{v})]\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint \left(u \frac{d\mathbf{v}}{d\nu} - \mathbf{v}\frac{du}{d\nu} - \mathrm{L}u\mathbf{v}\right) d\mathrm{S}.$$

Ceci n'est pas faisable immédiatement dans le domaine entier T : il faut exclure les singularités de $\mathbf{v}$, c'est-à-dire $\mathcal{L}$ et, au premier abord, le conoïde Γ. Mais on voit aisément d'abord que ce dernier n'a pas d'influence. En effet, remplaçons-le par un conoïde avoisinant Γ' dont le sommet sera le point $t = t_0'$ de $\mathcal{L}$. Sur Γ', on sait que Γ est de l'ordre de $(t_0 - t_0')$; et de même pour $\frac{d\Gamma}{d\nu}$, car on sait que la direction transversale à Γ' est la direction bicaractéristique, de sorte que $\frac{d}{d\nu}$ est une dérivée par rapport à s : par conséquent, en faisant tendre t_0' vers t_0, non seulement nous pouvons prendre Γ pour frontière de notre domaine d'intégration, mais aussi, comme dans la méthode de M. Volterra (que nous imitons strictement), nous n'aurons aucun terme de surface correspondant à inscrire.

77. Considérons maintenant la singularité $\mathcal{L}$, que, tout d'abord, nous avons à exclure de T. C'est ce que nous ferons à l'aide d'une petite surface tubulaire C (correspondant au cylindre de M. Volterra), qu'on obtient en égalant la coordonnée curviligne s à une constante positive très petite : c'est sur cette surface qu'on doit prendre l'intégrale double du second membre de (F).

On peut négliger les termes ne contenant que $\mathbf{v}$ en facteur : car cette quantité ne devient infinie que comme $\log s$, tandis que l'élément de surface est de l'ordre de s. Exprimons maintenant $\frac{d\mathbf{v}}{d\nu}$. Les π, sur C, sont donnés par :

$$\pi_1 d\mathrm{S} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial\lambda}\frac{\partial x_3}{\partial\theta} - \frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\frac{\partial x_2}{\partial\theta}\right) d\lambda\, d\theta, \qquad \pi_2 d\mathrm{S} = \ldots,$$

au signe près (ou, ce qui revient au même, à une permutation convenable entre les x près). On obtiendra le signe exact dans ces formules en remarquant que la direction des s croissants sur chaque bicaractéristique est dirigée vers l'intérieur du domaine

d'intégration, de sorte qu'on écrira les quantités ci-dessus de telle manière que

$$\pi_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + \pi_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + \pi_3 \frac{\partial x_3}{\partial s},$$

c'est-à-dire le déterminant (Jacobien de x_1, x_2, x_3 par rapport à s, λ, θ)

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

soit positif (géométriquement parlant, que le trièdre des directions s, λ, θ dans le sens croissant et le trièdre des coordonnées soient disposés de la même manière). Supposons (par une permutation entre les x, ou un changement de signe de λ, si cela est nécessaire) qu'il en soit ainsi : alors, si on désigne par φ_1, φ_2, φ_3 les dérivées partielles d'une fonction quelconque φ, la dérivée transversale de φ le long de C sera donnée (n^{os} **38-40**) par

$$\frac{d\varphi}{d\nu} dS = \sum_i \frac{1}{2} \pi_i dS \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\lambda d\theta$$

$$= \text{(sensiblement) } s. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} & \xi_1' & \alpha_1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} & \xi_2' & \alpha_2 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \varphi_3} & \xi_3' & \alpha_3 \end{vmatrix} d\lambda d\theta$$

$\left(\text{avec } \xi_i' = \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda}\right)$, à cause de $x_i = \alpha_i + s\xi_i$. On peut employer,

pour le déterminant ainsi donné comme facteur de $d\lambda d\theta$, la notation abrégée

(7) $$s \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi_i} & \xi_i' & \alpha_i \end{vmatrix}$$

On voit déjà que les coefficients des $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi_i}$ sont des fonctions holomorphes de θ, λ, s, qui contiennent s en facteur. On trouve facilement la valeur de l'expression (7) en la multipliant par le discriminant

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{i1} & \mathrm{H}_{i2} & \mathrm{H}_{i3} \end{vmatrix}$$

de **H**, ce qui donne $\left(\text{si on remarque que les trois relations } \psi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi_i} \text{ sont équivalentes à } \varphi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}\right)$

$$s \begin{vmatrix} \varphi_i & \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi_i} & \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \alpha_i} \end{vmatrix};$$

on multiplie ensuite par le Jacobien précédent j, ce qui donne :

$$s \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ 0 & s\mathbf{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') & * \\ \mathrm{M}_0 & * & \mathrm{N}_0 \end{vmatrix}$$

Les éléments remplacés par le signe * sont sensiblement égaux à $s\mathrm{M}'_0$, donc, en tout cas, de l'ordre de s, mais deviennent de l'ordre de s^2 dans l'hypothèse [1] de M_0 indépendant de λ. Le déterminant ci-dessus contient ainsi s en facteur, et (7) est sensiblement égal, quand s est petit, à

$$s^2 \frac{\Delta}{j} \mathbf{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') \left(\mathrm{N}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \mathrm{M}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right).$$

Le déterminant j (qui est positif dans notre cas) est sensiblement égal à

$$j \sim s \, |\xi_i \, \xi_i' \, \alpha_i|,$$

(1) Quand cette hypothèse est réalisée, la direction λ est sensiblement transversale au plan mené par les directions θ et s.

de sorte que

$$\iint_c u \frac{dv}{d\nu} ds = \iint_c u \frac{s\Delta \mathbf{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3')}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}$$

$$\left[(N_0 + \ldots) \frac{\partial v}{\partial s} - (M_0 + \ldots) \frac{\partial v}{\partial \theta} + (\ldots.) \frac{\partial v}{\partial \lambda}\right] d\lambda d\theta$$

(les points représentant des termes d'ordre supérieur en s).

On peut éliminer $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ $\left(\text{et de même } \frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)$ dans l'intégration du terme correspondant $\left(\text{soit } \iint P \frac{\partial v}{\partial \theta} d\lambda d\theta\right)$ par rapport à θ, une intégration par parties donnant une intégrale simple $\left(\int P\, v\, d\lambda \text{ pour } \theta = t_1, t_0\right)$ et une intégrale double en v, $\iint v \frac{\partial P}{\partial \theta} d\lambda d\theta$, qui sont toutes deux infinitésimales avec s, comme précédemment. Finalement, en tenant compte de (6 *bis*), on n'a plus qu'à intégrer, par rapport à θ, le produit de l'intégrale

$$\int \frac{\mathbf{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3')}{j} d\lambda = \int \frac{\mathbf{H}(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \end{vmatrix}} \tag{8}$$

par la quantité

$$- u\chi\sqrt{N_0 \Delta}. \tag{9}$$

Une intégrale telle que (8), prise le long de la conique

$$\mathbf{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

décrite par le point dont les coordonnées homogènes sont ξ_1, ξ_2, ξ_3, est évidemment finie quand le point $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est à l'intérieur

de cette conique (comme c'est le cas ici). On trouve sa valeur en observant que la quantité à intégrer ne change pas quand on multiplie ξ_1, ξ_2, ξ_3 par un facteur commun quelconque (que ce soit une constante ou une fonction de λ), et que, de plus, cette quantité est multipliée par $\mathcal{D}^{-1}$ quand les variables ξ (et aussi par conséquent α) sont soumises à une substitution linéaire de déterminant $\mathcal{D}$. Comme, par cette dernière opération, on peut réduire la forme $\mathbf{H}$ à $\overline{\xi}_3^2 - \overline{\xi}_1^2 - \overline{\xi}_2^2$ (en désignant par $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_3$ les nouvelles variables) et, par conséquent, prendre simplement $\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_3 \cos\lambda$, $\overline{\xi}_2 = \overline{\xi}_3 \sin\lambda$ (le déterminant $\mathcal{D}$ étant alors égal à $\sqrt{\Delta}$), l'intégrale ci-dessus est :

$$(8') \quad \pm \frac{1}{\mathcal{D}} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\overline{\alpha}_3 - \overline{\alpha}_1 \cos\lambda - \overline{\alpha}_2 \sin\lambda} = \pm \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{\overline{\alpha}_3^2 - \overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_2^2}}$$

$$= \pm 2\pi \frac{1}{\sqrt{\Delta \mathbf{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}} = \pm 2\pi \sqrt{\frac{1}{\Delta N_0}}.$$

Le signe dépend du sens dans lequel est décrite la conique. Dans le cas actuel, comme on l'a vu, ce sens doit être tel que le déterminant au dénominateur de (8) soit positif. Comme le point (ξ_1', ξ_2', ξ_3') appartient à la région extérieure au conoïde [savoir celle dans laquelle $\mathbf{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') < 0$], le signe correct est le signe —. Le facteur $\sqrt{N_0\Delta}$ dans l'expression (9) étant détruit par (8'), l'intégration par rapport à θ donne finalement

$$\iint_c u \frac{d\mathrm{v}}{d\nu} dS = 2\pi \int_{\mathcal{L}} \chi(t) u[a(t)]\, dt.$$

de sorte que la formule fondamentale devient [puisque $\mathcal{F}(u) = f$ et $\mathcal{G}(\mathrm{v}) = 0$]

$$(10) \quad 2\pi \int_{\mathcal{L}} \chi(t) u[a(t)]\, dt = \iiint_T \mathrm{v} f\, dx_1 dx_2 dx_3 + \iint_{S_0} \left(\mathrm{v} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\mathrm{v}}{d\nu} + \mathrm{L} u \mathrm{v} \right) dS.$$

C'est le résultat qui correspond exactement à celui de M. Volterra, et il est évidemment subordonné, comme lui, aux observations précédentes.

78. ***Cas d'un plus grand nombre de variables.*** — Nous avons dit que la théorie de (e_2) et de (e_3) a été étendue par M. Tedone aux équations analogues à m variables indépendantes. De même que pour (e_2) et (e_3), les formules données par M. Tedone (*Annali di Mat.*, 3ᵉ série, t. I, 1898) pour l'intégration de l'équation

$$(e_{m-1}) \qquad \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{dx_1^{\,2}} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{m-1}}\right) = 0$$

ne donnent pas immédiatement la valeur de u_a, mais une intégrale de la forme

$$(10') \qquad \int_{t_1}^{t_0} u\,(a_1, \cdots, a_m, t)\,(t_0 - t)^{m-3}\,dt.$$

d'où l'on doit déduire u_a par une différentiation d'ordre $(m - 2)$.

On peut donc prévoir que les expressions [analogues aux quantités (2) de M. Volterra] introduites par M. Tedone dans ses calculs pour m impair se déduiront de la solution élémentaire par un certain nombre d'intégrations le long d'une ligne telle que $\mathfrak{L}$ (qui est, en l'espèce, une parallèle à l'axe des t). On verra plus loin que tel est bien le cas; mais le fait est qu'il faudra, pour cela, l'emploi d'intégrales généralisées, telles qu'on va les définir ci-dessous.

Auparavant, il faut noter une particularité remarquable de ces solutions de M. Tedone. Si on considère la formule de Poisson pour les ondes sphériques [formule (P) du Livre II], on voit immédiatement qu'il faut différentier les valeurs données de la fonction u_0, tout au moins pour un déplacement radial du point (x, y, z), de sorte qu'il y a lieu de considérer cette fonction comme admettant des dérivées premières pour un tel déplacement, c'est-à-dire dans n'importe quelle direction, puisque le point (x_0, y_0, z_0) est arbitraire, et l'on verra bientôt que l'existence de telles dérivées est aussi implicitement admise dans la formule (1'), Livre II, concernant les ondes cylindriques. Evidemment nous pouvons considérer cette hypothèse comme naturelle, car en

l'absence de dérivées premières, ou même secondes, on peut dire que l'équation différentielle elle-même n'aurait pas de sens (quoique des problèmes impliquant de telles contradictions apparentes soient très souvent étudiés par les analystes) (1).

Si maintenant on s'occupe des solutions de Tedone pour les valeurs supérieures de m, on voit qu'elles impliquent des dérivées supérieures des données, l'ordre de dérivation étant $\frac{m}{2} - 1$ pour m pair et $\frac{m}{2} - \frac{3}{2}$ pour m impair : c'est-à-dire de n'importe quel ordre, quelque grand qu'il soit, si le nombre des variables indépendantes est suffisamment grand.

Qu'arrivera-t-il si les fonctions u_0 et u n'admettent pas de dérivées jusqu'à l'ordre dont il s'agit ? Il faut s'attendre à ce qu'*aucune solution du problème de Cauchy n'existe* dans ce cas.

Pour le démontrer en toute rigueur, nous partirons, non pas des formules finales (auxquelles il a été fait allusion ci-dessus) qui donnent la solution u elle-même, mais des formules préparatoires qui (comme il vient d'être expliqué) donnent la valeur de la quantité (10').

On sait que cette quantité admet au moins $(m - 2)$ dérivées, la $(m - 2)^e$ étant, à un facteur numérique près, égale à $u(t_0)$; il suffit pour la validité de ceci que u soit fini et continu : on est ainsi certain que toutes les différentiations exécutées par M. Tedone sur les seconds membres des formules en question [formules (11), (12), de son Mémoire] pour obtenir les formules suivantes [formules (13) à (24)] doivent être possibles.

Prenons simplement pour S l'hyperplan (2) $t = 0$ [de sorte que $t = 0$ dans l'expression (10)] et tenons seulement compte de la première fonction donnée u_0, la seconde u_1 étant

(1) Tel est le cas pour le problème de Dirichlet, qui porte sur une équation différentielle du second ordre et que cependant les analystes ont essayé de résoudre sans même supposer une dérivée première pour les données à la frontière. Naturellement, l'équation différentielle perd toute espèce de sens sur cette frontière elle-même, mais elle est supposée vérifiée dans tout voisinage, quelque proche qu'il soit, de cette frontière.

(2) M. Tedone lui-même traite n'importe quelle forme de S.

supposée nulle. Choisissons aussi le cas de m pair [1] (de manière à éviter les difficultés qu'on va rencontrer un peu plus loin).

Alors, si on désigne par r la distance

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_{m-1} - a_{m-1})^2}$$

entre un point $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ de la variété $t = 0$ et un point $(a_1, \ldots, a_{m-1})$, la quantité que l'on a à différentier consiste (pour $\omega = 1$), dans nos notations [2], en un produit d'un facteur numérique par l'intégrale

$$(11) \qquad \int_0^{t_0} \left(t_0^2 - r^2\right)^{\frac{m}{2} - 2} r M_r dr,$$

où M_r représente la valeur moyenne de u_0 le long de l'arête (Livre I, n° **2**, note) hypersphérique de rayon r dans l'hyperplan S. Les $\left(\frac{m}{2} - 2\right)$ premières différentiations peuvent de toute façon se faire sous le signe $\int$; mais, le résultat ainsi obtenu étant de la forme

$$(11') \qquad \int_0^{t_0} r X(t_0, r) M_r dr,$$

où $X(t_0, r)$ est un polynôme homogène [3] de degré $\frac{m}{2} - 2$ en t_0, r tel que $\xi(t) = tX(t, t)$ ne s'annule pas (excepté pour $t = 0$), les $\frac{m}{2}$ dérivées suivantes de l'expression (11) *ne peuvent pas* exister si les $\frac{m}{2} - 1$ premières dérivées de M_r n'existent pas [4].

---

(1) La conclusion correspondante pour m impair en résulte, par « descente » (V. Livre IV).

(2) V. la formule (22), p. 13, de M. Tedone. M. Tedone désigne par m ce que nous avons appelé $m - 1$, et par φ ce que nous appelons u_0; son nombre p est notre nombre $\frac{m}{2} - 1$ (pour m pair).

(3) $X(t, 1)$ est (à un facteur numérique près) le polynôme de Legendre d'ordre $\frac{m}{2} - 2$.

(4) On voit immédiatement que la dérivée première de (11') est égale à

$$M_{t_0} \xi(t_0) + \int_0^{t_0} M_r r \frac{\partial X}{\partial t_0} dr.$$

II. — La partie finie d'une intégrale simple infinie.

79. Grâce aux considérations précédentes, on peut dire que, tout au moins pour $m = 3$, la solution de M. Volterra est complètement étendue à l'équation hyperbolique (normale) la plus générale. On doit constater seulement son caractère indirect, reposant sur l'introduction de la courbe arbitraire $\mathcal{L}$, qui, bien entendu, doit entièrement s'éliminer en fin de compte.

Si, par exemple, on désire intégrer l'équation des ondes cylindriques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} - \mathrm{K}u = 0,$$

il faudra prendre (comme cela résulte de l'expression de la solution élémentaire, trouvée au Livre II) :

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{v} = \int \frac{\mathrm{Ch}\sqrt{\mathrm{K}[(t-t_0)^2 - r^2]}}{\sqrt{(t-t_0)^2 - r^2}}\, dt_0.$$

C'est l'expression que M. Coulon, dans sa *Thèse* déjà citée, aurait dû introduire dans ses calculs, pour imiter strictement le procédé de M. Volterra. Sa complexité permet parfaitement de comprendre pourquoi il n'a pas pu la découvrir, ne connaissant pas la méthode générale pour l'atteindre. On

---

Le second terme de cette quantité peut sûrement se différentier, de sorte que ce ne peut *pas* être le cas pour l'expression totale s'il n'en est pas de même pour M_{t_0}.

En admettant donc que $\mathrm{M}_1{}'$ existe, la dérivée seconde de (11′) contiendra le terme $\xi(t_0)\,\mathrm{M}'_{t_0}$, un terme en M_{t_0} et un terme intégral. Si on essaye alors de différentier une troisième fois, il est acquis que cela est possible pour tous les termes sauf $\xi(t_0)\,\mathrm{M}'_{t_0}$, de sorte que l'existence de M''_{t_0} est nécessaire; et ainsi de suite pour toutes les dérivées, de sorte que la conclusion du texte est démontrée.

Comme, sous le signe $\int$, le degré du coefficient de M_r décroit d'une unité de chaque opération à la suivante, la $\left(\frac{m}{2} - 1\right)^e$ dérivée ne contient pas de terme intégral de cette espèce, et, par conséquent, est représentée par un **S** étendu à l'arête sphérique de rayon $r = t_0$, comme c'est le cas pour (e_3). Nous reviendrons sur cette différence fondamentale entre les valeurs paires et impaires de m.

voit en même temps que cette complication est entièrement due à une quadrature dont l'effet doit finalement disparaître.

Est-il possible d'obtenir le résultat demandé sans avoir recours à cette intervention finalement inutile ? Peut-être trouvera-t-on la chose digne d'être tentée, quoiqu'on ne puisse le faire sans introduire une notion assez paradoxale dont il nous reste à parler.

80. Reprenons la différentiation dont nous venons de nous occuper, ou, plus simplement, l'opération correspondante sur des intégrales simples. Partons de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}\, dx. \tag{13}$$

Si on essayait de la différentier par rapport à b, nous avons déjà remarqué qu'il faudrait employer, dans la conception ordinaire, un changement variable convenable (aisé à trouver d'ailleurs), une différentiation directe apparaissant comme impossible : en effet, cette dernière consisterait à écrire l'expression absurde

$$-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-a)^{\frac{3}{2}}} + \left[\frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}\right]_{x=b} \tag{13'}$$

somme de deux termes dont le premier n'a pas de sens puisqu'il contient un infini d'ordre $\frac{3}{2}$ sous le signe $\int$ et dont le second n'a évidemment aucun sens.

Cependant, il y a un moyen immédiat d'effectuer directement (c'est-à-dire sans changement de variable) cette différentiation : il consiste à remplacer l'intégrale réelle (13) par la moitié de l'intégrale complexe prise le long d'un lacet formé de deux lignes le long de ab, reliées par un petit arc de cercle autour de b (fig. 9) : la différentiation ne présente aucune difficulté pour un tel circuit [1].

Fig. 9.

[1] On a supposé ici que A était analytique : hypothèse dont on peut facilement se débarrasser dès que A est supposé avoir une dérivée.

80 *bis*. Evidemment, il doit exister, d'une manière ou d'une autre, un moyen d'arriver au même but sans introduire des quantités complexes. En fait, il suffit de remarquer que (en remplaçant b par x à la limite supérieure), non pas l'intégrale

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx, \tag{14}$$

mais la somme algébrique

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx - 2\frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}$$

tend vers une limite parfaitement définie quand a tend vers b. De plus, il en est de même pour

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{B(x)}{\sqrt{b-x}}, \tag{15}$$

si B est une fonction quelconque de x, à condition qu'elle soit dérivable (ou qu'elle vérifie tout au moins la condition de Lipschitz $|B(x_2) - B(x_1)| < K\,|x_2 - x_1|$), et telle que $B(b) = -2A(b)$.

De plus, *le résultat obtenu est indépendant du choix de cette fonction* B, sous les conditions précédentes : ceci provient du fait que le dénominateur est d'un ordre fractionnaire, tandis qu'un changement de la fonction B (avec nos hypothèses) changerait le numérateur par l'introduction de termes contenant au moins en facteur $(b - x)$ à la première puissance, de sorte que les termes correspondants de la fraction s'annuleraient nécessairement pour $x = b$. Par conséquent, pour calculer la limite de l'expression (15), on n'a pas besoin d'indiquer quelle fonction particulière B on choisit. On désignera cette limite par la « partie finie » de

l'intégrale de (13') et on l'écrira

(16) $$\left| \overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}} dx,} \right.$$

le signe $\overline{|}$ s'énonçant « partie finie de ». Conformément à ce qui précède, cette expression signifiera la limite de la somme de l'intégrale (14) et d'un terme fractionnaire additif en $(b - x)$ de la forme $\frac{B(x)}{\sqrt{b-x}}$, en prenant pour B une fonction quelconque telle que :

a) elle puisse être différentiée au moins une fois (ou que tout au moins elle vérifie la condition de Lipschitz);

b) la somme en question ait une limite (la valeur de cette limite étant indépendante du choix du terme additionnel, du moment que B remplit les conditions ci-dessus).

Mais la définition précédente suppose que A lui-même remplit la condition de Lipschitz.

Si A est analytique, on peut tout aussi bien définir l'expression (16) comme la moitié de l'intégrale correspondante prise le long du lacet mentionné plus haut.

81. Il n'y a aucune difficulté à définir le même symbole pour des ordres supérieurs d'infinitude, à condition qu'ils soient fractionnaires. L'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} dx$$

n'a aucun sens (p étant un entier), mais on peut définir la quantité

(16') $$\left| \overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} dx,} \right.$$

(« partie finie » de l'intégrale en question) :

1° Si A est analytique, comme moitié de l'intégrale correspondante prise le long du lacet *ab;*

2° A étant simplement supposé admettre p dérivées dans le voisinage de b, comme limite, pour $x = b$, de la somme

$$(15') \qquad \int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx + \frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}},$$

$B(x)$ étant de nouveau une fonction quelconque, sous la double condition :

a) que la limite en question existe;

b) que B admette p dérivées, au moins, dans le voisinage de $x = b$.

On peut vérifier immédiatement par le calcul (voir plus bas) que les deux définitions concordent.

Le choix arbitraire de B n'a, ici encore, aucune influence sur la valeur de la limite obtenue : car la condition (*a*) détermine les valeurs des $(p-1)$ dérivées premières de B en b, de sorte que ce qui reste arbitraire dans le numérateur du terme additif est au moins un infiniment petit d'ordre $(b-x)^p$.

On peut dire brièvement — le sens de ceci ayant, nous l'espérons, été rendu clair par les explications précédentes — qu'on donne une valeur à l'intégrale en en retranchant des infinis fractionnaires en b.

Il ne faut cependant pas oublier que A lui-même est supposé admettre les dérivées correspondantes en b.

82. Naturellement, on pourrait aussi introduire la même conception pour l'intégrale

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\mu}}}\right.,$$

où μ n'est plus nécessairement égal à $\frac{1}{2}$, mais est encore nécessairement compris entre o et 1, limites exclues : cette quantité peut se définir dans les mêmes hypothèses que (16) ou (16').

Elle peut aussi s'exprimer, comme dans les cas précédents, à l'aide d'une intégrale complexe prise le long du circuit de la figure 9, intégrale qui, cette fois, devrait être

divisée par $1 - e^{2i\pi\mu}$. Elle peut donc être aussi considérée comme obtenue par différentiation de

$$\int_a^b \frac{\mathrm{A}(x)}{(b-x)^\mu}\,dx. \tag{12'}$$

L'intégrale

$$\left|\int_a^b \frac{\mathrm{A}(x)\,dx}{[(x-a)(b-x]^{p+\frac{1}{2}}},\right.$$

où la quantité à intégrer est infinie aux deux limites, est la moitié de l'intégrale complexe correspondante le long du circuit de la figure 9 *bis*. Pour l'intégrale analogue

$$\int_a^b \frac{\mathrm{A}(x)\,dx}{[(x-a)(b-x)]^{p+\mu}},$$

on devrait donner au circuit une forme telle que celle représentée dans la figure 9 *ter*, de manière que la quantité à intégrer revienne à une valeur finale égale à sa valeur initiale.



Fig. 9 *bis*. Fig. 9 *ter*.

Il est clair qu'on pourrait aussi introduire d'autres fonctions que les puissances de $(b - x)$, et qu'on pourrait les traiter de la même manière; par exemple :

$$\frac{1}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\log(b-x).$$

83. De telles considérations pourraient même être étendues dans une certaine mesure pour

$$\int_a^b \frac{\mathrm{A}(x)}{(b-x)^p}\,dx, \tag{17}$$

avec p entier.

Cette expression peut se réduire à une valeur finie par addition de termes

$$\frac{\mathrm{B}(x)}{(b-x)^{p-1}} + \mathrm{B}_1(x)\log(b-x). \tag{17bis}$$

Mais, pour $p > 1$, on pourrait, en ajoutant à $B(x)$ des termes en $(b - x)^{p-1}$, modifier le résultat d'une manière arbitraire. Dans ce cas, ce résultat n'est pas déterminé quand on ne connaît que l'intégrale (17), mais demande la connaissance des termes additifs (17 *bis*).

Ceci ne s'applique pas à $p = 1$. Mais, d'un autre côté, le résultat obtenu n'est pas invariant quand on change de variable, comme on le verra plus loin dans le cas de μ fractionnaire. On a cependant déjà employé en calcul infinitésimal quelques opérations de ce genre, mais avec une spécification explicite des termes additifs (17 *bis*) : tel est le cas pour la « valeur principale » de Cauchy, et de même pour certaines formes des dérivées secondes d'un potentiel d'espace Newtonien (tel qu'on les emploiera plus tard, n° **115** ***bis***).

84. ***Calcul effectif.*** — Un moyen simple d'obtenir la quantité (16) consiste à trouver d'abord

$$\overline{\left| \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\frac{3}{2}}} \right.} = - \frac{2}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}, \tag{18}$$

puis à remplacer $A(x)$ par $[A(x) - A(b)] + A(b)$, de sorte que l'expression se résout en

$$\int_a^b \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

intégrale généralisée ordinaire (puisque A est supposé vérifier la condition de Lipschitz), et en

$$\frac{2\,A(b)}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

De même, pour calculer

$$\overline{\left| \int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} \right.}$$

on extraira de $A(x)$ son développement suivant les puissances de $(b - x)$ par la formule de Taylor jusqu'au terme en $(b - x)^{p-1}$, ce par quoi l'expression devient une intégrale ordinaire; on doit alors intégrer (à notre sens actuel) des termes tels que

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{q+\frac{1}{2}}}}\right.,$$

dont la valeur est

$$\frac{1}{\left(q - \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{(b-a)^{q-\frac{1}{2}}}$$

de sorte que

$$(16bis) \quad \left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}}\right. = - \frac{A(b)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{1}{2}}} + \cdots$$

$$- \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\frac{1}{2}\,(b-a)^{\frac{1}{2}}} + \int_a^b \frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}},$$

$$A_1(x) = A(x) - [A(b) - A'(b)(b-x) + \cdots$$

$$+ (-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}].$$

Ceci équivaut à utiliser la première définition en prenant, pour $B(x)$:

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{A(b)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)(b-x)^{p-\frac{1}{2}}} - \frac{A'(b)}{\left(p - \frac{3}{2}\right)(b-x)^{p-\frac{3}{2}}}$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\frac{1}{2}\,(b-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si on admet que $B(x)$ est choisi de cette manière, on voit que ce qu'on peut appeler le « reste » de l'intégrale généra-

lisée — c'est-à-dire la différence entre (15′) et sa limite — est

$$\int_x^b \frac{A_1(x)}{(b-x)^{p+1}}\,dx.$$

Par conséquent, on en aura une limite supérieure — savoir $M(b-x)$ — si on en a une pour la valeur absolue de $\frac{A_1(x)}{(b-x)^p}$ ou, ce qui revient au même, une limite supérieure M pour la dérivée $p^{ième}$ de A (divisée par p !) dans le voisinage de $x = b$.

Si A est une fonction, non seulement de x, mais d'un certain nombre de paramètres α, β, ... (desquels b peut aussi dépendre), mais avec M indépendant de α, β, ..., le reste peut s'évaluer en fonction de $|b-x|$ indépendamment de α, β, ... : on peut dire que (16′) converge *uniformément*.

85. *Propriétés principales.* — Les règles de calcul concernant un symbole tel que (16′) sont généralement tout à fait identiques aux règles qui s'appliquent à des intégrales ordinaires, en ce qui concerne les *égalités*, telles que :

$$\int_a^b = \int_a^b + \int_c^b, \text{ etc...}$$

En particulier, on peut y effectuer un *changement de variable*, à condition qu'il soit régulier en b, c'est-à-dire que l'une des variables ait, par rapport à l'autre, une dérivée, finie et différente de zéro, de sorte que l'ordre des infiniment petits au voisinage de b ne soit pas changé.

Mais toute propriété impliquant des *inégalités* demande des précautions appropriées. D'abord, on ne peut rien conclure, quant au signe de l'expression

$$\left|\overline{\int \frac{A(x)\,dx}{(b+x)^{p+1}}}\right.,$$

de la connaissance du signe de la fonction A dans notre intervalle d'intégration, comme le montre immédiatement l'exemple de l'expression (18).

Limitation des valeurs des intégrales généralisées. — Ceci s'applique en particulier à la recherche de limites supérieures des valeurs d'expressions telles que (16'). Pour ceci, il n'est pas suffisant, comme cela le serait pour des intégrales ordinaires, d'avoir une limite supérieure de la quantité à intégrer et de l'intervalle d'intégration.

En calculant

$$(16') \qquad \mathrm{I} = \overline{\left| \int_a^b \frac{\mathrm{A}(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} \right.}$$

comme on l'a fait au numéro **84**, on trouve immédiatement (en raison de l'expression bien connue du reste de la série de Taylor) que :

$$(19) \qquad \mathrm{I} \leqslant \frac{|\mathrm{A}(b)|}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{1}{2}}} + \frac{|\mathrm{A}'(b)|}{\left(p-\frac{3}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{3}{2}}} \cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots \frac{|\mathrm{A}^{(p-1)}(b)|}{(p-1)\,!\,\frac{1}{2}\,(b-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(\mathrm{A}_p)}{p\,!}\sqrt{b-a},$$

où (A_p) est une limite supérieure du module de la dérivée p^{e} de A dans ab.

Par conséquent, on peut limiter la valeur absolue de I, si on a :

1° Une limite supérieure *et une limite inférieure* de l'intervalle d'intégration;

2° Des limites supérieures des valeurs absolues de la fonction A et ses p premières dérivées [1] (de A elle-même et

---

(1) Il est facile de donner des exemples d'expressions telles que (16') qui prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut quoique A reste fini. Il suffit de prendre la suivante :

$$\mathrm{I} = \overline{\left| \int_a^b \frac{f(\mathrm{N}x)\,dx}{x^{p+\frac{1}{2}}} \right.}$$

N étant un nombre positif très grand et f une fonction finie pour toute valeur, quelque grande qu'elle soit, de x. En effectuant le changement de va-

de ses $(p-1)$ premières dérivées en b, de la p^e dans l'intervalle), ou tout au moins [car l'intervalle peut se décomposer en $(a, b-\varepsilon)$ et $(b-\varepsilon, b)$] les limites supérieures de la valeur absolue de A dans (a, b) (comme d'ordinaire), des $(p-1)$ premières dérivées pour $x=b$ et de la p^e dans un certain intervalle partiel $(b-\varepsilon, b)$ adjacent à b, intervalle dont l'amplitude inverse $1/\varepsilon$ entrera aussi dans les limitations, de sorte que, si a tend vers b, l'intégrale généralisée ne tendra pas vers zéro, mais, en général, vers l'infini.

86. *Continuité.* — En remplaçant la fonction A par une autre fonction $\overline{A}$, I étant ainsi remplacé par $\overline{I}$, et en appliquant la limitation susdite à la différence $(\overline{I}-I)$, on voit que *la valeur du symbole* (16') *est continue d'ordre p, mais* non évidemment d'ordre zéro, *par rapport à la fonction A*.

87. *Différentiation.* — D'après la première conception qui nous a conduit à notre nouveau symbole, on voit immédiatement qu'*il admet directement la différentiation par rapport à b*, laquelle s'exécute en différentiant sous le signe $\int$ et en *n'écrivant aucun terme correspondant à la limite supérieure*, ces derniers termes étant compris dans les termes fractionnaires infinis qu'il y a lieu d'ajouter pour que l'intégrale ait une limite.

Il s'ensuit que *toute équation différentielle* (*linéaire*) *qui serait vérifiée par l'intégrale* (considérée comme une fonction de b), *si elle était prise entre les limites constantes a, c, l'est aussi quand une des limites est justement b.*

C'est, comme on l'a noté au numéro **73**, la remarque fondamentale de Darboux.

---

riable $Nx = z$, on voit immédiatement qu'on a l'égalité asymptotique :

$$I = N^{p-\frac{1}{2}} I_1,$$

$$I_1 = \left| \overline{\int_0^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^{p-\frac{1}{2}}}} \right. .$$

Si alors I_1 diffère de zéro, I croîtra indéfiniment comme $N^{p-\frac{1}{2}}$.

III. — Cas des intégrales multiples.

88. On étendra la notion précédente aux intégrales multiples, par la réduction habituelle de celles-ci à des intégrales simples. Soit (par exemple dans l'espace ordinaire) une intégrale telle que

$$\int\!\!\int\!\!\int_{T} \frac{A(x, y, z)}{[G(x, y, z)]^{p+\frac{1}{2}}}\, dx\, dy\, dz, \tag{20}$$

une partie S′ de la limite du domaine d'intégration T étant la surface $G = 0$, avec l'hypothèse essentielle que cette partie de la frontière ne contient pas de point singulier, c'est-à-dire qu'en aucun de ses points les dérivées partielles premières de G ne s'annulent en même temps. Alors, pour un point voisin quelconque, la distance à la frontière (ou plutôt à la partie S′ qui vient d'en être considérée) est un infiniment petit exactement du même ordre que la valeur de G.

Supposons, d'abord, que $\frac{\partial G}{\partial z}$ en particulier est partout $\neq 0$, et même qu'une parallèle quelconque à l'axe des z coupe la surface en question en un seul point $z = z_1$ et *sous un angle fini*, de sorte que l'on peut écrire $G = (z - z_1) G_1$. Supposons de plus, pour l'instant, que chaque partie de la frontière adjacente à $G = 0$ consiste en une surface cylindrique parallèle à l'axe des z (fig. 10). On écrira alors, par définition :

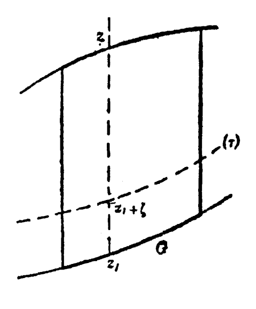


Fig. 10.

$$\overline{\int\!\!\int\!\!\int_{T} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dx\, dy\, dz} = \int\!\!\int dx\, dy\, \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dz}\right. \tag{21}$$

$$= \int\!\!\int dx\, dy\, \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A\, dz}{G_1^{p+\frac{1}{2}}\,(z - z_1)^{p+\frac{1}{2}}}}\right.,$$

si, par exemple, le segment (z_1 Z) intercepté par T sur une parallèle quelconque à l'axe des z a z_1 comme limite inférieure et si la limite supérieure Z ne correspond à aucune singularité de la quantité à intégrer.

Si ζ est une fonction de x, y et d'un paramètre très petit ε, infiniment petite avec ε et développable suivant les puissances de ε au moins jusqu'à l'ordre p, le terme en ε étant lui-même toujours différent de zéro, ceci signifie qu'on prend la limite de

$$\iint dx dy \int_{z_1+\zeta}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dz \tag{22}$$

après soustraction de termes convenables, infinis d'ordre fractionnaire en ε (savoir de la forme

$$\left. \frac{\mathcal{B}(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{\mathcal{B}_0(x, y) + \varepsilon\, \mathcal{B}_1 + \cdots + \varepsilon^{p-1}\, \mathcal{B}_{p-1}}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} \right)$$

avec la condition que la convergence de

$$\overline{\left| \int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dz \right.}$$

soit uniforme (n° **84**) quand x et y varient, pour qu'il soit permis d'échanger le passage à la limite et l'intégration par rapport à x, y, ce qui sera le cas si

$$\frac{\partial^p \left(\frac{A}{G_1{}^{p+\frac{1}{2}}} \right)}{\partial z_1{}^p}$$

est compris entre des limites finies sur toute la surface S' et dans son voisinage. D'un autre côté, G est supposé admettre des dérivées jusqu'au p^e ordre par rapport à x, y, z, de sorte que tel est aussi le cas, sur la surface en question, pour z considéré comme fonction de x, y.

Cette définition, ainsi présentée, est évidemment équivalente à la suivante.

Supposons que le voisinage de $G = 0$ soit séparé du domaine T par une surface (τ) telle que

$$(\tau) \qquad G = \gamma(x, y, z, \varepsilon),$$

dans laquelle γ désigne une quantité ayant avec zéro un voisinage d'ordre p (nº 20), — c'est-à-dire très petite, en même temps que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, quand ε tend vers zéro. Par exemple, soit γ égal à εD, en désignant par D une expression dérivable indépendante de ε. Alors, si on l'étend au domaine T_1 déduit de T en retranchant ce voisinage T_2 de la surface, l'intégrale ne tendra pas vers une limite quand ε tend vers zéro; mais elle en admettra une si on en soustrait une expression convenablement choisie de la forme

$$(23) \qquad \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{B_0 + B_1\varepsilon + \cdots + B_{p-1}\varepsilon^{p-1}}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}$$

(ce qui, naturellement, détermine complètement les coefficients B). Cette limite est égale à (21) — car (τ) peut évidemment s'écrire sous la forme $z = z_1(x, y) + \zeta$ — et, par conséquent, est entièrement indépendante du choix de la fonction D ou même de γ, avec les conditions spécifiées précédemment.

89. Mais cette nouvelle forme de la définition est aussi indépendante des restrictions précédentes concernant la position du domaine T par rapport aux axes de coordonnées. Le calcul peut être lui-même rendu indépendant de ces restrictions (sous des conditions de régularité qu'on va spécifier) à l'aide d'une transformation ponctuelle.

En supposant ici un nombre quelconque m de dimensions, rapportons le voisinage de $G = 0$ à un système de coordonnées curvilignes dont l'une sera G, les autres étant désignées par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, telles qu'elles admettent des dérivées jusqu'au p^e ordre par raport aux coordonnées Cartésiennes et que le Jacobien K ne s'annule jamais, l'élément de volume étant :

$$dT = dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = K\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}\, dG$$

$\left(\right.$où $K d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots, d\lambda_{m-1}$ est précisément ce que nous avons appelé précédemment $d\tau_G$, ou le quotient $\left.\frac{dT}{dG}\right)$. S'il en est ainsi, les courbes

$$\lambda_1 = \text{const.}, \quad \lambda_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1} = \text{const.},$$

qu'on désignera par l et qui remplaceront maintenant les parallèles à l'axe des z, doivent couper S' sous des angles finis.

Supposons d'abord que chaque partie de la frontière adjacente à $G = 0$ est un lieu de courbes coordonnées l. Il faut immédiatement noter que cette hypothèse, jointe à celles qu'on a déjà faites, implique :

1° que la surface $G = 0$ est régulière (n° 9) : plus exactement, qu'une de ses coordonnées cartésiennes, considérée comme fonction des autres, a des dérivées partielles continues jusqu'au p^e ordre;

2° que chaque portion de la limite adjacente à $G = 0$ a la même propriété;

3° que de telles limites coupent $G = 0$ sous un angle qui ne s'annule jamais (ni ne devient jamais égal à π).

Ces conditions sont nécessaires pour la validité de la définition que l'on va donner. Réciproquement, si elles sont vérifiées, on peut trouver, d'une infinité de manières, un système de coordonnées curvilignes tel qu'on l'a admis ci-dessus. Alors, on peut prendre :

$$\left|\overline{\mathbf{SSS}_T \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_m}\right. = \left|\overline{\mathbf{SSS}_T \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} K d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_{m-1} dG}\right.$$
$$= \mathbf{SS}\, d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_{m-1} \left|\overline{\int \frac{AK}{G^{p+\frac{1}{2}}} dG}\right.,$$

cette troisième forme de la définition étant encore évidemment équivalente à la seconde (et, par conséquent, indépendante de la transformation ponctuelle employée, sous l'hypothèse susdite) (¹).

(1) Il arrive souvent que l'emploi des coordonnées curvilignes n'est possible que dans le voisinage de la surface singulière S'. Il sera alors commode de

On obtient la partie finie de l'intégrale simple suivant l en la prenant à partir non de $G = 0$, mais de $G = \gamma$, puis ajoutant un certain terme complémentaire

$$\frac{\mathcal{B}}{\gamma^{p-\frac{1}{2}}}$$

où $\mathcal{B}$ est une fonction régulière de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \gamma$ (et aussi, par conséquent, des x). En intégrant par rapport aux λ, on aura évidemment une intégrale $(m - 1)^{\text{uple}}$ le long de (τ), savoir :

$$\mathbf{SS} \frac{\mathcal{B}}{\gamma^{p-\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}, \tag{24}$$

et on obtiendra la valeur de (21') en ajoutant $\mathbf{SSS}_{T_1}$ et (24), puis faisant tendre ε (et par conséquent γ) vers zéro.

Pour $p = 1$, le terme complémentaire (24) peut s'écrire de manière que son indépendance par rapport au choix de la transformation ponctuelle soit mise en évidence, savoir (en raison de notre remarque préalable concernant $K d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_m$) :

$$-2\,\mathbf{SS} \frac{A}{\sqrt{\gamma}} d\tau_G.$$

90. Il sera utile pour la suite de remarquer qu'une des restrictions géométriques précédentes peut être levée. Si, par exemple, pour l'expression (20), on veut commencer par intégrer par rapport à z, on peut le faire même si certaines parties S'' de la limite de T, adjacentes à G, sont inclinées par rapport à l'axe des z.

Pour le voir, coupons de nouveau T (les deux parties ainsi séparées étant de nouveau désignées par T_1 et T_2) par la surface (τ), laquelle coupe S'' le long d'une certaine arête Λ' (une ligne, dans l'espace ordinaire). Si, par chaque point de Λ', on mène une parallèle à l'axe des z, jusqu'à sa rencontre avec G, on engendre ainsi un cylindre $\mathcal{C}$, dont la

---

diviser T en deux parties, une partie centrale T'' où l'intégrale se calcule comme d'ordinaire, et une autre partie T' contenant tout le voisinage de S', où on emploiera l'expression (23).

région intérieure (1) sera la région remplie par les parallèles à l'axe des z qui rencontrent (τ) à l'intérieur de T. Soit $\mathfrak{T}$ la partie commune à cette région intérieure et à T; soit J l'intégrale

$$J = \left| \iiint \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dx\,dy\,dz \right.$$

étendue à $\mathfrak{T}$, tandis que I_1 sera l'intégrale (ordinaire) étendue à T_1.

En raison de la forme cylindrique de $\mathcal{C}$, l'intégrale J s'exprime comme on l'a déjà exposé, savoir :

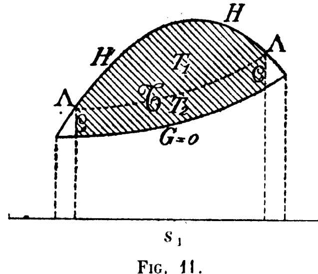


FIG. 11.

$$J = \iint_{s_1} dx\,dy \left| \int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dz, \right.$$

z_1 étant encore l'ordonnée de G et l'intégration double étant étendue à la base s_1 du cylindre $\mathcal{C}$ sur le plan des xy. Si on désigne encore par $z_1 + \zeta$ l'ordonnée correspondante de (τ), et que ζ dépende de ε de la même manière qu'auparavant, on a, par la définition de notre symbole,

$$j(x, y) = \left| \int_{z_1}^{Z} \right. = \int_{z_1+\zeta}^{Z} + \frac{\mathcal{B}(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} + \eta(x, y),$$

$\mathcal{B}(x, y, \varepsilon)$ étant une fonction qui admet un développement de Maclaurin suivant les puissances de ϵ au moins jusqu'au p^e ordre, et $\eta = \eta(x, y, \varepsilon)$ un infiniment petit. Ceci donne, en intégrant dans s_1,

$$\iint_{s_1} j(x, y)\,dx\,dy = J = I_1 + \iint \eta\,dx\,dy$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} \iint \mathcal{B}(x, y, z)\,dx\,dy.$$

(1) On suppose, pour plus de commodité, qu'on est dans le cas (qui est celui qui nous intéressera) où les parties utiles de S″ — et même le domaine entier T — se projettent sur le plan des xy à l'intérieur de l'aire s d'intégration de I. La figure 11 représente une section de T, de $\mathfrak{T}$ (ce dernier ombré), etc., par un plan parallèle à l'axe des z.

Mais l'intégrale double en η est aussi infiniment petite avec ϵ [1]; et, dans le dernier terme, à cause de la régularité supposée de (τ) et de S'', le second facteur (pour lequel il faut tenir compte de la variation simultanée de la quantité à intégrer et de l'aire d'intégration) admet des dérivées successives [2] en ϵ. Il est, par conséquent, lui-même un développement de Maclaurin [au moins jusqu'au $(p-1)^e$ ordre], de sorte que

$$(25) \qquad J - I_1 = \varepsilon_1 + \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}$$

où ϵ_1 représente la quantité infinitésimale $\iint \eta \, dx \, dy$ et où B (ε) est encore régulier en ϵ.

Si on désigne maintenant par I l'intégrale (21) que l'on veut calculer, la différence I — J sera, en général, infinie (c'est le cas pour des intégrales simples prises le long de génératrices du cylindre $\mathcal{C}$ quand leur longueur tend vers zéro); mais cet infini sera un infini fractionnaire de la forme (23) puisque $J - I_1$ (comme on vient de le démontrer) et $I - I_1$ (par définition) sont tous deux de cette forme. Ceci équivaut à écrire

$$(26) \qquad I = \overline{\left| \iint_s j(x, y)\, dx dy \right.} = \overline{\left| \iint_s dx dy \overline{\left| \int_{z_1}^{z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}} dz, \right.} \right.}$$

de sorte que le calcul de la partie finie de l'intégrale triple se réduit à deux « parties finies », l'une d'une intégrale simple, l'autre d'une intégrale double.

Ceci reste évidemment valable pour des intégrales à un nombre quelconque de dimensions, et aussi lorsque les parallèles à l'axe des z sont remplacées par des courbes l telles qu'on en a déjà considérées.

---

(1) On admet que η tend uniformément vers zéro par rapport à x, y, ce qui est légitime (n° 84) quand la p^e dérivée $\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{A}{G_1^{p+\frac{1}{2}}}\right)$ est finie dans tout le voisinage de S'.

(2) Cependant, il faut noter que ceci suppose l'existence de dérivées de B jusqu'à l'ordre $(p-1)$ par rapport à x, y, z, de sorte que, comme B contient $(p-1)$ dérivées de A et de G_1 (par rapport à z), il faudrait des dérivées de la quantité à intégrer jusqu'à l'ordre $(2p-2)$.

Par conséquent, de telles courbes ne sont pas assujetties à être tracées sur la partie non singulière S du contour.

Quant à la condition que l'angle entre l'une d'elles et la partie singulière G ne devienne nulle part infinitésimal, elle reste essentielle, comme on le verra par des exemples, quand on emploiera ce mode d'évaluation.

91. Ceci s'applique aussi à notre première hypothèse concernant la régularité de la surface.

Si la surface frontière G = o possède un point singulier a (ce qui sera justement le cas dans l'application dont nous aurons surtout à nous occuper), on devra procéder exactement comme pour des intégrales généralisées ordinaires, c'est-à-dire séparer le voisinage de ce point singulier par une petite portion de surface Σ, puis passer à la limite. Σ doit seulement avoir avec le point singulier un voisinage d'ordre p, c'est-à-dire que, par une extension naturelle du numéro **20**, non seulement le rayon vecteur (1) qui joint le point singulier à tout point de Σ doit être très petit, mais aussi ses dérivés jusqu'au p^e ordre par rapport aux cosinus directeurs de sa direction, condition qui est, d'ailleurs, très généralement remplie (par exemple, si Σ dérive d'une surface régulière fixe par homothétie par rapport au point singulier, ou par translation, etc...). On cherchera pour chaque cas si la limite existe (quoiqu'on puisse sans doute former sans grandes difficultés des conditions suffisantes assez générales).

92. Néanmoins, les considérations précédentes s'appliquent encore quand G est le produit de deux facteurs G = G'G'', de telle manière que G = o est composé de

---

(1) De tels rayons vecteurs peuvent être pris rectilignes, mais peuvent aussi bien (ce qui est équivalent, en raison des règles classiques du calcul différentiel) être pris le long d'un ensemble régulier quelconque de courbes, c'est-à-dire d'un ensemble de courbes passant par a, dépendant de $(m - 1)$ paramètres (par exemple, $m - 1$ des cosinus directeurs de leurs tangentes en a) et telles que des dérivées continues des coordonnées par rapport à ces paramètres et à l'arc s, existent jusqu'à l'ordre p, le Jacobien ne s'annulant jamais. Nous emploierons cette méthode, en nous servant des géodésiques (n° 55) issues de a, et nous reviendrons sur le sujet à cette occasion (V. n° **106**).

deux parties $G' = o$, $G'' = o$, qui se coupent : c'est ce qui arriverait si, par exemple, T était un rectangle, G désignant le produit des quatre côtés.

Supposons, par exemple, que $G = xy$, le domaine d'intégration étant dans la région $x \geqslant o$, $y \geqslant o$. Alors, pour définir l'intégrale

$$\left|\!\underline{\overline{\int\!\!\int_T \frac{A(x, y)\,dxdy}{x^{p+\frac{1}{2}}\,y^{p+\frac{1}{2}}}}}\right.,$$

on commencera (¹) par limiter l'intégration à $x \geqslant \varepsilon'$, $y \geqslant \varepsilon''$ — en désignant par ε' et ε'' deux nombres positifs petits — après quoi [comme il apparaît si on développe A (x, y) suivant les puissances de x, y et qu'on calcule

$$\int\!\!\int \frac{dxdy}{x^{q+\frac{1}{2}}\;y^{r+\frac{1}{2}}} \qquad (q, r = 0, 1, 2, \ldots, p)]$$

l'intégrale peut être rendue finie en soustrayant des termes complémentaires en

$$(27) \qquad \frac{B}{\varepsilon'^{p-\frac{1}{2}}}, \quad \frac{B}{\varepsilon''^{p-\frac{1}{2}}}, \quad \frac{B}{\varepsilon'^{p-\frac{1}{2}}\,\varepsilon''^{p-\frac{1}{2}}}$$

(B désignant des quantités régulières en ε', ε''). En réduisant le cas général $G = G'G''$ au cas précédent par une transformation ponctuelle (où G' et G'' sont pris comme nouvelles variables x et y), on obtiendra alors le même résultat par des termes complémentaires de la forme susdite (si T_1 est séparé de T_2 par les surfaces $G' = \varepsilon'$, $G'' = \varepsilon''$), avec la même signification pour B. Etant donné que la troisième espèce de termes possède, comme les deux premières, la propriété de ne jamais rester finie pour des valeurs infinitésimales quelconques de ε', ε'', sans s'annuler, la théorie précédente est encore applicable : c'est-à-dire qu'il y aura une

(1) Nous simplifions le raisonnement en supposant qu'on s'est donné non seulement les deux surfaces $G' = o$, $G'' = o$, mais aussi les premiers membres G', G'' de leurs équations (ce qui n'était pas nécessaire dans ce qui précède); cette condition sera remplie dans l'application qu'on aura à faire du résultat actuel, de sorte qu'il ne sera plus nécessaire de prendre les surfaces de séparation (τ) sous la forme plus générale du n° 88.

infinité de manières de choisir les termes (27) de façon à obtenir une limite finie, mais que cette dernière aura la même valeur quelles que soient les méthodes employées.

En général, rien de semblable ne subsistera pour d'autres sortes de singularités de $G = 0$. Il faudra prendre les précautions auxquelles il a été fait allusion dans le numéro précédent, et on verra d'ailleurs qu'elles changent effectivement le résultat.

93. On peut répéter pour les intégrales multiples tout ce qui a été dit sur les égalités et les inégalités relatives aux intégrales simples. En particulier, il est permis de *changer de variables* si les dérivées partielles mutuelles existent jusqu'au p^e ordre et que le Jacobien ne s'annule en aucun point de la surface de singularité $G = 0$.

On effectuera la *différentiation*, dans le cas où le paramètre influe sur la forme de la partie singulière du contour $G = 0$, sans écrire aucun terme correspondant à cette influence (puisque tel est le cas pour l'intégrale simple prise le long de chaque ligne l).

On obtient une *limite supérieure* en intégrant le long des lignes [1] l et en appliquant à chaque intégrale simple la formule (19) (n° **85**). Dans ce but, on doit encore, naturellement, connaître des limites supérieures de la quantité à intégrer et de ses dérivées jusqu'au p^e ordre, et, réciproquement, cela sera suffisant, si on connaît des limites tant *inférieures que supérieures* pour les longueurs des arcs de courbes l comprises dans T.

94. En un mot, notre nouveau symbole consiste à donner à l'intégrale une valeur par soustraction d'infinis fractionnaires. Il arrive, par conséquent, que, dans le calcul, on ait à supprimer de tels infinis fractionnaires : si deux intégra-

---

(1) Si on opère comme au n° **90**, il faut connaître des limites supérieures pour les dérivées jusqu'à l'ordre $2p - 2$; d'un autre côté, il ne sera plus nécessaire de connaître des limites *inférieures* pour les longueurs des arcs des courbes l compris dans T (mais seulement celles des angles entre ces courbes et $G = 0$).

les différentes de la catégorie précédente, étendues au même domaine T, sont telles que, étendues à T', elles diffèrent par une quantité qu'on sait être nécessairement de la forme (23), leurs parties finies doivent être égales, et, par conséquent, il ne doit être tenu aucun compte de la différence en question.

Par exemple, supposons, dans la formule (g) de Green, que la partie à intégrer du premier membre soit de la forme $\frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}$ et les $\mathfrak{T}_i$ de la forme $\frac{B_i}{G^{p+\frac{1}{2}}}$ où les B sont de nouveau des fonctions régulières des x. Si la frontière du domaine d'intégration T est entièrement constituée par une surface $G = 0$ (sur laquelle on fait toujours les mêmes hypothèses générales), *la partie finie de l'intégrale multiple correspondante sera nulle.* Car, si on la prend d'abord sur la surface

$$(\tau) \qquad G = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon),$$

cette intégrale [en raison de l'identité (g) en question] se réduira à un infini fractionnaire en ϵ : ce qui équivaut à la conclusion précédente.

Si certaines parties S' seulement du contour appartiennent à $G = 0$, il ne faudra écrire que les **SS** relatifs aux portions restantes S'' — ou plutôt les parties finies de ces **SS** — : la formule (g) s'écrira :

$$\overline{\big|\mathbf{SSS}_T} = -\overline{\big|\mathbf{SS}_{S''}}.$$

Ceci devient intuitif si on emploie les variables complexes comme aux numéros **80-81**. Pour simplifier l'interprétation géométrique, bornons-nous à une intégrale double $\int\int \frac{A(x, y)\,dx\,dy}{x^{p-\frac{1}{2}}}$ étendue à un rectangle ayant un de ses côtés le long de $x = 0$. En laissant y réel, on remplacera x par $x + ix'$ et on considérera x' comme une troisième coordonnée dans l'espace à trois dimensions. I est alors égal à la moitié de l'intégrale prise sur un feuillet double

qui serait plié autour de $x = 0$ et qui couvrirait deux fois le rectangle (ou, si on préfère, prise sur un demi-cylindre elliptique infiniment plat, ayant une focale le long de $x = 0$ et ayant le côté opposé comme axe).

Si on prenait

$$\left| \iint \frac{A(x, y)\,dx\,dy}{[x(a-x)]^{p+\frac{1}{2}}}, \right.$$

le rectangle d'intégration ayant $x = 0$ et $x = a$ comme côtés opposés, on considérerait un segment d'un cylindre elliptique complet ayant ces côtés comme focales.

Dans tous ces cas, la relation avec une intégrale curviligne apparaîtrait immédiatement à l'aide de la transformation précédente (cette intégrale étant prise le long des côtés du rectangle qui correspondent à des bords de la surface cylindrique et qui sont au nombre de trois dans le premier des deux exemples précédents, de deux dans le second).

IV. — Quelques exemples importants.

95. Nous allons considérer, au point de vue précédent, l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Prenons-la d'abord entre $+\sqrt{\alpha}$ et le nombre fixe $z_1 > \sqrt{\alpha}$. Pour $n = 0$, on a :

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \alpha}} = \log \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2} \log \alpha + P(\alpha),$$

où

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \log(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}) \\ &= \log z_1 + \log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha}{z_1^2}}\right) \end{aligned}$$

est une série entière par rapport à α.

On en déduit, par différentiation :

$$(28)\quad \boxed{\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{(z^2-\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{(-1)^n}{2nC_n}\frac{1}{\alpha^n} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{d^n}{d\alpha^n}\mathrm{P}(\alpha),$$

C_n désignant le coefficient numérique [1]

$$(29)\quad C_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1.2\ldots n} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n\mathrm{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)}.$$

Pour $z_1 = \infty$, le dernier terme du second membre de (28) disparaît $\left(\text{puisque P}(\alpha) \text{ est en } \frac{\alpha}{z_1{}^2}\right.$ et que par conséquent chaque terme, sauf le premier, contient z_1 en dénominateur$\Big)$; d'où [2] :

$$(30)\quad \boxed{\int_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2-\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{(-1)^n}{2n\,C_n\,\alpha^n} \quad \text{(avec } n \text{ entier} > 0).$$

On doit aussi noter la valeur de l'intégrale pour $n < 0$, soit :

$$(28')\quad \int_{+\sqrt{\alpha}}^{z_1} dz\,(z^2-\alpha)^{n'-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n'-1}}{2}\cdot C_{n'}\alpha^{n'}\log\alpha + \mathrm{P}_1(\alpha)$$

---

(1) En particulier, $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$.

(2) On pourrait aussi trouver la valeur de (30) à partir d'un autre point de vue, donnant ainsi un bon exemple de la première définition du n° **80**. Si on remplace le segment réel $(\sqrt{\alpha}, \infty)$ par une courbe qui le contourne, l'intégrale correspondante — qui est le double de (30) — peut être transformée, grâce au théorème de Cauchy, en une intégrale le long de l'axe imaginaire, égale à $e^{-ni\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(\alpha+z_1{}^2)^{n+\frac{1}{2}}}$; cette dernière quantité se réduit immédiatement et classiquement à une intégrale Eulérienne de première espèce B.

C_n désignant le même coefficient numérique que tout à l'heure. Ceci se déduit encore du cas de $n' = 0$ par intégration par rapport à α, — la valeur de l'intégrale étant évidente pour $\alpha = 0$, — ou plus simplement, en développant la quantité à intégrer [1] suivant les puissances de $\frac{\alpha}{z^2}$.

96. Les formules relatives aux cas où les limites sont $-\sqrt{\alpha}$ et $+\sqrt{\alpha}$ sont particulièrement importantes pour ce qui suit.

L'intégrale

$$(31) \qquad \left|\overline{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}}\right. \qquad (n \text{ entier} > 0)$$

est nulle.

L'intégrale

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}\, dz \qquad (\text{avec } n' \text{ entier} \geqslant 0)$$

est égale à $2\pi A$, A *désignant le coefficient de log* α *dans l'expression* (28), soit :

$$(31') \qquad \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}\, dz = (-1)^{n'-1} \pi C_{n'} \alpha^{n'},$$

de sorte que

$$(31\,bis) \qquad \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (\alpha - z^2)^{n'-\frac{1}{2}}\, dz = \pi C_{n'} \alpha^{n'}.$$

Cette forme du résultat, impliquant une relation entre (28′) et (31′) [laquelle peut être considérée comme existant aussi entre (28) et (31)], sera pour nous d'un intérêt tout

---

[1] Le terme en $\alpha^{n'}$ est le seul qui contienne z à la puissance (-1), et qui, par conséquent, conduise à un résultat logarithmique.

particulier dans la suite. Elle peut s'établir en considérant (31′) comme une période de (28′). Si on suppose que α, partant d'une valeur positive déterminée, y revienne par une circulation directe autour de l'origine dans le plan complexe, le point $\sqrt{\alpha}$ effectue un demi-circuit, en allant de $+\sqrt{\alpha}$ à $-\sqrt{\alpha}$. Comme, en même temps, z_1 reste fixe (à une distance finie ou infinie suivant les cas), (28′) croît de $2i\pi A$, et la relation est démontrée.

Bien entendu, ces mêmes formules (31′), ou plutôt (31 *bis*), peuvent s'obtenir directement et, plus précisément, en fonction d'intégrales Eulériennes de première espèce : car, par le changement de variable $z = \sqrt{\alpha t}$, l'intégrale (31 *bis*), qui se ramène aussi immédiatement (par $z = \sqrt{\alpha} \cos \varphi$) à une intégrale de Wallis, devient :

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} dz\,(\alpha - z^2)^{n'-\frac{1}{2}} = \alpha^{n'} \int_0^1 (1-t)^{n'-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$
$$= \alpha^{n'} \mathrm{B}\left(n' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Si on différentie par rapport à α, ce qui peut se faire par simple différentiation sous le signe $\int$ et sans écrire aucun terme pour les limites, cela donne, par un nombre suffisant de différentiations, la valeur o pour l'expression (31).

De même, si q est un entier positif et impair, on a, pour $n' \geqslant 0$ (le premier membre pouvant encore se ramener à des intégrales Eulériennes ou de Wallis) :

$$(32) \qquad \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} z^{q-1} \cdot (\alpha - z^2)^{n' - 1/2} \cdot dz$$
$$= \alpha^{n' + \frac{q-1}{2}} \cdot \int_0^1 t^{\frac{q-2}{2}} \cdot (1-t)^{n' - 1/2} \cdot dt$$
$$= \alpha^{n' + \frac{q-1}{2}} \cdot \mathrm{B}\left(n' + \frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

Partant de nouveau de $n' = 0$, on obtiendra des parties finies d'intégrales contenant $(1 - t)^{n+\frac{1}{2}}$ ou $(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}$ au dénominateur en différentiant par rapport à α (ou par une intégration par parties classique, par rapport à t, appliquée à la seconde forme de l'intégrale). On voit ainsi :

1° que

$$\left|\overline{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{z^{q-1}}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\, dz}\right. \quad \text{ou} \quad \left|\overline{\int_0^1 \frac{t^{\frac{q-2}{2}}}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}}\, dt}\right.$$

est nul quand q est impair et $n > \dfrac{q-1}{2}$;

2° que, pour $n \leqslant \dfrac{q-1}{2}$,

$$\left|\overline{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{z^{q-1}}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\, dz}\right.$$

$$= \alpha^{\frac{q-1}{2} - n} \cdot \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)\left(q - \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{q+1}{2} - n\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-n + \frac{1}{2}\right)}\, \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

$$= \alpha^{\frac{q-1}{2} - n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2} - n\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Il est presque évident, et on peut vérifier immédiatement, en exprimant le symbole B à l'aide des fonctions Γ, que le facteur numérique se trouvera être le même que dans (32), sauf le changement de n' en $-n$, c'est-à-dire *égal à*

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2} - n, \frac{q}{2}\right).$$

En particulier

$$(33) \qquad \left|\overline{\int_{-1}^{+1} \frac{z^{q-1}}{(1-z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\, dz}\right. = \left|\overline{\int_{0}^{1} \frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}}\, dt}\right.$$

$$= \mathrm{B}\left(\frac{1}{2} - n, \frac{q}{2}\right),$$

de sorte que, dans ce cas, on obtient des formules exactement semblables à (32), à l'introduction près du nouveau symbole $\lceil\overline{\ \ }$

97. ***Volume des hyperboloïdes à*** m ***dimensions.*** — Considérons la quadrique à m dimensions

$$(\mathrm{H}_1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x^2_{m-1} - x^2_m = 1,$$

analogue à l'hyperboloïde à une nappe et le volume (à m dimensions) compris entre cette quadrique et le « cône asymptote »

$$(c) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x^2_{m-1} - x_m^2 = 0.$$

Pour le calculer, on peut exprimer $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$ en fonction de

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x^2_{m-1}}$$

et de paramètres angulaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}$ définissant une direction à partir de l'origine dans l'espace à $(m - 1)$ dimensions $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$; d'où

$$dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1} = r^{m-2}\, dr d\Omega_{m-2},$$

où $d\Omega_{m-2}$ (correspondant aux variations des φ) est un élément de surface de la sphère de rayon 1 dans l'espace à $(m - 1)$ dimensions. En sommant d'abord pour toutes les directions possibles dans ce dernier espace, nous exprimons notre volume par l'intégrale double

$$(34) \qquad \Omega_{m-2} \iint r^{m-2}\, dr dx_m.$$

Ω_{m-2} désigne la surface de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $(m - 1)$ dimensions. Elle est égale à

$$\frac{2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire à

$$2\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

$\left(\text{le volume de cette même sphère est } \frac{1}{m-1}\,\Omega_{m-2}\right.$ et on peut observer que cela permet de parler même de Ω_0, dont la valeur est $\left.\int_{-1}^{+1} dx = 2\right)$.

On a à étendre (34) entre une branche de l'hyperbole $r^2 - x_m{}^2 = 1$ et ses asymptotes. Or, si on pose

$$x_m = rz,$$

$z =$ constante représentera, dans le plan des (r, x_m), un rayon vecteur partant de l'origine, et, dans notre espace à m dimensions primitif, un hypercône. Le volume compris entre deux hypercônes consécutifs $(z, z + dz)$ et la quadrique [qu'on calcule facilement en exprimant les variables x_m et r de (34) en fonction de z et de $\rho = \sqrt{r^2 - x_m{}^2}$ et en faisant varier ρ de zéro à 1], sera :

$$\frac{\Omega_{m-2}}{m}\quad\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}^{\,m}}$$

Si on intégrait entre $- z$ et $+ z$, avec $o < z < 1$, ceci nous donnerait le volume compris entre les deux cônes correspondants et la quadrique.

Si m est impair, une telle intégrale aura une partie finie si z tend vers 1. On l'appellera, par définition, « la partie finie du volume compris entre la quadrique et son cône asymptote ».

En raison des conclusions du numéro précédent, on voit que *cette partie finie est nulle.*

Prenons, d'un autre côté, la quadrique

$$(H_2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \dots x^2_{m-1} - x^2_m = 1,$$

laquelle est, pour $m = 3$, *l'hyperboloïde à deux nappes* Considérons de nouveau le volume compris entre la nappe correspondant à $x_m > 0$ et le cône asymptote (c).

Ce volume sera représenté par l'intégrale

$$\frac{\Omega_{m-2}}{m} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}^m}$$

qu'on doit prendre entre 1 et $+ \infty$. *Si m est impair* et égal à $2m_1 + 1$, l'expression ainsi obtenue a une partie finie, qu'on appellera la « partie finie » du volume considéré. *La valeur de cette partie finie sera :*

$$(35) \qquad \frac{\Omega_{2m_1-1} \cdot (-1)^{m_1}}{(2m_1 + 1)\, 2m_1 C_{m_1}}$$

Par exemple, pour l'hyperboloïde à deux nappes ordinaires, on a :

$$\frac{2\pi}{3} \overline{\left| \int_1^\infty \frac{dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right.} = - \frac{2\pi}{3}.$$

Si l'hyperquadrique est donnée sous la forme plus générale

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1,$$

($\mathbf{H}$ étant une forme quadratique quelconque à un carré positif et $m - 1 = 2m_1$ carrés négatifs), le résultat doit évidemment être divisé par $+ \sqrt{|D|}$, D étant le discriminent de $\mathbf{H}$.

Le signe de la partie finie obtenue est variable, comme on l'a vu d'après (35) : en raison de ce qu'on a dit au numéro **85**, il dépend de la parité de $m_1 = \frac{m-1}{2}$.

98. La même méthode s'appliquerait à l'hyperquadrique

$$\text{(H}')\quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots. + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots. - y_q^2 = 1,$$

qui se rattache aux équations $\Delta^{p,q} u = 0$ de M. Coulon. En introduisant les variables auxiliaires

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots. + x_p^2}, \qquad r' = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots. + y_q^2},$$

le calcul du volume se ramènerait, comme précédemment, à l'intégrale double

$$\Omega_{p-1}\,\Omega_{q-1} \iint r^{p-1} r'^{\,q-1}\, dr\, dr',$$

qui, avec $r' = rz$, mènerait à l'intégrale simple

$$(36) \qquad \frac{\Omega_{p-1}\,\Omega_{q-1}}{p+q} \int \frac{z^{q-1}\, dz}{\sqrt{1 - z^2}^{\,p+q}}$$

Si on prend cette intégrale entre $z = -1$ et $z = +1$, sa partie finie aura une signification pour $p + q$ impair. *Pour q impair, elle sera nulle* (n° **96**).

Pour le cas de q pair et de p impair seulement, la partie finie du volume compris entre la quadrique (H′) et son cône asymptote

$$\sum_1^p x^2 - \sum_1^q y^2 = 0$$

existera et différera de zéro; sa valeur sera

$$\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2} - 1, \frac{q}{2}\right) \frac{\Omega_{p-1}\,\Omega_{q-1}}{p+q}.$$

99. Les nombres Ω sont en relation très simple avec les coefficients C_n introduits précédemment; on a

$$\Omega_{m-1} = \Omega_{m-2} \cdot \frac{m}{m-1}\, \pi\, C_{\frac{m}{2}} = \Omega_{m-2}\, \pi\, C_{\frac{m}{2}-1}$$

(et, plus généralement, des relations entre Ω_{p-1}, Ω_{q-1}, et Ω_{p+q-1}).

Ceci se vérifie immédiatement, mais est à peine distinct du raisonnement du numéro précédent. La détermination classique de Ω_{m-1} (comme cas particulier de l'intégrale de Dirichlet) est entièrement semblable au calcul précédent; ce dernier, appliqué au volume de la sphère à m dimensions de rayon 1 $\left(\text{égale à } \frac{1}{m}\, \Omega_{m-1}\right)$ réduit celui-ci à :

$$\Omega_{m-2} \iint r^{m-2}\, dr dx,$$

intégrale double étendue à $r^2 + x^2 \leqslant 1$ et se réduisant immédiatement à (31′), comme précédemment.

100. Si on coupe le volume d'un de ces hyperboloïdes à $m = 2\, m_1 + 1$ dimensions par un plan passant par le centre (qui est supposé couper la surface), ce dernier peut toujours être considéré comme un plan diamétral, et, par conséquent, les deux volumes partiels ainsi séparés doivent être équivalents l'un à l'autre : de sorte que la partie finie du volume du demi-hyperboloïde à une nappe est nulle et que celle du demi-hyperboloïde à deux nappes est égale à la moitié de la valeur obtenue au numéro **97**.

Une conséquence de ceci est que deux plans quelconques de cette espèce dont l'intersection est intérieure au cône asymptote (s'il s'agit de l'hyperboloïde à deux nappes) interceptent entre eux, dans la portion d'espace comprise entre la surface et son cône asymptote, un volume infini dont la partie finie est encore nulle.

101. La notion d'intégrale généralisée, telle qu'on vient de la développer, permet de trouver la relation entre les expressions de M. Tedone et la solution élémentaire. Il est à prévoir (par le premier exemple de $m = 3$) que cette dernière, pour admettre les opérations ordinaires du calcul, doit être d'abord intégrée plusieurs fois — au moins m_1 fois — par rapport à t_0.

Or, de telles intégrations successives (ou plutôt superposées) d'une fonction $F(t)$ depuis la même limite inférieure T jusqu'à la limite supérieure t', peuvent encore être remplacées par une seule moyennant l'introduction du facteur $(t' - t)^{n-1}$, de sorte

que, pour l'étude de l'équation généralisée des ondes cylindriques (e_{m-1}) pour $m = 2m_1 + 1$, en partant de la solution élémentaire

$$\frac{1}{[(t_0 - t)^2 - r^2]^{m_1-\frac{1}{2}}}$$

on doit en déduire l'intégrale définie

$$\int_{T}^{t'} \frac{(t' - t_0)^{n-1}\,dt_0}{[(t_0 - t)^2 - r^2]^{m_1-\frac{1}{2}}}$$

dans laquelle, comme au numéro **73**, on prendra t' indépendant de t, mais la limite inférieure T égale à $t + r$.

Les expressions de M. Tedone correspondent (1) à un nombre d'intégrations plus grand qu'il n'est strictement nécessaire, savoir $n = m - 2 = 2m_1 - 1$ (l'avantage est d'obtenir des expressions assez simples qui ne dépendent que du rapport $\frac{t' - t}{r}$). Sa fonction (2) est égale, à un facteur numérique près, à une intégrale définie (3) (généralisée) :

$$\mathbf{v}_1 = \left| \int_{t+r}^{t'} \frac{(t' - t_0)^{2m_1-2}}{[(t_0 - t)^2 - r^2]^{m_1-\frac{1}{2}}}\,dt_0 \right.$$

Que, appliquant la formule fondamentale à une telle quantité ainsi qu'à la fonction inconnue u, on soit conduit à obtenir la

(1) Dans la notation de M. Tedone, notre nombre m est désigné par $m + 1$ et (pour les valeurs impaires de ce nombre) notre nombre m_1 est appelé p.

(2) φ_2, avec sa notation.

(3) $\mathbf{v}_1$, considéré comme fonction de t et des x, vérifie (e_{m-1}), comme il résulte de nos principes; c'est, avec le fait d'être une simple fonction de $\frac{t' - t}{r}$ (variable θ de M. Tedone) en même temps qu'avec sa singularité logarithmique (laquelle se constate facilement par les principes de la théorie des fonctions), ce qui prouve son identité avec l'expression de Tedone. Un calcul direct, donnant $\mathbf{v}_1$ sous la forme de Tedone, s'obtient en posant

$$\frac{t_0 - t - r}{t_0 - t + r} = \tau$$

et de même

$$\frac{t' - t - r}{t' - t + r} = \tau',$$

valeur de (10′) (n° **78**), d'où u s'ensuit par différentiation, c'est ce qui est maintenant évident *a priori*. On voit que la dérivée $(m_1 - 1)^e$ de u pourrait avoir été employée dans le même but.

---

ce qui donne

$$V_1 = \left| \int_0^{r'} \frac{1}{(1-\tau')^{2m_1-2}} \frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2}}{\tau^{m_1-\frac{1}{2}}(1-\tau)} d\tau \right.$$

$$= \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{(1-\tau)\sqrt{\tau}} + \frac{1}{(1-\tau')^{2m_1-2}}\, I$$

$$I = \left| \int_0^{\tau'} \frac{1}{\tau^{m_1-\frac{1}{2}}} \frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2} - \tau^{m_1-1}(\tau'-1)^{2m_1-2}}{1-\tau} d\tau \right.$$

Le premier terme est le terme logarithmique : et, comme

$$\frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2} - \tau^{m_1-1}(\tau'-1)^{2m_1-2}}{1-\tau}$$

$$= [\tau(\tau'-1) + \tau'(\tau'-\tau)] \sum (\tau'-\tau)^{2(m_1-h-1)}\, \tau^{h-1}\, (1-\tau')^{2h-2}.$$

l'intégrale (généralisée) restante I peut être développée suivant les puissances de

$$\frac{4\tau'}{(1-\tau')^2} = \frac{(t'-t)^2 - r^2}{r^2}$$

avec le facteur commun

$$1 + \frac{2\tau'}{1-\tau'} \doteq \frac{t'-t}{r},$$

les coefficients étant des fonctions Eulériennes B (V. n° **96**).

CHAPITRE II

L'ÉQUATION A UN NOMBRE IMPAIR DE VARIABLES INDÉPENDANTES

---

102. En nous rappelant les principes qui précèdent, nous pouvons aborder le problème de Cauchy pour l'équation

$$\text{(E)} \qquad \mathcal{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f.$$

Il y a lieu de prévoir qu'on aura à distinguer entre les cas de m pair et m impair. Nous commencerons par ce dernier. La solution élémentaire est alors unique. Elle ne contient pas de terme logarithmique, mais un dénominateur irrationnel.

Nous la construirons, non pour l'équation donnée, mais pour l'équation adjointe (1) :

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathcal{G}(v) = 0,$$

dont la solution élémentaire sera de la même forme, savoir :

$$v = v\ (x; a) = \frac{V}{\Gamma^{m_1 - \frac{1}{2}}}$$

pour $m = 2m_1 + 1$; Γ est encore le carré de la distance géodésique entre les deux points x $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, tandis que V est une fonction holomorphe des $2m$

---

(1) L'équation adjointe sera toujours prise homogène [soit $\mathcal{G}(v) = 0$] même si l'équation proposée est à second membre [$\mathcal{F}(u) = f \neq 0$].

coordonnées de ces deux points, prenant, quand ils coïncident, la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$.

Dans ce qui va suivre, on va supposer que l'équation appartient au type hyperbolique, et même au type hyperbolique normal, de sorte que la forme caractéristique

$$\mathbf{A} = \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

consiste en carrés ayant tous, sauf un, le même signe. Le conoïde caractéristique se compose alors de deux nappes et divise l'espace en trois régions, dont deux sont intérieures, savoir une intérieure à chaque nappe. On suppose l'équation écrite de telle manière que Γ soit positif dans ces régions intérieures (physiquement parlant, positif quand les deux points x et a sont sous onde l'un par rapport à l'autre, au sens du n° **32**). Tel est le cas quand la forme $\mathbf{A}$ a un carré positif et $m - 1$ carrés négatifs [1].

Dans ces conditions, le discriminant Δ sera positif.

102 *bis*. Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution u de (E) quand on connaît les valeurs de u et d'une de ses dérivées premières, en chaque point d'une certaine surface S. Comme la connaissance d'une dérivée première quelconque (u étant supposé connu sur toute la surface S, soit $u = u_0$) équivaut à connaître n'importe quelle autre dérivée (à condition que la direction correspondante ne soit pas tangente à S), on supposera que la dérivée dont on connaît les valeurs est la dérivée *transversale* [2] (n° **41**) soit $\frac{du}{d\nu} = u_1$.

Nous voulons calculer les valeurs de u dans une certaine région $\mathcal{R}$ de l'espace à m dimensions; et nous supposerons que si, d'un point quelconque a de $\mathcal{R}$ comme sommet, on

(1) Ceci conduirait à changer le signe de l'équation (e_2), au lieu de l'écrire comme au n° **4 *bis***.

(2) Si S n'est pas caractéristique, la direction transversale ne sera pas tangente à S. Pour ce qui concerne le cas contraire, V. plus loin, n° **113**.

trace le conoïde caractéristique, une de ses nappes découpera une portion S_0 limitée en tous sens de S et formera, avec S_0, la frontière d'une portion T de l'espace. Cette condition géométrique s'exprime en disant qu'on a affaire au problème *intérieur* (on voit qu'il n'existe pas de problèmes intérieurs pour les équations hyperboliques non normales).

Ici encore, nous avons à définir ce qu'on entendra au juste par une solution : c'est ce que nous ferons d'une manière au premier abord assez restrictive, savoir en convenant que u doit admettre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m_1 — ou, au moins, jusqu'à l'ordre $(m_1 - 1)$, ces dernières satisfaisant à la condition de Lipschitz — restriction qui semblerait très artificielle, n'étaient les remarques du numéro **78**, mais qui apparaît maintenant comme justifiée.

Ceci une fois admis, on verra que les données précédentes permettent de calculer u et, de plus, que, réciproquement, avec une hypothèse géométrique de plus [savoir que S a partout une orientation d'espace (n° **27**)] et des hypothèses de régularité concernant les données (toutes semblables à celles que nous venons de faire sur u lui-même), la fonction u ainsi déterminée vérifie toutes les conditions demandées. (Au contraire, aucun problème de Cauchy *extérieur* n'admet de solution pour les données régulières arbitraires.)

103. En conséquence, a $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ étant un point de $\mathcal{R}$ en lequel on veut calculer la valeur de u, nous tracerons un demi-conoïde caractéristique Γ de sommet a, celui qui coupe S suivant une arête fermée et que nous appellerons (n° **32**) la nappe *inverse* ou *rétrograde*. Soit T la portion de $\mathcal{R}$ ainsi délimitée [1], c'est-à-dire qui est en même temps intérieure à Γ et du même côté de S que a (fig. 12).

On appliquera la formule fondamentale [2], dans le

(1) Nous avons, comme précédemment, tracé une figure schématique, obtenue en coupant celle que l'on doit considérer (et qui a m dimensions) par un plan à deux dimensions mené par ce point a.

(2) La formule fondamentale dont nous allons parler est celle qui a été écrite aux n^{os} **37-40**. Comme nous l'avons dit au n° **40** *bis*, si l'on voulait rendre les équations invariantes par rapport à une transformation ponctuelle arbitraire effectuée sur les variables x, il conviendrait d'écrire les

domaine T, à l'inconnue u et à la solution élémentaire $v(x; a)$ de l'équation adjointe qui est singulière en a.

La quantité $vf = \frac{fV}{\Gamma^{m_1-1}}$ est infinie le long d'une partie de la frontière, savoir le conoïde Γ : c'est une quantité infinie de l'ordre fractionnaire $m_1 - \frac{1}{2}$. L'intégrale m^{uple} portant sur cette quantité, relève alors des considérations exposées ci-dessus (celles-ci ne devenant inutiles que pour $m_1 = 1$, c'est-à-dire $m = 3$).

Mais il y a exception pour le voisinage du point a, où Γ est un infiniment petit d'ordre 2 et non plus d'ordre 1. Par conséquent, il faudra procéder comme dans le cas des intégrales multiples ordinaires et détacher du domaine d'intégration tout le voisinage du point a, au moyen d'une petite surface Σ (fig. 12) entourant ce point, étant entendu que le voisinage infiniment étroit entre Σ et le point a doit être du m^e ordre (n° **91**) (ce qui est le cas, par exemple, si on prend une petite sphère de centre a).

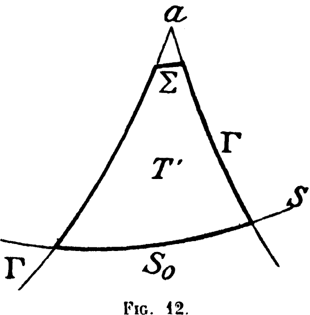


Fig. 12.

Soit T' la partie restante de T après qu'on en a retiré celle qui est comprise dans Σ.

La formule fondamentale

$$\text{(F)} \qquad \overline{\left| \mathbf{SSS}\ vf\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m \right.} + \overline{\left| \mathbf{SS} \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} + Luv \right) dS \right.} = 0$$

---

formules autrement, en mettant en facteur, sous le signe **SSS**, non plus l'élément $dx_1\ dx_2 \ldots dx_m$ mais le produit de cet élément par $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$. Cette modification, inutile d'ailleurs dans beaucoup d'applications, s'impose, au contraire, dans plusieurs recherches théoriques en relation avec la question actuelle. Nous indiquons, dans un appendice placé à la fin de l'ouvrage, les changements qu'il faudrait faire subir aux calculs pour en tenir compte.

sera appliquée au domaine T′, avec la convention qu'on prend la partie finie du premier membre, en omettant les quantités infinies d'ordre fractionnaire sur Γ. On doit par conséquent :

1° Prendre la partie finie de la première intégrale de (F) (intégrale m^{uple} étendue à T′);

2° Prendre de même la partie finie de l'intégrale $(m - 1)^{\text{uple}}$ étendue à la multiplicité donnée S;

3° *Supprimer l'intégrale relative à la frontière* Γ, cette dernière étant une quantité infinie d'ordre fractionnaire. Cette même intégrale s'élimine dans la méthode de Kirchhoff parce qu'elle s'intègre exactement, et dans la méthode de M. Volterra parce qu'elle est identiquement nulle. Il en est de même ici, ainsi qu'on le voit, par un mécanisme différent, qu'on a expliqué au n° **94**. L'intégrale en question étant d'ordre fractionnaire, les termes complémentaires de frontière implicitement compris dans 1° et 2°, et (voir ci-dessous) 4° étant également tels [1], le fait même que la somme des intégrales (F) s'annule implique que la somme de ces quatre quantités infinies fractionnaires s'annule aussi séparément.

104. 4° Si la forme de T était telle que a lui soit extérieur, comme c'est le cas dans la figure 12 *bis* ou la figure 12 *ter*, ou aurait simplement à appliquer la formule fondamentale ainsi interprétée, et on obtiendrait :

$$\text{(F}'\text{)}\qquad \left|\overline{\mathbf{SSS}\; vf\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m}\right. + \left|\overline{\mathbf{SS}\left(v\frac{du}{dv} - u\frac{dv}{dv} + Luv\right) dS}\right. = 0,$$

qui correspond à la formule classique de la théorie des

(1) Dans (1), ce terme complémentaire s'étendrait à Γ, ou plutôt à une surface coïncidant finalement avec Γ; dans (2°) et (4°), les positions limites pour les domaines d'intégration correspondant aux termes complémentaires seraient les arêtes d'intersection de Γ avec S et Σ.

potentiels [formule (8) du livre I, n° **15**] dans le cas où l'origine des rayons vecteurs est en dehors de la surface d'intégration.

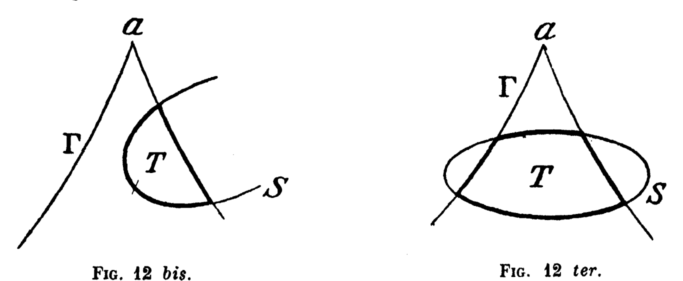


FIG. 12 *bis*. FIG. 12 *ter*.

Mais, dans le cas actuel, il faut tenir compte de l'intégrale relative à Σ, de laquelle on doit prendre (comme pour S) la partie finie. Il faut voir ce que cette quantité devient quand Σ tend vers le point a.

Par ce point, menons les géodésiques [définies par les équations différentielles (L)] intérieures à T, et qui dépendent de $m - 1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, tandis que, sur chacune d'elles, un point quelconque sera défini par la variable s du numéro **55**. En chaque point de Σ, s aura une valeur déterminée (fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$) qui sera très petite, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre [1] m_1. L'intégrale

$$(37)\quad \left|\overline{\mathbf{SS}\left(v\frac{du}{d\nu}+\mathrm{L}uv\right)d\mathrm{S}}\right. = \left|\overline{\mathbf{SS}\,\frac{\left(\mathrm{V}\dfrac{du}{d\nu}+\mathrm{L}u\mathrm{V}\right)}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\,ds}\right.$$

tendra vers zéro. Car les quantités

$$\pi_i d\mathrm{S} = \pm\,\frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_m)}{\mathrm{D}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1})}\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \cdots d\lambda_{m-1}$$

qui apparaissent au numérateur sous le signe **SS** sont de l'ordre de s^{m-1}, tandis que le dénominateur

$$\Gamma^{\frac{m-2}{2}} = s^{m-2}\,\mathrm{H}^{\frac{m-2}{2}}(x_1', x_2', \ldots, x'_m),$$

(1) Ceci résulte des principes établis dans la note additionnelle au livre II. V. p. 151 ci-dessous, n° **106**.

où $x_i' = \frac{dx_i}{ds}$, ne contient en facteur que s^{m-2}. Le coefficient de

$$\frac{1}{H^{\frac{m-2}{2}}(x_1', x_2', \ldots, x_m')}$$

est par conséquent de l'ordre de s, et il en est de même pour ses dérivées des divers ordres par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Dans ces conditions, les évaluations des numéros **85** et **93** montrent que l'intégrale (37) est aussi de l'ordre de s.

Ceci s'applique également, pour le terme

$$-\left|\overline{\mathbf{SS}\, u \frac{dv}{d\nu}\, dS,}\right.$$

à la partie

$$\left|\overline{\mathbf{SS}\, \frac{u\frac{dV}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\, dS}\right.$$

dans laquelle Γ n'est pas différentié.

105. Enfin, prenons la partie restante :

$$(37') \qquad + \frac{m-2}{2}\left|\overline{\mathbf{SS}\, \frac{uV\frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{m}{2}}}\, dS}\right.$$

$$= + \frac{m-2}{2}\left|\overline{\mathbf{SS}\, \frac{\frac{1}{2}uV \cdot \sum \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i}\cdot dS}{\Gamma^{\frac{m}{2}}}}\right..$$

On a (toujours avec les notations des numéros **55-58**)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i} = 2sp_i,$$

et, par conséquent :

$$\sum \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s\sum_i p_i \frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s\sum_i \pi_i \frac{\partial A}{\partial p_i}$$

$$= 4s\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}.$$

Mais, si on se reporte à l'expression de $\pi_i d\mathrm{S}$ écrite ci-dessus, on voit que le coefficient de $4s$, multiplié par $d\mathrm{S}$, est un développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} & \cdots & \frac{dx_m}{ds} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \lambda_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_{m-1}} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \lambda_{m-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1},$$

les λ étant pris dans un ordre tel que le déterminant soit positif, puisque la direction des s croissants part de a pour entrer dans le domaine T'.

Toutes les lignes du déterminant précédent, sauf la première, contiennent s en facteur (1), de sorte que la quantité à intégrer (pour des valeurs déterminées des λ) reste finie quand s tend vers zéro.

D'un autre côté, on a sensiblement, sur Σ,

$$u\mathrm{V} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a}} u\,(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a}} u_a,$$

le mot « sensiblement » étant, bien entendu, employé dans un sens légèrement différent de celui qu'il a généralement dans les cas analogues, et signifiant que les quantités négligées, *en même temps que leurs dérivées par rapport aux* λ (jusqu'à l'ordre m_1), sont très petites.

Toujours au même point de vue, on peut remplacer les $\frac{dx_i}{ds}$ par les valeurs x'_i qu'ils ont à l'origine et les dérivées

(1) Il est vrai que chaque élément contient, outre une partie proportionnelle à s, une partie contenant les dérivées de cette quantité par rapport aux λ : mais, avec l'hypothèse du texte concernant Σ, ceci ne changera pas l'ordre de grandeur du déterminant.

$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda}$ par $s \frac{\partial x_i'}{\partial \lambda}$: on obtient ainsi l'expression

(38)
$$\frac{(m-2)u_a}{\sqrt{\Delta}} \left| \mathbf{SS} \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_m' \\ \frac{\partial x_1'}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial x'_m}{\partial \lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial \lambda_{m-1}} & \dots & \dots & \frac{\partial x'_m}{\partial \lambda_{m-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1 \, d\lambda_2 \dots d\lambda_{m-1}}{H^{\frac{m}{2}}(x_1', x_2' \dots, x'_m)} \right. .$$

L'intégrale qui est multipliée par $(m-2)\,u_a$ est facile à ramener au résultat du numéro **97**. D'une manière générale, si, par l'origine, on mène une droite variable

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_m}{\alpha_m}$$

dont la direction dépend des $m-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, et qu'on choisisse sur elle un point

$$P(x_1 = \alpha_1 s,\ x_2 = \alpha_2 s,\ \dots,\ x_m = \alpha_m s)$$

(en désignant par s une autre fonction des λ), l'intégrale

$$\frac{1}{m}\,\mathbf{SS} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_{m-1}} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda_{m-1}} & \dots & \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_{m-1}} \end{vmatrix} s^m d\lambda_1 \dots d\lambda_{m-1}$$

représentera (¹) le volume compris entre la surface S décrite par P et le cône qui a le contour de S comme base et l'origine comme sommet.

(1) Car, soient dS un élément de la surface S et $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, les cosinus

Le signe **SS** de la formule (38) est, par conséquent, égal à $m = 2m_1 + 1$ fois la partie finie du volume de l'hyperboloïde à deux nappes, tel qu'il est calculé au numéro **97**, et a donc la valeur

$$\frac{1}{2m_1+1}\,\frac{(-1)^{m_1}\Omega_{2m_1-1}}{2m_1\,C_{m_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}},$$

D étant le discriminant de **H**. L'intégrale prise le long de Σ a, par conséquent (en raison de l'égalité $D\Delta = 1$), la valeur limite

$$\frac{(-1)^{m_1}\Omega_{2m_1-1}}{C_{m_1}}\cdot\frac{2m_1-1}{2m_1}\,u_a = (-1)^{m_1}\frac{\Omega_{2m_1-1}}{C_{m_1-1}}\,u_a$$
$$= (\text{n}^\circ\ \mathbf{99})\ (-1)^{m_1}\,\pi\Omega_{2m_1-2}\,u_a$$

et la valeur cherchée de u_a est donnée par la formule :

$$(39)\qquad (-1)^{m_1}\,\pi\,\Omega_{2m_1-2}\cdot u_a = (-1)^{m_1}\frac{\Omega_{2m_1-1}}{C_{m_1-1}}\cdot u_a$$
$$= -\left|\mathbf{SSS}_T\, vf\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m\right.$$
$$+\left|\mathbf{SS}_{S_0}\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS\right.$$

---

de sa normale extérieure, on a, en tenant compte des valeurs de $\pi_1 dS$, $\pi_2 dS$, ...,

$$V = \mathbf{SS}\,\frac{1}{m}\,(\pi_1 x_1 + \cdots + \pi_m x_m)\,dS$$

$$= \frac{1}{m}\,\mathbf{SS}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial\lambda_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_{m-1}} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial\lambda_{m-1}} \end{vmatrix}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_{m-1}$$

Si alors on remplace x_i par $s\alpha_i$, et, par conséquent, $\frac{\partial x_i}{\partial\lambda_k}$ par $s\frac{\partial\alpha_i}{\partial\lambda_k} + \alpha_i\frac{\partial s}{\partial\lambda_k}$ les seconds termes de cette dernière expression, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, peuvent être supprimés comme proportionnels aux x qui constituent la première ligne du déterminant, et on obtient le résultat écrit dans le texte.

$$= - \left| \overline{\mathbf{SSS}_{T} \, vf \, dx_1 \, \ldots\, dx_m} \right.$$

$$+ \left| \overline{\mathbf{SS}_{S_0} \left(u_0 \frac{dv}{d\nu} - u_1 v - Lu_0 v \right) dS.} \right.$$

Pour $m = 3$ ($m_1 = 1$), le coefficient de u_a est :

$$- \Omega_1 \frac{1}{2C_1} = - 2\pi \; (= - \pi\Omega_0).$$

106. Une conséquence de ce qui précède est que le premier **SSS** de (39) existe quand on l'étend à T, tout au moins si on fait encore tendre Σ vers a de telle manière que le voisinage soit d'ordre m_1. On peut aussi le voir directement. En calculant ce terme avec le système de coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, s$, on aura :

$$\left| \overline{\mathbf{SSS}_{T} \, vf \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m} \right.$$

$$= \left| \overline{\mathbf{SSS} \frac{Vf}{s^{m-2} \, \mathrm{H}^{\frac{m-2}{2}}} \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{m-1} \, ds.} \right.$$

Or, le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, s)}$ contient s^{m-1} en facteur, et, par conséquent, la quantité sous le signe **SSS** ne contient ainsi que l'infini fractionnaire

$$\frac{1}{\mathrm{H}^{\frac{m-2}{2}}\left(\frac{x_1 - a_1}{s}, \frac{x_2 - a_2}{s}, \ldots, \frac{x_m - a_m}{s}\right)}$$

Sous cette forme ou sous la précédente, on voit que l'erreur commise en substituant T′ à T — c'est-à-dire la différence entre les valeurs du signe **SSS** étendu à T′ ou étendu à T — peut se limiter en fonction :

des dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre $m_1 - 1$ et des coefficients de l'équation jusqu'à l'ordre m_1;

des dérivées correspondantes de V;

des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m_1, par rapport aux λ, des coordonnées du point où chaque géodésique issue de a coupe Σ ou, ce qui est équivalent, de la valeur correspondante de s : ces dérivées étant elles-mêmes limitées [1] par les dérivées correspondantes des x par rapport à s sur la géodésique, les dérivées partielles correspondantes du premier membre $\Sigma(x_1, \ldots, x_m)$ de l'équation de Σ, et par l'inverse de $\frac{d\Sigma}{ds}$ [comme on le voit en exprimant les x et, par conséquent, Σ en fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$, savoir :

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_m) = \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)$$

et différentiant l'équation implicite

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, s) = 0].$$

Ceci démontre, ce qui nous servira par la suite, que la quantité sous le signe **SSS** *converge uniformément* [2] : c'est-à-dire que, dans une région où les coefficients de l'équation sont holomorphes (et, par conséquent, où V est holomorphe en les $2m$ variables qu'il contient) et f régulier (dérivées continues jusqu'à l'ordre $m_1 - 1$), on n'a pas besoin de connaître la position de a pour indiquer une limite supérieure (très petite) pour ladite erreur si seulement on connaît des limites supérieures (très petites) de la distance comprise entre Σ et le point a — soit ε — et des dérivées partielles (jusqu'à l'ordre m_1) des x par rapport aux λ. Cette dernière limite existera et sera très petite avec ε (une limite inférieure de $\frac{d\Sigma}{ds}$ à l'intérieur du conoïde étant connue), si les dérivées de tout ordre $k \leqslant m_1$ de Σ

---

(1) Le choix des paramètres λ et du facteur de proportionnalité pour s (V. n° 57) sur chaque géodésique est supposé être tel qu'il satisfasse à des conditions simples de régularité (régularité des valeurs initiales des x' par rapport aux λ).

(2) On doit remarquer que le sens de ce mot est distinct de celui qu'il avait au n° 84.

par rapport aux x restent finies, ou même si leurs produits par ε^{k-1} restent, en valeur absolue, au-dessous d'une limite fixe [1], comme cela aurait lieu, par exemple, dans le cas où Σ serait une sphère de rayon ε autour de a.

107. La formule ci-dessus n'a de sens que si la surface S est régulière et si les quantités u_0, $u_1 = \frac{du}{dv}$ sont dérivables [par rapport à des coordonnées curvilignes régulières prises sur s, ou, par exemple, à $(m - 1)$ des coordonnées Cartésiennes]. Comme on a fait depuis le début une hypothèse correspondante sur u (n° **102**), le raisonnement précédent serait insuffisant à démontrer que ces conditions sont nécessaires à l'existence de u et que la méthode n'a pas laissé échapper des solutions, par le fait que ces dernières ne sont pas dérivables un nombre suffisant de fois.

La réponse est donnée par l'exemple du numéro **78**, concernant le cas de (e_{m-1}), où la non-existence (en général) de la solution apparaît par un calcul direct.

La même méthode (imitant celle de Tedone) pourrait servir pour l'équation générale (E) : en d'autres termes, on pourrait, par intégration répétée le long d'une ligne $\mathcal{L}$, déduire de v une autre solution **v** de l'équation adjointe admettant une singularité logarithmique le long de $\mathcal{L}$, mais devenant nulle (et non pas infinie) le long de Γ; on pourrait alors obtenir, grâce à elle, la valeur d'une intégrale telle que (10') et, finalement, trouver u lui-même en différen-

---

(1) Ceci équivaut à dire que la valeur absolue des dérivées correspondantes sur Σ_1 sont toutes au-dessous d'une limite supérieure fixe, Σ_1 se déduisant de Σ par une homothétie dont le pôle est a et le rapport $\frac{1}{\varepsilon}$.

Une telle homothétie altérerait les dérivées des x par rapport à $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, s, mais n'augmenterait pas l'ordre de grandeur de leurs quotients par s (lesquels, pour les dérivées par rapport à s, seraient même diminués, comme on le voit aisément).

On éviterait une telle altération si, avant de soumettre la figure à l'homothétie, on la transformait par l'introduction de coordonnées « normales » (livre II, n° **57**); transformation ponctuelle qui, comme on le sait, ne changerait pas l'ordre de grandeur des dérivées, si les dérivées des A_{ik} sont finies jusqu'au même ordre de différentiation, plus un (V. note additionnelle du Livre II).

tiant $(m - 2)$ fois. Si cette différentiation est possible, le résultat est unique, de sorte que :

La solution n'existera généralement pas quand la formule (39) n'aura pas de sens;

Dans le cas contraire, il n'existera pas d'autre solution que celle qui est donnée par cette formule.

108. Quand $m = 3$, il est clair que les résultats précédents doivent être équivalents à ceux qui se déduisent des calculs des numéros **72-77** par différentiation de la formule (10) par rapport à t_0. On peut, en fait, montrer que tel est le cas et on peut même effectuer la différentiation par des méthodes élémentaires et obtenir la valeur demandée de u_a comme limite de la somme d'une intégrale double et d'une intégrale curviligne, arrivant à une expression explicite du dernier terme complémentaire. Les points de s étant rapportés aux coordonnées curvilignes θ et λ (en fonction desquels S sera considéré, par conséquent, comme exprimé), divisons S_0 en deux parties S_1 et S_2, cette dernière contenant le voisinage de la courbe γ d'intersection de S et de Γ : la frontière (τ) entre S_1 et S_2 correspondra ainsi à $\theta = t_0 - \tau'$, en désignant par τ' une petite quantité, constante ou variable avec λ (mais, dans ce dernier cas, telle que sa dérivée par rapport à λ soit petite aussi, et du même ordre que τ' lui-même); finalement, on fera tendre τ' et, par conséquent S_2, vers zéro, de manière à pouvoir négliger tous les termes qui deviennent infinitésimaux avec τ'.

L'intégrale prise sur S_1 peut être différentiée par différentiation sous le signe $\iint$ sans aucune difficulté [1]; ceci revenant à remplacer **v** par sa dérivée par rapport à t_0, c'est-à-dire par $\chi(t_0) \cdot v$, on obtient évidemment le terme correspondant à la formule (38), avec la seule différence que l'intégration est limitée à S_1, au lieu d'être étendue à l'ensemble de S_0.

Cette précaution n'est même pas nécessaire en ce qui regarde les termes qui contiennent seulement **v** en facteur, car, cette dernière quantité étant proportionnelle à $\sqrt{t_0 - \theta}$, sa dérivée ne contiendra d'autre infini que $\frac{1}{\sqrt{t_0 - \theta}}$ dont l'intégration est permise sur tout S_0 : ou, ce qui revient au même, les termes corres-

(1) Ceci est également valable pour l'intégrale d'espace, dont on pourra d'ailleurs faire abstraction, puisque (pour $m = 3$) l'on n'a pas besoin de précautions spéciales pour la traiter.

pondants étendus à S_2 donneraient (si on opérait de la même manière), des dérivées qui s'annuleraient avec τ'.

Par conséquent, il suffit de s'occuper du terme en $\frac{d\mathbf{v}}{d\nu}$. On a vu (Cf. n° **75**) que :

$$\mathbf{v} = 2\left(\frac{\chi V}{\sqrt{w}} + \dots\right)\sqrt{t_0 - \theta}$$

Les termes qu'on a remplacés par des points contiennent les puissances supérieures(1) de $(t_0 - \theta)$. Par conséquent, ν désignant la transversale à S, on a

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\nu} = -\left(\frac{\chi V}{\sqrt{w}} + \dots\dots\right)\frac{1}{\sqrt{t_0 - \theta}}\frac{d\theta}{d\nu},$$

qui peut s'écrire (en remplaçant encore par des points les termes d'ordres supérieurs en $t_0 - \theta$)

$$(40) \qquad \frac{d\mathbf{v}}{d\nu} = \left(\frac{\chi V}{w\sqrt{w}} + \dots\dots\right)\frac{1}{\sqrt{t_0 - \theta}}\frac{d\Gamma}{d\nu},$$

car $\Gamma = w(t_0 - \theta)\dots$, où le premier facteur n'est pas nul.

Il faut exprimer $\frac{d\Gamma}{d\nu}$, ou plus exactement $\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS$. On doit observer, pour cela, que deux sortes de dérivées des x par rapport aux λ peuvent se présenter : on peut, en effet, considérer chaque x comme fonction de trois variables indépendantes θ, λ, s, ou seulement des deux premières d'entre elles, s étant une fonction de θ et de λ définie par l'équation de S. On conservera le symbole ∂ pour les dérivées de la première espèce, et celles de la seconde espèce seront désignées par des d ordinaires : elles sont liées aux premières par les relations

$$(41) \qquad \frac{dx_i}{d\theta} = \frac{\partial x_i}{\partial\theta} + \frac{ds}{d\theta}\frac{\partial x_i}{\partial s},$$

et de même pour $\frac{dx_i}{d\lambda}$. Ceci étant, on a (en choisissant un ordre

(1) Notre langage se rapporte à l'hypothèse des données analytiques, le calcul pourrait aisément s'étendre, par des artifices convenables tels que des intégrations par parties, au cas dans lequel ces données seraient simplement supposées régulières.

convenable entre les x en rapport avec le sens de la normale) :

(40′)

$$\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS = \sum\left[\pi_i dS \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i}\right] = \pm \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dx_2}{d\theta} & \frac{dx_3}{d\theta} \\ \frac{dx_1}{d\lambda} & \frac{dx_2}{d\lambda} & \frac{dx_3}{d\lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_1} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_2} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_3} \end{vmatrix} d\theta \cdot d\lambda.$$

Les quantités $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i}$ sont, comme on le sait, respectivement égales à $2s\frac{\partial x_i}{\partial s}$. Ceci montre que des dérivées d, dans la formule ci-dessus, peuvent être indifféremment remplacées par des dérivées ∂, ainsi qu'il s'ensuit de (41).

On obtiendrait une autre expression de $\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS$ en partant de l'équation $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ de S et en écrivant

$$\pi_i dS = \frac{\partial G}{\partial x_i}\,dS_G,$$

ce qui, en raison des valeurs précédentes de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i}$, donne

$$2s\,\frac{\partial G}{\partial s}\,dS_G.$$

On n'introduira pas cette quantité dans les calculs qui suivent; mais elle fournit une réponse facile (¹) à la question du signe dans la formule (40′): car on sait que G doit être écrit de manière à être positif dans le domaine d'intégration, c'est-à-dire du côté de S où est a; $s\frac{\partial G}{\partial s}$ sera évidemment négatif, et on voit qu'on doit prendre le signe — devant le premier membre de (40′), le déterminant étant pris en valeur absolue.

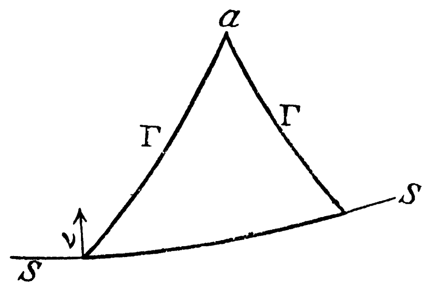


Fig. 13.

(1) Géométriquement, on pourrait observer que la transversale ν est dirigée du même côté de S que la normale correspondante [en raison de $\mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) > 0$]. Comme cette direction transversale est, d'un autre côté, intérieure au cône caractéristique, il est clair (V. fig. 13) qu'elle est dirigée vers l'*extérieur* de Γ.

En tenant compte de cette formule (40′), on trouve un élément d'intégration $u \frac{d\mathrm{V}}{d\nu} d\mathrm{S}$ qui est de la forme

$$\frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{t_0 - \theta}}\, d\theta\, d\lambda,$$

Q étant développé suivant les puissances de $(t_0 - \theta)$, savoir : $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_0 + \ldots$. En laissant de côté le facteur $d\lambda$ jusqu'à la fin des calculs, le résultat d'intégration par rapport à θ de $\theta = t_0 - \tau'$ jusqu'à $\theta = t_0$ sera :

$$2(\mathrm{Q}_0 + \ldots)\sqrt{\tau'},$$

(le coefficient de $2\sqrt{\tau'}$ étant ici développé, suivant les puissances de τ', avec le terme constant Q_0).

C'est cela qu'on a à différentier par rapport à t_0. Une telle différentiation est à effectuer aussi bien sur $\sqrt{\tau'}$ que sur les coefficients du développement Q; mais le seul terme utile — c'est-à-dire le seul qui ne devienne pas infiniment petit avec τ' — est évidemment $\frac{\mathrm{Q}_0}{\sqrt{\tau'}}$ ou, après division par χ et en tenant compte de la valeur de Q, telle qu'elle est définie par (40) et (40′) :

$$-\frac{u\mathrm{V}}{w\sqrt{w}\sqrt{\tau'}}\left\|\frac{dx_i}{d\theta}\quad\frac{dx_i}{d\lambda}\quad\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{P}_i}\right\|$$

$$= -uv\cdot\frac{1}{w}\left\|\begin{matrix}\frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dx_2}{d\theta} & \frac{dx_3}{d\theta}\\ \frac{dx_1}{d\lambda} & \frac{dx_2}{d\lambda} & \frac{dx_3}{d\lambda}\\ \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{P}_1} & \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{P}_2} & \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{P}_3}\end{matrix}\right\| = -uv\mathrm{K},$$

le déterminant étant encore pris en valeur absolue, et chaque facteur autre que v recevant la valeur qu'il prend sur Γ lui-même.

La valeur initiale de w est la même que celle de $\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}$ et ceci nous permet d'écrire le facteur de $-uv$ sous une autre forme. Car, en raison des relations

$$\mathrm{P}_1\frac{dx_1}{d\lambda} + \mathrm{P}_2\frac{dx_2}{d\lambda} + \mathrm{P}_3\frac{dx_3}{d\lambda} = 0,$$

et (puisque Γ est une caractéristique)

$$2A(P_1, P_2, P_3) = P_1 \frac{\partial A}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} + P_3 \frac{\partial A}{\partial P_3} = 0,$$

les quantités

$$\frac{dx_2}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_3} - \frac{dx_3}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_2}, \qquad \frac{dx_3}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_1} - \frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_3},$$
$$\frac{dx_1}{d\lambda} \cdot \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{dx_2}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_1}.$$

sont proportionnelles à $2P_1$, $2P_2$, $2P_3$, et, comme

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = 2\left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + P_3 \frac{\partial x_3}{\partial \theta}\right),$$

le facteur de proportionnalité a précisément la valeur K. En introduisant (comme c'est l'usage dans la théorie des fonctions Abeliennes, et comme l'a fait aussi Fredholm dans son Mémoire des *Acta Math.*, t. XXIII) trois quantités arbitraires (et, en réalité, indifférentes), k_1, k_2, k_3, on voit qu'après intégration par rapport aux λ, le résultat sera [1] (pour f encore supposé nul) :

$$(42)\quad 2\pi u_a = \lim_{r'=0} \left\{ \iint_{s_1} \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS + \int_{(r')} \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial A}{\partial P_1} & \frac{\partial A}{\partial P_2} & \frac{\partial A}{\partial P_3} \end{vmatrix}}{2(k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3)} uv \right\},$$

où il ne subsiste plus aucune influence de la fonction χ ou du choix de la courbe $\mathcal{L}$.

(1) $\frac{dx_i}{d\lambda} d\lambda$ est la même chose que dx_i, sur γ', si r' est une constante; si r' est variable, ceci n'est plus vrai, mais l'erreur relative correspondante est infiniment petite $\left(\text{en raison de l'hypothèse concernant } \frac{dr'}{d\lambda}\right)$ et n'altérera pas la limite finale donnée dans le texte.

109. Une conséquence de la présence du symbole Γ est que, quoique exprimée par une intégrale définie contenant les valeurs de u_0, u_1, f sous les signes **SS** ou **SSS**, la valeur de u n'est pas continue d'ordre zéro par rapport à ces quantités. La continuité est d'ordre m_1 (n° **20 *bis***) en u_0 et $m_1 - 1$ en u_1 et en f.

u est aussi continu d'ordre m_1 par rapport à la forme de S. Ceci s'ensuit du fait que, S étant coupé en un point M (sous un angle fini) par une géodésique quelconque issue d'un point arbitraire donné a — laquelle géodésique dépend de $m - 1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. — les dérivées, à un ordre quelconque p, des coordonnées du point d'intersection par rapport aux λ sont fonctions des coordonnées elles-mêmes, des dérivées (jusqu'au même ordre) le long de la géodésique et des dérivées prises le long de S. Or, une nouvelle surface $\overline{\mathrm{S}}$ très proche de S serait coupée par la même géodésique en un point $\overline{\mathrm{M}}$ très proche[1] de M; et si le voisinage est d'ordre p, les dérivées mentionnées plus

---

(1) Ce fait est à peine différent de la théorie classique de la continuité des fonctions implicites f, et se démontre par les mêmes raisonnements. Si, par un point M de S, on mène une géodésique telle que $\left(\frac{dG}{ds}\right) \neq 0$ — où $G = 0$ est l'équation de S; s, la longueur (ordinaire) d'un arc de géodésique compté à partir de M, et où la dérivée est prise en M lui-même ($s = 0$) — il y aura, de chaque côté de M, un arc de cette géodésique le long duquel $\frac{dG}{ds}$ conservera son signe. Soit s' la longueur d'un tel arc s'il est plus petit que ϵ, et $s' = \epsilon$ dans le cas contraire : alors, pour $s = \pm s'$, la fonction G aura deux valeurs, G' et $-G''$, respectivement positive et négative. Si alors, par chaque point de M de S (ou d'une portion limitée de S), on mène toutes les géodésiques pour lesquelles $\left(\frac{dG}{ds}\right)_0$ est plus grand qu'un nombre fixe $a > 0$, comme elles dépendent continument des $2m$ paramètres qui figurent dans l'équation générale des géodésiques, il s'ensuit de là que les quantités G', G'' qui leur correspondent, auront un minimum G_1.

On sera certain qu'une seconde surface $\overline{\mathrm{S}}$ coupera chacune des géodésiques précédentes à une distance de S plus petite que ϵ, si elle se trouve à un voisinage suffisamment proche (même d'ordre 0) de S, c'est-à-dire si son équation est de la forme $G = \delta$, avec $|\delta| < G_1$.

La conclusion correspondante concernant les dérivées s'ensuivra de ceci et des principes de la note additionnelle du livre II.

haut ne seront que très peu altérées par le changement de $\overline{S}$ en S : ceci donne la même conclusion quant à l'intégrale généralisée.

De même, une dérivée première quelconque de u_a sera continue d'ordre $m_1 + 1$ par rapport à u_0, d'ordre m par rapport à u_1 et à f et d'ordre $m_1 + 1$ par rapport à la forme de S.

110. ***Conséquences concernant les ondes et leur diffusion.*** — D'un autre côté, des résultats classiques se déduisent immédiatement de la forme de l'aire d'intégration S_0 de la formule (38). Il est évident que celle-ci met en évidence l'intervention des caractéristiques, avec la signification physique des ondes, exactement comme les formules du commencement du Livre II l'ont déjà fait pour les équations particulières les plus usuelles. On voit que toutes les données sur S n'entrent pas dans la valeur de u_a, mais seulement celles qui se rapportent aux points de S_0, c'est-à-dire aux points qui sont à l'intérieur du demi-conoïde rétrograde de sommet a.

Ainsi, ce demi-conoïde caractéristique se comporte à la façon d'un « cornet acoustique », comme le faisait, pour l'équation des ondes cylindriques, la nappe de cône de révolution du numéro **31**.

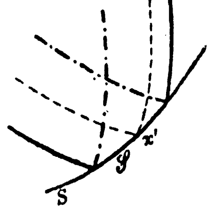


Fig. 14.

Réciproquement (Cf. Livre II, **32**), les valeurs de u_0 et de u_1 en un point déterminé x' (fig. 14) pris sur S. n'ont pas d'influence sur les valeurs de u en des points qui sont en dehors du demi-conoïde *direct* de sommet x'. Au point de vue physique, ceci signifie, comme précédemment (Livre II), qu'aucune impulsion initiale en x' ne peut réagir sur un autre point avant que ce dernier n'ait été atteint par l'onde correspondante.

Si l'impulsion initiale part non seulement d'un point, mais d'une région $\mathfrak{S}$ de S, la portion d'espace (ou plutôt d'univers) sur laquelle l'effet d'une telle impulsion pourra

se faire sentir est constituée par l'intérieur de tous les demi-conoïdes dont les sommets sont à l'intérieur de $\mathfrak{S}$: une telle région est limitée par l'enveloppe du demi-conoïde en question, quand son sommet x' parcourt le contour Λ de $\mathfrak{S}$. Cette enveloppe (en raison de principes connus concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre) vérifie de nouveau (A) : c'est encore une caractéristique, ou, en d'autres termes, une onde [1].

De telles conséquences montrent aussi, comme on l'a déjà observé pour les ondes sphériques ou cylindriques [2], que les solutions d'une équation hyperbolique ne sont pas nécessairement analytiques [3] : car (si les données ne sont pas elles-mêmes analytiques) il n'y a évidemment pas de relation entre les valeurs de u, dans les voisinages respectifs des deux points a et a' quand les traces de leurs conoïdes caractéristiques sur S sont extérieures l'une à l'autre et, par conséquent, il n'y a pas de prolongement analytique d'un de ces ensembles de valeurs à l'autre. On peut ajouter qu'une discontinuité de la dérivée N^e de u_0 ou de u_1 produirait une discontinuité correspondante en un point quelconque a situé sur le même conoïde; et si deux ensembles différents de valeurs de u_0 et u_1 ont l'un avec l'autre un contact d'un ordre arbitraire N le long d'une arête, les fonctions u qui leur correspondent respectivement auront un contact du même ordre tout le long de l'onde ci-dessus mentionnée issue de cette arête.

111. ***Diffusion des ondes.*** — On a déjà vu qu'il faut faire une distinction pour de telles propagations par ondes, en

(1) L'enveloppe en question se compose de deux nappes, une nappe extérieure (correspondant à une propagation des ondes vers l'extérieur de $\mathfrak{S}$) et une intérieure (ondes se propageant à l'intérieur de $\mathfrak{S}$) : la première, sauf spécification ultérieure (V. plus loin), limite la région mentionnée dans ce texte.

(2) V. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, t. II, livre II, p. 168.

(3) La conclusion contraire serait contradictoire avec l'existence même (qu'on prouvera plus loin) de la solution du problème de Cauchy, comme il résulte des raisonnements du livre I, n° 15.

ce qui concerne le principe de Huygens dans son sens spécial, ce que nous avons appelé la proposition (B) ou mineure de Huygens.

On voit, à la simple inspection des formules (P) et (P′), (Livre II), que les ondes sphériques et les ondes cylindriques se comportent très différemment à ce point de vue. La formule (P) donne la valeur de la solution à l'aide d'une intégrale double — qu'il faudrait désigner, dans notre système de notation, par un seul **S** — prise sur la surface de la sphère — c'est-à-dire sur l'*arête* d'intersection du cône caractéristique avec le plan initial. Un point x' de ce dernier peut agir sur le point d'univers qui est représenté par le sommet du cône, quand il est juste en onde avec lui (liv. II, n° 32), et seulement dans ce cas. Si u_0 et u_1 sont nuls partout, excepté dans une petite région autour d'un point déterminé x' (impulsion initiale localisée dans le voisinage immédiat de x'), la valeur de u qui représente l'effet ultérieur de cette impulsion sera nulle partout excepté dans le voisinage immédiat du demi-conoïde direct de x' : ce qui, en n'importe quel point donné (x_0, y_0, z_0) de l'espace à trois dimensions ordinaire, correspond à un petit intervalle de temps après lequel tout retournera au repos. C'est précisément la proposition (B).

Tel n'est pas du tout le cas pour les ondes cylindriques. Les formules de M. Volterra, ou, même, en nous restreignant au cas le plus simple du problème relatif à $t = 0$, la formule (P′), expriment la solution de (e_2) en fonction de u_0 et u_1 par des intégrales doubles correspondant au signe **SS** dans nos notations, et étendues (dans le plan $t = 0$) à tout l'intérieur de la trace du conoïde caractéristique. Elles montrent, par conséquent, que, pour de telles ondes, un point du plan initial $t = 0$ est de nature à agir sur le point d'univers (x_0, y_0, t_0), c'est-à-dire sur le point (x_0, y_0) à l'instant t_0, non seulement s'ils sont juste en onde, mais aussi s'ils sont sous onde l'un avec l'autre. En d'autres termes, l'action d'une impulsion initiale sur le milieu à deux dimensions se propagera avec la vitesse constante ω et commencera à être perceptible en (x_0, y_0) au moment

précis où l'onde ainsi engendrée atteint ce point; mais elle *continuera* à l'être *après* cet instant. Il existera ce que nous appellerons une *intégrale résiduelle*, correspondant à cet effet d'une impulsion à distance continuant après le moment où l'onde est passée. Si on suppose qu'initialement ($t = 0$), l'impulsion est localisée dans une certaine région $\mathfrak{S}$ du plan, les fonctions u_0 et u_1 étant identiquement nulles en dehors de cette région, la quantité $u(x_0, y_0, t_0)$ sera nulle si le cercle auquel le signe **SS** de (39) est étendu est entièrement en dehors de $\mathfrak{S}$ (au point de vue physique, cela signifie qu'aucune onde issue de l'impulsion initiale n'aura le temps d'atteindre ce point). Elle sera naturellement différente de zéro si la circonférence de ce cercle coupe $\mathfrak{S}$ (instants où certaines ondes issues d'impulsions initiales passent en notre point). Elle sera encore différente de zéro — et sera ce que nous appelons une *intégrale résiduelle* — si le cercle susdit comprend entièrement à son intérieur $\mathfrak{S}$ (1). Ceci signifie que la mineure d'Huygens — proposition précédemment désignée par (B) — *ne sera pas vraie dans ce cas*. Après un temps donné quelconque t, l'effet d'une onde provenant d'un point O est localisé, pour le cas actuel, non seulement sur une circonférence de centre O et de rayon at, mais aussi dans tout l'intérieur de ce cercle.

Ceci s'exprime souvent en disant que les ondes cylindriques — contrairement aux ondes sphériques (ordinaires et non pas amorties) — *diffusent*.

Si nous prenons maintenant n'importe quelle autre équation à un nombre impair de variables indépendantes, il est évident, d'après la formule (39), qu'on obtiendra toujours la même conclusion.

---

(1) Le domaine d'influence d'une impulsion initiale localisée dans la région de $t = 0$ est limité, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut [V. note (1), p. 238], par l'onde extérieure issue de l'arête qui limite $\mathfrak{S}$. Pour des ondes sans diffusion, telles que des ondes sphériques, ce domaine consisterait en l'espace annulaire compris entre les deux nappes (la nappe extérieure et l'intérieure) de la caractéristique issue de cette arête (V. fig. 14).

La mineure de Huygens n'est valable pour aucun phénomène régi par une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à un nombre impair de variables indépendantes.

Toute équation de ce genre à un nombre impair de variables indépendantes, admet des intégrales résiduelles (1).

112. De plus, un fait remarquable concerne les signes de ces intégrales résiduelles. Supposons, pour plus de simplicité, (E) sans second membre, c'est-à-dire $f = 0$, de sorte qu'on n'aura à s'occuper que des intégrales de surface **SS**. Il est clair que, tout au moins pour a suffisamment proche de S, la partie principale de tout élément d'une telle intégrale sera donnée par la plus haute puissance de Γ au dénominateur, par conséquent par le terme $u\,\dfrac{dv}{d\nu}$, ou, plus particulièrement, la partie

$$-\frac{m-2}{2}\,\frac{uV\,\dfrac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{m}{2}}} = -(m-2)\,uVs\,\frac{\sum \pi_i \dfrac{dx_i}{ds}}{\Gamma^{\frac{m}{2}}}.$$

Le signe est celui de u, car, les π_i désignant les paramètres directeurs de la normale à S intérieure à T, c'est-à-dire de celle qui est dirigée vers le côté où est a, la somme $\sum \pi_i \dfrac{dx_i}{ds}$ est négative.

Si on avait alors affaire à une intégrale ordinaire, elle aurait le signe de u sur S (en supposant que ce signe soit constant). Mais ici, le signe **SS** est modifié par une intégrale $(m-2)^{\text{uple}}$ complémentaire, qui a nécessairement le signe opposé.

---

(1) Duhem (*Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, t. II, p. 139) cherche si (e_2) peut admettre des solutions telles que $\psi(r)\,F(r-\omega t)$, contenant la fonction arbitraire F (tandis que ψ est supposé être une expression déterminée en r). La conclusion négative qu'il obtient peut être considérée comme évidente *a posteriori* par le résultat du texte : car (e_3) admet de telles solutions, et leur existence suffit (V. *ibid.*, t. I, livre VII, n° 2) à démontrer le principe de Huygens au sens (B). La même hypothèse pour (e_2) conduirait par conséquent à la même conclusion, que nous savons maintenant être fausse.

Or, le premier membre doit avoir le même signe que les valeurs de u sur S, si on continue à admettre que le point u est dans le voisinage de S.

Par conséquent, pour des valeurs paires de m_1, c'est-à-dire *pour* $m = 5, 9, 13, \ldots,$ *c'est l'intégrale* $(m - 1)^{\text{uple}}$ *qui donne le signe; mais pour* m_1 *impair, c'est-à-dire* $m = 3, 7, \ldots,$ *c'est au contraire le terme complémentaire qui prévaut.*

Mais si on prend alors le cas ci-dessus mentionné de l'intégrale résiduelle, *le terme complémentaire s'annule.* Par conséquent, *si* u *est positif, l'intégrale résiduelle est positive pour des équations à* $4p + 1$ *variables, mais négative pour des équations à* $4p + 3$ *variables.*

Tel est, en particulier, le cas des ondes cylindriques.

Ceci est vrai tout au moins aussi longtemps que le point considéré est suffisamment près de S et que les valeurs données de $\frac{du}{dv}$ ne sont pas trop grandes en comparaison de celles de u.

113. *Cas des frontières caractéristiques.* — Des circonstances particulières se présentent quand S est constituée par des portions de caractéristiques, comme cela a déjà lieu dans l'application de la méthode de Riemann [1] pour $m = 2$.

Les formules précédentes restent valables dans ce cas, comme l'ont fait remarquer MM. d'Adhémar et Coulon [2], à condition que S possède la propriété géométrique de couper le conoïde caractéristique Γ, ayant n'importe quel point d'une certaine région $\mathcal{R}$ comme sommet, de manière à former, avec Γ, la limite d'une portion T de l'espace.

La dérivée transversale que nous avons systématiquement introduite ne vérifie plus, cependant, dans ce cas, la condition de se rapporter à une direction extérieure à S : de sorte que cette dérivée $\frac{dv}{dv}$ *peut être considérée comme prise*

(1) Voir Darboux, *Leçons*, t. II (2e éd.), no 359, p. 79.
(2) D'Adhémar, *C. R. Ac. Sc.*, 11 févr. 1901; Coulon (*Thèse*, p. 53).

le long des courbes (les bicaractéristiques) *tracées sur* S *elle-même :* sa connaissance n'est plus distincte de celle de u lui-même en tout point de S.

Comme, en raison de nos formules, u et $\frac{du}{d\nu}$ sont les seules quantités qu'on ait besoin de connaître, sur S pour déterminer la fonction inconnue, on voit qu'*une solution de* (E) *est déterminée quand on connaît ses valeurs sur une frontière constituée par des portions de caractéristiques* (avec les conditions géométriques précédemment mentionnées).

Quoiqu'une seule valeur numérique soit ainsi donnée en chaque point de S, un tel problème a toutes les propriétés du problème de Cauchy [1].

114. *Propriété d'échange.* — Prenons pour S une nappe du conoïde caractéristique Γ', de sommet a', et située de telle manière qu'elle limite avec Γ un domaine T; pour u, la solution de l'équation sans second membre donnée

$$\mathcal{F}(u) = 0,$$

analogue à v, c'est-à-dire celle qui est singulière en a' et qui est, autour de ce point, de l'ordre de

$$\frac{1}{\Gamma'^{\frac{m-2}{2}}}$$

Cette quantité n'est plus finie dans T, étant infinie le long de Γ'; elle est cependant de nouveau d'ordre fractionnaire, de sorte que si on intègre dans T, les termes relatifs aux limites Γ, Γ', disparaîtront encore. Il n'y aura pas d'altération de cette conclusion causée par la présence de l'intersection de Γ et Γ' à cause de ce qui a été établi au numéro **92**. Tout ce qu'on aura à faire sera, comme plus

(1) Ceci est la manière dont les surfaces caractéristiques constituent la transition entre les surfaces ayant une orientation d'espace, pour lesquelles on doit prendre le problème de Cauchy, et les surfaces orientées dans le temps, sur lesquelles on ne peut choisir arbitrairement qu'une seule valeur numérique en chaque point.

haut, d'isoler les points a et a', en leur appliquant ce qui a été dit aux numéros **104, 105**; on obtiendra évidemment :

$$u_a = v_{a'}$$

La solution élémentaire ne change pas de valeur si on échange simultanément les deux points dont elle dépend et l'équation donnée avec son équation adjointe.

Ceci est la *relation d'échange*, entièrement semblable à celle qui existe pour la fonction de Riemann relative à l'équation hyperbolique à deux variables ou à la symétrie de la fonction de Green dans la théorie du potentiel. Elle se présente sous cette forme simple, comme on le voit, grâce à la précaution que nous avons prise de diviser par $\sqrt{|\Delta_a|}$ la solution singulière en a.

En raison de cette relation, on voit que la fonction v, *considérée comme une fonction du point* a (où $x_1\, x_2, \ldots, x_m$ sont fixés), est une solution de l'équation (sans second membre) donnée $\mathcal{F} = 0$.

Comme les deux membres de la relation précédemment écrite sont des fonctions analytiques, on peut remarquer que *la propriété d'échange reste valable dans le cas elliptique* (1).

---

(1) Une démonstration directe de ceci serait plus difficile que dans le cas hyperbolique et, d'ailleurs, ne présenterait pas le même intérêt, la raison en étant que la théorie de l'équation elliptique ne repose pas sur la solution élémentaire elle-même, mais sur les fonctions de Green, qui, quoique déduites de cette solution par addition de termes réguliers, doivent être formées en relation avec chaque espèce de conditions aux limites.

CHAPITRE III

SYNTHÈSE DE LA SOLUTION OBTENUE

115. Il faut maintenant démontrer que la fonction u définie par la formule (39) vérifie effectivement toutes les conditions du problème [1] : ainsi (et seulement alors) on aura démontré que le problème de Cauchy admet une solution. Cette démonstration consiste naturellement en deux parties : on montrera d'abord que l'équation indéfinie aux dérivées partielles est vérifiée; puis, avec une hypothèse géométrique, — savoir que S a partout une direction d'espace, — on montrera qu'il en est de même pour les conditions définies.

La vérification de l'équation aux dérivées partielles elle-même, qui autrement ne serait pas exempte de difficultés, devient très simple quand on se sert de notre symbole spécial d'intégration. Elle est immédiate pour l'équation sans second membre, c'est-à-dire quand l'expression (39) de $(-1)^{m_1}\pi\Omega_{2m_1-2}u_a$ se réduit à son second terme. Car on sait (nos **87**, **95**) que, pour différentier ceci par rapport aux a, il suffit de différentier sous le signe $\mathbf{SS}$. Or, la quantité à intégrer contient seulement les a par le facteur v, qui est (n° précédent) une solution de l'équation donnée.

115 *bis*. Soit maintenant $f \neq 0$. On n'aura à s'occuper que de l'intégrale m^{uple}

$$(43) \qquad -\left|\overline{\mathbf{SSS}_T\, vf\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_m}\right. .$$

(1) Ceci a d'abord été entrepris par M. d'Adhémar (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXIX, 1901, p. 190, et *Thèse*, Paris, 1904) tout au moins pour les équations sans seconds membres. V. aussi son ouvrage, *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*, Paris, Gauthier-Villars, 1907.

On lui appliquera des méthodes entièrement semblables à celles de la théorie classique des potentiels.

Pour effectuer la première différentiation de cette intégrale par rapport à une des coordonnées a_i, il suffit de différentier sous le signe **SS**. Car l'intégrale ainsi obtenue

$$(43') \qquad \mathbf{SSS}\, \frac{\partial v}{\partial a_i}\, f\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m$$

a un sens : c'est-à-dire qu'en isolant le point a par une surface avoisinante Σ (voir fig. 12) on obtient une intégrale qui tend vers une limite déterminée quand Σ tend vers a. On le voit en faisant le même raisonnement qu'aux numéros **104-105**. Mais, de plus, l'intégrale ci-dessus est uniformément convergente, de sorte que l'erreur commise en substituant le domaine d'intégration T′ (fig. 12) à T a une limite supérieure qu'on peut assigner sans connaître le point a, aussi longtemps qu'on le sait suffisamment proche de Σ.

Par conséquent, en vertu d'un raisonnement bien connu, l'intégrale (43′) est la dérivée de (43) même quand elle est prise dans le domaine T.

Pour différentier une deuxième fois, on considérera encore la surface Σ, qui partage le domaine d'intégration en deux parties, l'une T′ entre S et Σ, l'autre T″ entre Σ et a.

Dans T′, on différentiera directement sous le signe **SS**; dans T″, on écrira :

$$-\frac{\partial v}{\partial a_i} = -\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La quantité $\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ donne une intégrale qui peut être différentiée sous le signe **SS**, la démonstration en étant à peine différente de celle du numéro **106**, si l'on commence par remarquer que les termes du premier degré de Γ contiennent seulement les combinaisons $(x_1 - a_1)$, $(x_2 - a_2)$, ... $(x_m - a_m)$: car, en tenant compte de ce fait, $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_i}\right)$, développé suivant les puissances de ces

différences, commence encore par des termes quadratiques, et on a :

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial v}{\partial a_i}+\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial a_k}\left[\frac{1}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{m-2}{2}\frac{V}{\Gamma^{\frac{m}{2}}}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a_i}+\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)\right]$$
$$=\frac{Q_3}{\Gamma^{\frac{m}{2}+1}},$$

le numérateur Q_3 commençant par des termes cubiques. En adoptant les coordonnées s, λ, des numéros **104-106**, la quantité à intégrer ne contiendra, par conséquent, pas de puissances de s au dénominateur, mais uniquement $\mathbf{H}^{\frac{m}{2}+}$ comme il fallait le démontrer, de sorte que l'on aura :

$$(44)\qquad \frac{\partial}{\partial a_k}\Big|\overline{\mathbf{SSS}\left(\frac{\partial v}{\partial a_i}+\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx_1\cdots\cdots dx_m}$$
$$=\Big|\overline{\mathbf{SSS}\,\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial v}{\partial a_i}+\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx_1\cdots\cdots dx_m}.$$

Quant à l'intégrale

$$\Big|\overline{\mathbf{SSS}_{T''}\,f\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx_1\cdots\cdots dx_m},$$

elle sera transformée par la formule de Green (¹) en

$$(44')\qquad -\Big|\overline{\mathbf{SSS}_{T''}\,v\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\cdots\cdots dx_m}+\Big|\overline{\mathbf{SS}\;vf\pi_i\,dS},$$

π_i étant, comme précédemment, un cosinus directeur de la normale à Σ dirigée vers l'intérieur de T′ (et, par conséquent, vers l'extérieur de T″).

(1) On opère de nouveau comme au nº **94**.

La différentiation sous le signe **SS** ne présente plus aucune difficulté, et on a :

$$
-\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\left|\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}}\, vf\, dx_1 \ldots dx_m\right.
$$

$$
= -\left|\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}''}\frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f dx_1 \ldots dx_m\right.
$$

$$
+\left|\mathbf{SS}_{\Sigma}\, f\pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k}\, d\mathrm{S} + \mathrm{R} + \mathrm{R}_1\right.
$$

[R étant l'intégrale m^{uple} (44) prise dans T''; R_1, le premier terme de (44')]; ou, en faisant encore tendre Σ vers le point *a* :

$$
-\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\left|\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}}\, vf\, dx_1 \ldots dx_m\right.
$$

$$
= \lim\left\{-\left|\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}'}\frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f dx_1 \ldots dx_m\right. + \left|\mathbf{SS}_{\Sigma}\, f\pi_i \frac{dv}{da_k}\, d\mathrm{S}\right.\right\}
$$

Le résultat de cette substitution de l'expression (43) dans le polynôme différentiel $\mathcal{F}$ est alors :

$$
\lim\left|\mathbf{SS}_{\Sigma}\, f\sum_{i,k} \mathrm{A}_{ik}\pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k}\, d\mathrm{S},\right.
$$

limite qui est entièrement semblable (1) à celle de la quantité (37) du numéro **105**, à laquelle elle se ramène facilement.

116. Arrivons aux conditions aux limites.

On a ici à faire une hypothèse géométrique convenable quant à la forme de S. On suppose que son plan tangent

---

(1) Les deux expressions ne diffèrent que par le changement de $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ en $\frac{\partial v}{\partial a_k}$, et par le fait que les A_{ik} sont pris, dans un cas, au point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et, dans l'autre, au point $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

a partout une direction d'espace. On sait déjà, d'après le livre I, que si tel n'était pas le cas, le problème ne serait généralement pas possible. On admettra même, pour l'instant, que la condition est *strictement* vérifiée : c'est-à-dire qu'aucun plan tangent de S n'a une direction caractéristique. Par conséquent, de tels plans tangents feront un angle fini avec la direction de toute courbe qui sera bicaractéristique ou qui sera intérieure au cône caractéristique.

S'il en est ainsi, quand a s'approchera indéfiniment d'un point déterminé quelconque P pris sur S, le conoïde caractéristique correspondant découpera sur S une aire infiniment petite dans le voisinage immédiat de P, les segments de géodésiques issues de a compris entre ce point et S_0 étant tous aussi infiniment petits.

Si, de plus, la surface S est une surface régulière, de sorte que l'une des coordonnées admet, par rapport aux autres, des dérivées partielles finies jusqu'à un certain ordre p, les dérivées de s par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, jusqu'au même ordre, seront aussi infinitésimales.

Il nous faut montrer :

1° que u tend vers la valeur donnée $(u_0)_P$;

2° que la dérivée $\frac{du}{dv}$ dans la direction de la transversale en P tend vers la valeur donnée $(u_1)_P$.

La première démonstration est immédiate. Les **SS** partiels de (39) ne diffèrent pas essentiellement de ceux qu'on a considérés dans (4) (n°s **104, 105**) pour en trouver les valeurs limites : si ce n'est qu'ici, la surface d'intégration S reste fixe au lieu de se mouvoir vers a, ce dernier point étant supposé, par contre, s'en rapprocher indéfiniment. Mais comme le raisonnement précédent ne supposait aucunement a fixe, on peut encore affirmer qu'un des **SS** de (39) tend vers

$$(-1)^{m_1} \pi \Omega_{2m_1-2}\, u_P$$

et que le reste tend vers zéro. Pour les mêmes raisons, on peut aussi dire (grâce au n° **96**) que le terme en **SSS** est infiniment petit. La première conclusion est donc démontrée.

117. La démonstration directe de la seconde conclusion concernant $\frac{du}{dv}$, serait plus délicate. Comme, en raison de la présence de $\frac{dv}{dv}$, un terme de **SS** de la valeur de u est comparable à un potentiel de double couche, les difficultés classiques qui se présentent dans l'étude de la dérivée normale d'un tel potentiel apparaîtraient aussi dans notre démonstration, l'introduction du symbole $\lceil$ y apportant une nouvelle complication.

Un raisonnement indirect nous conduira beaucoup plus simplement au résultat : il consiste à nous servir du fait que la conclusion cherchée serait certainement vraie si S était analytique ainsi que les autres données u, $\frac{du}{dv}$ et f, puisque, dans ce cas, on sait, par le théorème fondamental de Cauchy, que le problème admet une solution, une dernière étant nécessairement donnée par la formule ci-dessus.

Mais, d'un autre côté, on peut considérer une surface analytique $\overline{S}$ ayant avec S, en P, un contact d'un certain ordre q (ceci n'exige que le fait que S soit régulier jusqu'à cet ordre). De même, on peut considérer deux fonctions analytiques $\overline{u_0}$ et $\overline{u_1}$ des coordonnées d'un point arbitraire $\overline{M}$ de $\overline{S}$ ayant, avec u_0 et u_1 (valeurs de ces quantités pour le point M correspondant à $\overline{M}$), un contact d'ordre q en P et une fonction analytique $\overline{f}$ ayant avec f un contact du même ordre. Si on remplaçait S par $\overline{S}$, f, u_0, u_1 par $\overline{f}$, $\overline{u_0}$, $\overline{u_1}$, changeant ainsi u en $\overline{u}$, la convergence de $\frac{d\overline{u}}{dv}$ vers $(u_1)_P$ serait certaine. Mais, d'un autre côté, quand a s'approche indéfiniment de P, on sait que le domaine d'intégration se confine, lui aussi, au voisinage immédiat de P et que, dans de telles régions, la surface S et les fonctions f, u_0, u_1 ont, avec $\overline{S}$, $\overline{f}$, $\overline{u_0}$, $\overline{u_1}$ respectivement, des voisinages infiniment étroits de l'ordre q. Par conséquent (grâce au n° **109**), si q est assez grand, la différence $\frac{du}{dv} - \frac{d\overline{u}}{dv}$ tend vers zéro, et $\frac{du}{dv}$ a aussi la limite $u_1(\mathrm{P})$.

118. *Analogie avec les potentiels ordinaires.* — La valeur limite u_0(P) s'obtient par l'application de notre formule au petit domaine conoïdal T construit au moyen de a, de quelque côté que a s'approche de S (fig. 15), et cette valeur limite est ainsi la même des deux côtés. Mais il faut remarquer que, quand on passe d'un côté à l'autre, le sens de la normale doit être changé en raison des règles du livre II, n° **38**, ainsi que le sens de la transversale ν. Si on gardait le même sens sur ν dans les deux cas, la valeur du **SS** *changerait de signe* au moment précis où on traverserait S : discontinuité évidemment semblable à celle des potentiels de surface ordinaires. Cette analogie, ainsi que d'autres de la même espèce (V. plus loin) mises en évidence par M. Volterra (*Congrès de Rome*, 1908, t. II, p. 90), est complétée par le fait que, sur S lui-même, notre intégrale **SS** prend la valeur o, ce qui est la moyenne arithmétique entre les deux valeurs opposées susdites.

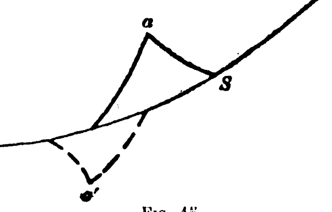


Fig. 15.

119. *Cas d'une frontière caractéristique.* — Il est évident que le succès des vérifications ci-dessus dépend essentiellement de notre hypothèse géométrique concernant S, par l'intermédiaire du fait que l'intersection du conoïde caractéristique avec S se réduit à une petite aire autour de P, quand a s'approche indéfiniment de ce dernier point.

On doit s'attendre à rencontrer des circonstances toutes différentes quand cette condition géométrique n'est plus remplie, ce qui arrivera dès que S cessera d'avoir une orientation d'espace.

Il est remarquable — quoique cela puisse être prévu d'après ce que nous savons concernant le cas des données analytiques [1] — que la vérification réussisse encore

---

(1) On a obtenu, au n° **64**, livre II, la construction de la solution, quand u est donné sur un conoïde caractéristique.

dans un cas pour lequel l'aire S_0 ne devient plus infinitésimale en tout sens : à savoir le cas (intermédiaire entre les surfaces d'espace et les surfaces orientées dans le temps) de S *caractéristique*.

Comme on l'a vu au numéro **113**, les données sont alors réduites à la valeur de u seul en chaque point, de sorte que (rien naturellement n'étant changé quant à l'équation indéfinie aux dérivées partielles elle-même) il n'y a qu'une seule sorte de condition aux limites à vérifier.

Toutefois, cette vérification présente quelques difficultés particulières dues à deux circonstances. L'une est celle que nous venons de mentionner et a été remarquée par M. d'Adhémar (V. *Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, t. XX,

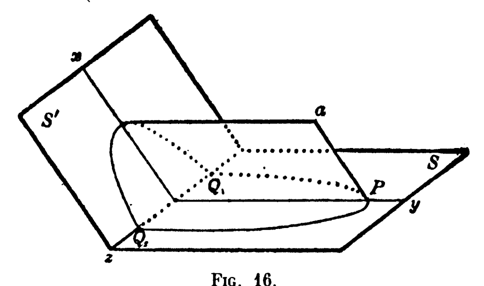


Fig. 16.

p. 143, 1909) : elle résulte de ce que le cas présent est intermédiaire entre les considérations des numéros **116-117** et celles que nous allons rencontrer plus loin. Supposons, par exemple, que nous ayons à traiter l'équation des ondes cylindriques (avec $\omega = 1$), de sorte que Γ est un cône circulaire d'angle au sommet droit, et aussi que S est un plan de direction caractéristique qui fait avec l'axe des t un angle de 45 degrés. Alors, ce dernier ne coupera plus Γ suivant une ellipse, mais suivant une parabole (fig. 16) qui, quand a approche de S, ne se réduit plus à un point, mais à une ligne entière, savoir une demi-génératrice de Γ, le volume compris entre S et Γ étant (pour toute position de a extérieure à S) étendu indéfiniment dans une direction. Comme on le voit par cet exemple, une S caractéristique *régulière* ne suffit pas en général par elle-même à constituer, avec Γ, le contour

complet du domaine T. Pour enclore un volume, il faudra nécessairement *ou* (comme dans l'exemple précédent) introduire une seconde surface S', telle qu'un second plan caractéristique coupant le premier (V. fig. 16); *ou* supposer que S a un point singulier (étant elle-même — comme au livre II, n° **64** — un cône caractéristique, ou une sorte d'angle polyèdre à faces caractéristiques, etc.). Une démonstration générale devrait tenir compte de toutes ces singularités possibles (1).

En nous limitant, pour plus de simplicité, au cas de $m = 3$, nous supposerons, d'abord, que la frontière consiste en deux caractéristiques régulières S et S' sécantes entre elles; en faisant tendre a vers un point donné quelconque P de S, on a à démontrer que la quantité u donnée par (39) tendra vers la valeur donnée $(u_0)_P$. Il est utile d'observer que ceci équivaut à démontrer que le problème a une solution (2) [puisque cette solution ne peut être autre que (39)].

A l'aide d'une transformation ponctuelle convenable, on peut admettre que S et S' sont deux plans de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$, tous les plans $x =$ const., $y =$ const. devenant des caractéristiques, et même de telle manière que les bicaractéristiques correspondantes soient parallèles à l'axe des y et à l'axe des x, l'axe des y lui-même passant par P. On admet aussi que les parties utiles des plans S et S' — c'est-à-dire les parties qui portent les données — sont les parties positives.

Il est facile de s'assurer que la disposition générale de la figure sera la même que dans l'exemple ci-dessus. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque,

---

(1) La démonstration de M. d'Adhémar (*Circ. Mat. di Palermo*, [*loc. cit.*]) concerne le cas où S est un cône caractéristique.

(2) L'importance de ceci repose sur le fait qu'on doit (V. plus loin) changer de variables, après quoi seulement la vérification peut se faire. *A priori*, le fait que la même vérification réussirait avec les premières variables, ne serait pas évident si l'on ne montre que l'expression (39) reste invariante (ou invariante à un facteur convenable près) par de telles transformations. On évite une telle démonstration par la remarque du texte (l'existence d'une solution étant évidemment une propriété invariante), et même l'invariance de (39) pourrait, au besoin, se déduire de notre raisonnement.

par x_0, y_0, o, les coordonnées (1) de a, par lequel on mène une parallèle à l'axe des y, celle-ci étant une bicaractéristique. Dans le voisinage d'un point quelconque (x_0, y, o) de cette ligne, on peut développer Γ suivant les puissances de $x - x_0$, z, les coefficients étant fonctions de y. En se rappelant :

1° que $\Gamma = 0$ touche le plan $x = x_0$ le long d'une ligne $z = 0$;

2° qu'il est situé, par rapport à ce plan, du côté des x décroissants;

3° que $\Gamma > 0$ correspond à l'intérieur du conoïde et, par conséquent, $\Gamma < 0$ à des points tels que $x = x_0$, $z \neq 0$, on voit que le développement doit être de la forme

$$(45) \qquad \Gamma = n(x_0 - x) - Nz^2 - 2N_1(x_0 - x)z - N_2(x_0 - x)^2 + \ldots..$$

(où les points représentent des termes d'ordres supérieurs), les deux coefficients n et N étant positifs. Le premier, mais non le second, s'annule en a et est, en général, sensiblement proportionnel à ($y_0 - y$).

En égalant (45) à o et en faisant $x = 0$, on obtient évidemment une sorte de parabole ayant P comme sommet et $z = 0$ comme axe, qui s'aplatit le long de cette dernière ligne quand x_0 devient nul. Toute ligne $y =$ const. coupe cette courbe en deux points $z = \alpha \pm \sqrt{\beta}$, en désignant par α et β deux développements suivant les puissances de x_0 sans termes constants. Le théorème de factorisation (V. p. 112 et la note correspondante, qui s'applique de nouveau au cas actuel) montre qu'on peut écrire

$$(46) \qquad \Gamma = [\beta - (z - \alpha)^2] \; G(x, y, z, x_0, y_0),$$

où G est un autre développement en ($x_0 - x$), z, ayant N comme terme constant.

Ceci étant bien entendu, on arrive à la détermination de

---

(1) L'hypothèse $z_0 = 0$ ne diminue pas la généralité, puisqu'on peut prendre P variable avec la position de a, en le remplaçant par un autre point P′ situé sur la même parallèle à l'axe des y que a, et en faisant tendre finalement P′ vers P comme a. Ceci demanderait une translation variable des axes. ce qui est sans inconvénient pour la légitimité du raisonnement.

la valeur limite de u_a, où l'on a (les **S** étant ici remplacés par des signes $\int$ ordinaires) :

$$(39') \qquad u_a = -\frac{1}{2\pi}\left[-\int\int\int fv\,dx\,dy\,dz + \overline{\left|\int\int\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS\right.}\right].$$

En considérant exclusivement le cas de $m = 3$, on a l'avantage de ne rencontrer aucune difficulté concernant l'évaluation du symbole $\overline{|\ }$. Ceci est clair, tout d'abord, pour l'intégrale d'espace du premier terme, laquelle, v étant seulement infini d'ordre $\frac{1}{2}$, a une signification au sens classique et devient infiniment petite en même temps que le volume d'intégration.

Dans l'intégrale double, il ne subsiste qu'un infini d'ordre $\frac{3}{2}$, celui qui provient de $\frac{dv}{d\nu}$ et qui peut être éliminé à l'aide d'une intégration par parties. Car, sur S, la direction ν étant parallèle à l'axe des y, on peut prendre $d\nu = dy$ en posant

$$dS = K\,dy\,dz,$$

K étant une fonction convenable de y, z; et, de même, sur S′ on peut prendre $d\nu = dx$ avec

$$dS' = K'\,dx\,dz.$$

Par conséquent, l'intégrale double $\overline{\left|\int\int u\frac{dv}{d\nu}dS\right.}$ relative à S sera $\left(\text{au facteur } \frac{1}{2\pi} \text{ près}\right)$:

$$\overline{\left|\int\int Ku\frac{\partial v}{\partial y}dy\,dz\right.} = \int dz\,\overline{\left|\int Ku\frac{\partial v}{\partial y}dy\right.}$$
$$= \int dz\left[(Kuv) - \int v\frac{\partial(Ku)}{\partial y}dy\right]$$

Les limites d'intégration, pour une valeur quelconque de z, seront données d'abord par l'arête du dièdre (c'est-à-dire un segment Q_1Q_2 de l'axe des z) et par le conoïde caractéristique. Mais le terme correspondant à la dernière limite est infini fractionnaire, et, par conséquent, doit être

supprimé : de sorte que la valeur de l'intégrale sur S de (39'), multipliée par -2π, est

$$(47)\quad -\int_{Q_1}^{Q_2} Kuv\,dz + \iint \left(-K\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu\right) v\,dy\,dz,$$

l'intégrale simple étant prise le long de l'axe des z. De cette manière, tout infini d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ a disparu.

De plus, la valeur de v est

$$v = \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{V_0}{\sqrt{\Gamma}} + V_1\sqrt{\Gamma} + \cdots$$

Dans le premier terme — évidemment le seul qui puisse donner un résultat différent de zéro dans (47) —, on remplacera Γ par la valeur (46), dont le premier facteur peut aussi s'écrire

$$-(z-z_1)(z-z_2),$$

$z = z_1$ et $z = z_2$ désignant les intersections d'une parallèle quelconque à l'axe des y avec le conoïde caractéristique de sommet a, de sorte que z_1 et z_2 sont des fonctions de y (x étant nul) et des coordonnées de a.

De cette manière, l'intégrale simple prise le long de Q_1Q_2 devient

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{KuV\,dz}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)}\sqrt{G}}$$

et, quand a s'approche de P et que, par conséquent, Q_1Q_2 devient infiniment petit, une telle intégrale est sensiblement égale à

$$(48)\qquad \frac{-K^\circ u^\circ V^\circ}{\sqrt{N^\circ}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)}},$$

(K°, u°, V°, N° désignant les valeurs des quantités K, u, V, N à l'origine des coordonnées) dont la limite s'écrit immédiatement, le dernier facteur étant, comme on sait, toujours égal à π.

La même méthode s'applique évidemment à l'intégrale double, en l'écrivant

$$\int dy \int_{z_1}^{z_2} \left(-K\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu\right) \frac{V}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)}\sqrt{G}}\,dz\,;$$

en opérant ainsi sur chaque intégrale simple relative à z, on voit que (47) tend vers la limite

$$(48\ bis)\qquad \pi \int \left(- K \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu \right) \frac{V_0}{\sqrt{N}}\, dy.$$

On opère tout à fait de la même manière sur l'intégrale relative à $\mathfrak{S}'$, mais avec la simplification qu'il ne subsiste pas d'intégrale simple comme pour (47) (le segment correspondant tendant vers zéro) : la limite correspondante sera :

$$(48\ ter)\qquad \pi \frac{K^0 u^0 V^0}{\sqrt{N^0}}$$

La question est de savoir si la somme de (48), (48 *bis*) et (48 *ter*) est égale à $2\pi u_P$. Pour y répondre, nous emploierons la méthode bien connue en Calcul des Variations : on fait sortir $\frac{\partial u}{\partial y}$ du signe $\int$ au moyen d'une intégration par parties, ce qui, une fois fait, donne la valeur demandée de la somme, si :

1° après cette transformation, les termes en u s'annulent en même temps sous le signe $\int$ de sorte qu'il ne reste aucune intégrale quelle qu'elle soit [1];

2° les termes en u^0 se détruisent aussi l'un l'autre;

3° le coefficient de u_P est égal à 2π.

Ces conditions sont suffisantes; mais — en raison du Lemme fondamental de Calcul des Variations — on sait bien qu'elles sont aussi *nécessaires*. La conséquence en est, dans le cas présent, qu'on peut affirmer *a priori* qu'elles sont remplies et qu'il n'est besoin d'aucun calcul pour cela. Car on a vu, Livre II, n° **64**, que le problème a une solution (et, par conséquent, que la vérification présente *doit* réussir) toutes les fois que les données sont analytiques. Ainsi, la somme des quantités (48) à (48 *ter*) se réduit à $2\pi u_P$ pour tout u analytique, et ceci ne peut être [2] que si les trois conditions dont il s'agit sont remplies.

---

(1) En d'autres termes, on doit avoir identiquement (pour $x = z = 0$) :

$$\left(\frac{dK}{dy} + KL \right) \frac{V_0}{\sqrt{N}} = 2 \frac{d}{dy} \left(\frac{KV_0}{\sqrt{N}} \right)$$

(2) Le Lemme fondamental continue, comme on le sait, à s'appliquer

120. Le calcul direct des expressions (48), (48 *bis*) et (48 *ter*) est cependant intéressant et mérite d'être entrepris. Il semble, au premier abord, se heurter à une difficulté insurmontable, en raison du fait que les valeurs de V le long de la bicaractéristique sont déduites (au moyen de M) de celles des dérivées secondes de Γ, et que ces dernières dépendent de l'intégration générale des équations différentielles des géodésiques, ou, du moins, des « équations aux variations » (1) correspondantes. Dans le cas présent, néanmoins, les valeurs de V — qui, sur la bicaractéristique, se réduit à V_0, — peuvent être trouvées par une quadrature. La raison en est que, quoique ne connaissant pas toutes les géodésiques en général, on admet implicitement (par le choix même des coordonnées indiquées ci-dessus) qu'on connaît les géodésiques de longueur nulle (2), c'est-à-dire les bicaractéristiques.

Pour obtenir une telle expression de V_0, on complétera les simplifications du numéro précédent à l'aide des remarques du numéro **50**, Livre II. On a vu à cet endroit que, les coordonnées étant choisies comme ci-dessus, l'équation aux

---

quand la fonction arbitraire qui figure dans son hypothèse est assujettie à être analytique. Le raisonnement semblait d'abord supposer que S (ou S′) elle-même était analytique; mais, dans le cas contraire, on pourrait substituer, au lieu de S, une autre caractéristique *analytique* ayant avec elle un contact d'un ordre arbitraire en un point de l'axe des y (et par conséquent, en raison des propriétés bien connues des équations aux dérivées partielles du premier ordre, tout le long de cette bicaractéristique), laquelle substitution (comme au n° **117**) ne changerait pas les résultats. L'hypothèse d'analyticité de S est, par conséquent, indifférente.

(1) V. note additionnelle, liv. II. Plus précisément, comme on va le voir, V_0 est [en raison de l'équation (39), n° **59**] lié au Jacobien J.

(2) Sans insister sur ce point — ce que nous ferons peut-être à une autre occasion — on peut simplement remarquer qu'il y a là, finalement, une application du théorème bien connu d'après lequel une intégrale d'un système différentiel linéaire sans seconds membres peut être trouvée par quadratures quand l'intégrale générale du système homogène correspondant est connue. Le système linéaire ici considéré est constitué par les équations aux variations, l'une d'entre elles étant remplacée par la relation (elle-même aux variations) déduite du théorème des forces vives, et dont le second membre doit être pris comme nul quand les bicaractéristiques seules sont envisagées, et comme égal à une constante arbitraire pour l'étude des géodésiques en général.

dérivées partielles homogènes peut (en changeant de variable si c'est nécessaire) être prise sous la forme

$$\text{(E)} \qquad 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \mathcal{F}_1(u) = 0,$$

$\mathcal{F}_1$ ne comprenant pas de différentiation par rapport à x (et l'équation adjointe sera d'une forme analogue).

Ceci étant admis, et en tenant aussi compte des hypothèses précédentes quant aux axes des x et des z, la forme caractéristique **A** sera, en désignant par α, β, γ les variables qui y figurent, de la forme

$$\mathbf{A} = 2\alpha\beta - \lambda\gamma^2$$

(où le coefficient λ doit être positif, de manière à n'avoir qu'un seul carré positif), ce qui donne pour le discriminant Δ la valeur λ.

Nous allons maintenant procéder à la détermination des coefficients n et N de (45) (en fonction de y). Il suffit, pour cela, de substituer (45) dans l'équation aux dérivées partielles du premier ordre en Γ

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}, \frac{\partial\Gamma}{\partial y}, \frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right) = 4\,\Gamma.$$

En désignant par des accents toutes les différentiations par rapport à y, on obtient

$$\begin{gathered} 2[-n + 2\mathrm{N}_1 z + 2\mathrm{N}_2(x_0 - x) + \ldots.] \\ \times [n'(x_0 - x) - \mathrm{N}'z^2 - 2\mathrm{N}_1'(x_0 - x)z - \mathrm{N}_2'(x_0 - x)^2 + \ldots.] \\ - 4\lambda[\mathrm{N}z + \mathrm{N}_1(x_0 - x)^2 + \ldots.]^2 \\ = 4n(x_0 - x) - 4\mathrm{N}z^2 - 8\mathrm{N}_1(x_0 - x)z - 4\mathrm{N}_2(x_0 - x)^2 + \ldots., \end{gathered}$$

les points représentant encore des termes d'ordres supérieurs. On obtiendra le résultat demandé en égalant les coefficients de part et d'autre de $(x_0 - x)$ et aussi les coefficients de z^2, ce qui donne

$$\begin{gathered} -2nn' = 4n, \\ 2n\mathrm{N}' - 4\lambda\mathrm{N}^2 = -4\mathrm{N}. \end{gathered}$$

La première relation donne (n s'annulant nécessairement en a) :

$$\text{(49)} \qquad n = 2(y_0 - y).$$

On a alors, pour N,

$$(49') \qquad -N'(y-y_0)+N-\lambda N^2=0,$$

équation du type de Bernoulli, dont une seule solution est finie en a, savoir :

$$(50) \qquad N=\frac{y_0-y}{\int_{y_0}^{y}\lambda\, dy}.$$

Ce premier résultat étant atteint, nous pouvons calculer la quantité M (n° **49**) : son expression se réduit à

$$M=2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x\partial y}-\lambda\frac{\partial^2\Gamma}{\partial z^2}=-2n'+2\lambda N$$

pour $x=x_0$, $z=0$ (tous les autres termes s'annulant puisque Γ et $\frac{\partial\Gamma}{\partial z}$ sont nuls tous les deux le long de cette ligne). Mais en tenant compte de (49), (49'), ceci donne

$$M=4+2\lambda N=6+\frac{2N'}{N}(y_0-y).$$

Par conséquent, d'après sa définition du Livre II, n° **62** (dans laquelle on peut faire $s=y-y_0$),

$$V_0=\text{const.}\sqrt{N}=\sqrt{N},$$

le facteur constant étant 1, puisque V_0 et $\sqrt{N}$ sont tous les deux égaux à $\sqrt{\lambda}$ en a.

121. Revenons maintenant aux formules précédentes (48) à (48 *ter*). Si on tient compte de la valeur ci-dessus de **A** et des égalités (relatives à S)

$$\pi_1 dS=dydz, \qquad \pi_2=\pi_3=0,$$

la définition de v montre que $K=1$. Quant à L, il est égal à o, comme défini par la formule (7) du Livre II, n° **40**. Ainsi, comme on voulait le montrer, il ne subsiste pas d'intégrale dans (48 *bis*), qui se réduit à

$$(51) \qquad -2\pi(u_P-u^\circ),$$

tandis que (48) donne $-\pi u^\circ$.

Le seul terme qui reste à trouver est (48 *ter*). Mais, comme ci-dessus, on voit que K'_0 est, ainsi que K_0, égal à 1, de sorte que (48) et (48 *ter*) se trouvent détruire le second terme de (51), et la vérification est faite.

122. La conclusion demandée étant ainsi établie, cela implique, naturellement, la forme primitive (n° **119**) du résultat : on peut dire, avec les notations du numéro **119**, que la valeur limite de l'intégrale double sur la première caractéristique (contenant P) est :

$$-\pi\left[2u_P - \left(\frac{KuV}{\sqrt{N}}\right)_0\right],$$

K étant tel que [1], pour un φ quelconque,

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\,dS = K\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy\,dz,$$

et N étant le coefficient de z^2 dans le développement de Γ. La conclusion, sous cette forme, reste valable si S n'est plus supposé être un plan coordonné (le plan $x = 0$ étant, cependant, encore assujetti à être tangent à S le long de l'axe des y) : le rapport de K à $\sqrt{N}$ est, naturellement, indépendant [2] du choix de la seconde variable z (qui sera alors une coordonnée curviligne) sur S.

123. Si on en vient maintenant au cas où S, au lieu de consister en un dièdre, admettrait un point singulier O — qui sera pris comme origine des coordonnées — on pourra surmonter les difficultés spéciales de ce cas en le ramenant au précédent, avec des hypothèses géométriques convenables.

Commençons par observer qu'on ne peut plus supposer que S est un plan de coordonnées (puisqu'elle est singulière en O), de sorte qu'on est forcé d'opérer comme on l'a dit au numéro précédent. Mais nous admettrons que la caractéristique qui sera

(1) K [ainsi que le serait K′ dans (48 *ter*)] est égal au coefficient de $2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ dans l'équation (comme on le voit de la même manière qu'au n° **120**).

(2) Ceci peut se vérifier d'une manière directe : car si on introduit une nouvelle variable Z à la place de z, la variable y restant la même tout au moins sur $z = 0$, ce Z se réduira sensiblement à $\gamma z + \beta y + \alpha$ (α, β, γ étant des constantes) dans le voisinage de n'importe quel point déterminé de l'axe des y, et K et N seront tous deux divisés par γ.

prise comme plan coordonné laisse S entier d'un seul côté. Nous admettrons, en second lieu, que S peut être engendré par des lignes régulières (λ) issues du point O, dont chacune sera, au voisinage de ce point, dirigée dans le sens des x croissants, de sorte que, si les coordonnées x, y, z sont exprimées en fonctions (régulières) de l'arc s, on a $\frac{dx}{ds} > 0$ De plus, comme certaines de ces lignes (λ) font des angles infiniment petits avec $x = 0$, on considérera à nouveau les plans $y =$ const., qui seront encore supposés être caractéristiques, et on admettra que, θ étant un certain angle positif, la tangente à une ligne (λ) quelconque (dans le voisinage de O) fait un angle plus grand que θ avec au moins un des plans $x = 0$, $y = 0$. Par conséquent, si on coupe S par un plan caractéristique $y = \varepsilon$, ε étant petit, la portion S_2 de S adjacente à O, limitée par ce plan et par le demi-conoïde de sommet a, interceptera sur chaque ligne (λ) un arc plus petit qu'une longueur σ qu'on peut prendre aussi petite qu'on le veut, en prenant ε suffisamment petit (et a suffisamment voisin de P).

S_2 comprendra une portion S'_2 de la première caractéristique (tout au moins une portion angulaire à laquelle la bicaractéristique OP sera intérieure); la partie restante sera désignée par S_2''.

x, y, z seront continus par rapport aux deux paramètres λ et s : on admettra qu'ils sont réguliers en s :

$$(52) \qquad \begin{cases} x = \xi_1 s + \xi_2 s^2 + \ldots\ldots \\ y = \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \ldots\ldots \\ z = \zeta_1 s + \zeta_2 s^2 + \ldots\ldots \end{cases}$$

Bien entendu, tous les coefficients ξ_h, η_h et ζ_h seront continus en λ; mais leurs dérivées ou $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ peuvent avoir un nombre fini de discontinuités de première espèce $\Big($des valeurs de $\frac{\partial \xi_h}{\partial \lambda}$, ... existant des deux côtés de la discontinuité, mais étant différentes entre elles$\Big)$ La somme $\left(\frac{d\xi_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_1}{d\lambda}\right)^2$ sera différente de zéro, de sorte que l'angle entre deux lignes (λ) consécutives sera du même ordre que la différence des valeurs correspondantes de λ.

En raison de ce qui précède, les quantités $\pi_i d\mathrm{S}$ seront, sur S_2, les produits de $d\lambda ds$ par des déterminants fonctionnels tels que $\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(\lambda, s)}$ qui contiennent tous s en facteur. L'élément

superficiel sera de la forme $\mathrm{H}s d\lambda ds$, où H est fini, mais aussi partout différent de zéro, et par conséquent plus grand qu'un nombre positif fixe.

124. Ceci étant entendu, prenons l'intégrale double de (39') :
1° sur la partie S_1 de S qui correspond à $y > \varepsilon$;
2° sur S_2.

La valeur limite de la première intégrale sera (comme on l'a trouvé précédemment)

$$-2\pi u_P + \pi \left(\frac{Ku v}{\sqrt{N}}\right)_{x=0,\ z=0,\ y=\varepsilon} \tag{53}$$

Sur S_2, on commencera par observer que la direction transversale ν est tangente, et que, par conséquent, pour une fonction φ quelconque (1),

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\, dS = \left(\alpha\, \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \beta\, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) d\lambda\, ds,$$

où α et β sont des fonctions régulières de λ et de s, la seconde contenant s en facteur (2).

Quant aux valeurs données de u sur S_2, supposons qu'elles ont des dérivées premières finies, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ s'annulant avec s, et aussi, pour commencer, *que u lui-même est nul en* O (par

---

(1) Si les lignes (λ) sont des bicaractéristiques, le second terme existera seul. C'est ce qui a lieu pour le cas de M. d'Adhémar où S est un conoïde caractéristique : le mode opératoire du texte est nécessaire pour traiter certaines formes de S_2 telles qu'un angle polyèdre, dont la partie S'_2 est une caractéristique régulière.

(2) Pour exprimer ces coefficients, on peut remarquer que, en raison de l'hypothèse que s est l'arc (ordinaire) de (λ), la quantité

$$\frac{\partial x}{\partial s}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\partial s}$$

est nulle. On obtient alors les valeurs dérivées si on multiplie les équations

$$\frac{dx}{d\nu} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A}{\partial\pi_1} = \alpha\,\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial s}, \qquad \frac{dy}{d\nu} = \ldots$$

(dans lesquelles on a pris $dS = d\lambda ds$ et les π en conséquence) par $\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\lambda}$, ou par $\frac{dx}{ds}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$. Les deux résultats étant de l'ordre respectivement de s^2 et de s, on obtient l'ordre de grandeur énoncé dans le texte.

conséquent que $|u|$ admet une limite supérieure proportionnelle à s). Alors, dans l'intégrale qui doit s'écrire

$$\iint \left[u \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial v}{\partial s} \right) - v \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \mathrm{L}uv \right] d\lambda\, ds,$$

on transformera les termes en $\frac{\partial v}{\partial s}$ et $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$ par la formule de Green.

L'intégrale simple prise le long de l'intersection de S_2 avec Γ doit être supprimée comme précédemment. Le terme pris le long de l'intersection avec $y = \varepsilon$ détruit le terme correspondant de (53) (puisque les coordonnées λ et s pourraient aussi bien être employées dans la partie de S_1 adjacente à S_2') [1].

$s = 0$ devrait être considéré, ici, comme étant une partie de la frontière; mais le terme correspondant s'annule, puisque u est supposé nul avec s.

Il reste, par conséquent, à évaluer des intégrales simples de la forme

$$(54) \qquad \int huv\, ds = (s) \int \frac{\mathrm{H}\, ds}{\sqrt{\Gamma}}$$

[où (s) est une valeur de s contenue dans l'intervalle d'intégration et H une quantité finie] prises le long de lignes $\lambda = \text{const.}$ (situées sur S''_2 et correspondant à des discontinuités de $\frac{dx}{\partial \lambda}$, ... telles que des arêtes de l'angle polyèdre) et des intégrales doubles telles que

$$(54') \qquad \iint \frac{\mathrm{H}u\, d\lambda\, ds}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \iint \frac{\mathrm{H} \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda\, ds}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \iint \frac{\mathrm{H}\beta \frac{\partial u}{\partial s} dy\, ds}{\sqrt{\Gamma}}$$

(1) La partie de l'intersection de S et de $y = \varepsilon$ contenue dans S_2 est

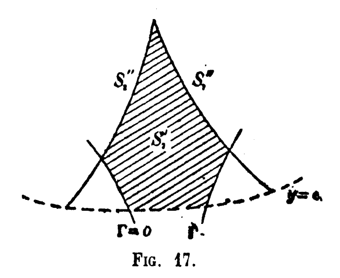


Fig. 17.

entièrement à l'intérieur de S'_0, pour x_0 suffisamment petit, la disposition relative de S_1, $\Gamma = 0$, $y = \varepsilon$ étant telle qu'on la voit sur la figure ci-jointe.

où H est encore fini et où le facteur s apparaît encore dans le numérateur sous le signe $\int$ en raison de la présence d'un des facteurs u, $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, β.

Reprenons maintenant le développement de Γ tel qu'il a été écrit précédemment, savoir

$$(45) \qquad \Gamma = n(x_0 - x) - \mathrm{N}z^2 - \ldots.$$
$$= 2(y_0 - y) \quad (x_0 - x) - \mathrm{N}z^2 - \ldots.$$

ou [puisque chaque terme non écrit explicitement contient $(x_0 - x)$ ou z^2 en facteur] :

$$\Gamma = 2\widehat{y_0}(x_0 - x) - \widehat{\mathrm{N}}z^2,$$

où $\widehat{y_0}$ et $\widehat{\mathrm{N}}$ représentent des quantités qui ne diffèrent qu'infiniment peu de y_0 et de N respectivement. On doit d'abord substituer ceci à Γ dans les intégrales simples (54), qui se rapportent toutes à des lignes appartenant à S_2'' et dont chacune, par conséquent, fait un angle fini, soit avec le plan $x = 0$ (de sorte que $\xi_1 > \xi_1' > 0$), soit avec le plan $z = 0$ (de sorte que $|\zeta_1| > \zeta_1' > 0$), ξ_1' et ζ_1' étant des constantes.

Le premier cas se présente toujours lorsque le coefficient ξ_2 du développement de x suivant les puissances de s est négatif et supérieur en valeur absolue à $\frac{\mathrm{N}\zeta_1'^2}{2}$ $\left(\text{donc algébriquement inférieur à} - \frac{\mathrm{N}\zeta_1'^2}{2}\right)$: car, s'il en est ainsi, le coefficient ξ_1 doit être plus grand qu'un nombre positif fixe (1), ainsi qu'il en sera de $\frac{dx}{ds}$ pour s suffisamment petit.

---

(1) S'il existait des lignes (λ) telles que

$$\xi_2 < - \frac{\mathrm{N}\zeta_1'^2}{2}$$

et si ξ_1 tendait vers zéro, elles auraient (en raison du théorème de Bolzano-Weierstrass) une position limite telle que $\xi_1 = 0$ et

$$\xi_2 \leqslant - \frac{\mathrm{N}\zeta_1'^2}{2},$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de $\frac{\partial x}{\partial s} \geqslant 0$. De même, si, avec

$$\xi_2 < - \frac{\mathrm{N}\zeta_1'^2}{2}$$

il arrivait, pour des valeurs convenables de λ et s, que $\frac{dx}{ds}$ puisse tendre

Dans ce premier cas, en désignant par s_1 la valeur de s qui correspond à l'intersection de (λ) avec le conoïde, l'intégrale sera de la forme

$$\int_0^{s_1} \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{2\widetilde{y_0}(\xi_1 + \dots)}} \frac{ds}{\sqrt{s - s_1}},$$

c'est-à-dire plus petite que

$$2\sqrt{s_1} \times \max. \left| \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{2\widetilde{y_0}\widetilde{\xi_1}'}} \right| < \mathrm{H}_1\sqrt{\sigma},$$

avec H_1 fini .

125. Dans le deuxième cas, en tenant compte de l'inégalité $\xi_2 > -\frac{\mathrm{N}}{2}\zeta_1'^2$, le développement de Γ suivant les puissances de s contiendra un terme négatif en z^2, le coefficient étant numériquement plus grand que la quantité donnée $\frac{\mathrm{N}}{2}\zeta_1'^2$. Si on commence par supprimer le facteur (s), on voit, par le théorème de factorisation, que le facteur restant dans la quantité à intégrer est le quotient de $\mathrm{K}ds$ (avec K fini) par la racine carrée d'un polynôme quadratique en s avec -1 comme coefficient de s^2, l'intégrale étant prise depuis zéro jusqu'à une racine du polynôme. Une telle intégrale (dans laquelle l'intégrale indéfinie est un arc sinus) est toujours plus petite que $\mathrm{K}\pi$. Si on tient compte du facteur (s), l'expression (54) sera par conséquent infinitésimale quand ε et x_0 seront très petits.

L'évaluation d'intégrales doubles telles que (54′), quand on les étend à S_2'', se déduit immédiatement de ce qui précède en intégrant des expressions telles que (54) par rapport à λ.

Sur S_2', on opérera différemment, et on introduira à nouveau y et z, en fonction desquels on peut admettre qu'on a exprimé [1] x. L'élément $sd\lambda ds$ ne diffère, ainsi qu'on l'a vu, que par un facteur fini de l'élément superficiel sur S_2' et, par conséquent, de $dydz$. D'un autre côté, le coefficient de z^2 dans le développement de x (pour tout y donné) est nécessairement positif [2], de sorte

---

vers zéro, ou s resterait plus grand qu'une quantité donnée s_1, et ceci pourrait être exclu en prenant ϵ et x_0 convenablement petits; ou s pourrait tendre vers zéro — mais c'est ce qui est impossible, puisqu'on vient de voir que ξ_1 doit rester plus grand qu'un nombre donné.

(1) Si S_2' appartient à une caractéristique régulière, on peut prendre $x = 0$; si c'est à un conoïde caractéristique, x sera une fonction de y et de z dont les dérivées sont discontinues en O, mais restent finies et s'annulent sur l'axe des y.

(2) Il croît même indéfiniment avec $1/y$, comme le fait la courbure de la surface, si S est un conoïde caractéristique.

que, se développant de la même manière, le coefficient de z^2 est numériquement supérieur à N. Par conséquent, ici encore, la quantité à intégrer est (pour n'importe quelle valeur déterminée de y) le quotient d'une quantité finie K par la racine carrée d'un polynôme quadratique en z avec le coefficient — 1 pour z^2, de sorte que l'intégrale relative à z est constamment plus petite que $K\pi$. En intégrant par rapport à y, le résultat est encore infiniment petit avec ε.

L'intégrale sur S_2 étant ainsi la somme de quantités infinitésimales et d'un terme qui disparaît avec le second terme de (53), la conclusion est démontrée tant que u est supposé nul en O.

Mais cette dernière hypothèse ne diminue pas la généralité : car on peut commencer par prendre un premier ensemble u' de valeurs de u (différentes de zéro en O), coïncidant avec les valeurs d'une solution donnée de (E), pour lequel, par conséquent, la vérification doit réussir, puisqu'on sait d'avance que le problème a une solution, et on posera $u = u' + u''$, où u'' est nul en O, et peut être traité par l'analyse précédente : de sorte que la démonstration est complète.

Pour $m = 5, 7, \ldots.$, on doit s'attendre à avoir des calculs semblables avec quelques complications supplémentaires, particulièrement en raison de l'intervention du symbole $\overline{|}$: cependant, nous n'entrerons pas dans de plus longs détails sur ce sujet.

126. ***Frontière orientée dans le temps.*** — Il suit clairement de ce qui précède que le succès de la synthèse, dans le dernier cas, dépend de circonstances toutes spéciales : celles-ci ne se produiront plus lorsque S cessera d'être caractéristique, de sorte que son plan tangent en un point quelconque coupera le cône caractéristique mené au même point suivant deux génératrices distinctes; et, d'abord, l'aire d'intégration ne sera plus infinitésimale même dans une de ses dimensions.

Si, par exemple, l'équation aux dérivées partielles étant (e_2), S, comme au numéro **25**, consistait en une aire du plan xy et en la surface latérale S_1 du cylindre ayant cette aire comme section droite, ceci permettrait de calculer, grâce à (39), une valeur de u_a dans le volume ainsi enclos — quelle que soit la distribution donnée des valeurs de u_0 et u_1 en des points variés de S — et cette quantité u vérifierait l'équation aux dérivées partielles. Mais si a

s'approche d'un point déterminé quelconque P de S, il n'y aurait pas de raison pour que u_a tende vers u_0 (P), comme on peut le voir à la simple inspection de la figure 18.

On trouve ainsi, comme nous l'avons déjà dit au numéro **23**, que le problème de Cauchy est en général impossible dans ce cas, et on peut effectivement écrire immédiatement une infinité de conditions de possibilité [entièrement

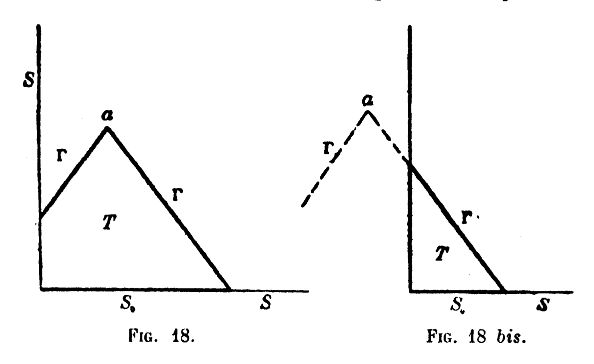


Fig. 18. Fig. 18 *bis*.

semblables aux conditions (8), n° **15**] en prenant maintenant a en dehors du cylindre (fig. 18 *bis*). Si a est choisi ainsi, il n'y a plus de point singulier du conoïde dans le domaine d'intégration T, et le résultat de l'application de la formule fondamentale (f étant, dans l'exemple ci-dessus, supposé nul), se réduit, comme au numéro **104**, à :

$$\mathbf{SS}\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS = o,$$

de sorte qu'il ne peut pas exister de solution si cette équation n'est pas vérifiée pour chaque position de a en dehors du cylindre.

Par conséquent, on n'a pas ainsi un problème correctement posé. Mais il est cependant important à noter, comme correspondant aux démonstrations données par Kirchhoff et M. Volterra du principe de Huygens dans la dernière des trois acceptions dont on a parlé au numéro **33**, c'est-à-dire de ce que nous avons appelé proposition (C.). Imaginons, dans ce but, qu'on étudie le phénomène *en*

dehors d'une certaine courbe fermée σ du plan des xy, — de sorte que la région $\mathcal{R}$ dans laquelle on veut déterminer u est située du côté positif de $t = 0$ et en dehors du cylindre $\mathcal{C}$, qui a σ pour base — et que, le milieu étant initialement au repos (de sorte que les quantités u_0 et u_1 sont nulles sur tout le plan xy), on produise dans σ certaines perturbations.

Comme le mouvement ainsi engendré vérifie (e_2), la valeur correspondante de *u a l'expression* [1] (39), qui, dans le cas actuel, se réduit à des intégrales étendues à $\mathcal{C}$. Comme la région d'intégration sur $\mathcal{C}$ est constituée (V. fig. 19) par des points en onde ou sous onde avec a, ceci revient, comme l'a remarqué M. Volterra, à représenter le mouvement comme produit par des centres convenablement distribués sur $\mathcal{C}$; la méthode de Kirchhoff est tout à fait analogue pour (e_3), en supposant que la dernière équation s'intègre comme on le montrera au Livre suivant.

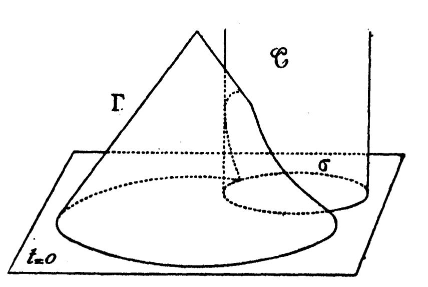


Fig. 19.

Il est clair que tout phénomène régi par une équation hyperbolique à trois variables indépendantes donnerait lieu à une telle forme du principe de Huygens.

Ceci met pleinement en évidence la nécessité des distinctions que nous avons établies ci-dessus entre les divers sens du principe de Huygens : on voit, en effet, que nos formules peuvent être considérées comme démontrant *l'exactitude* de ce principe, si on le prend sous la forme (C), — c'est ce qui a lieu, par exmple, dans le Mémoire fondamental de M. Volterra, *Acta Mathematica*, t. XVIII — tandis qu'on a vu (n° **111**) qu'elles prouvent la *fausseté* de ce même principe, au sens (B).

(1) L'expression explicite correspondant à ce cas est donnée ci-après, n° **131**.

127. *Quelques indications sur le problème extérieur.* — Le cas d'un contour orienté dans le temps a été également traité par M. Volterra à un autre point de vue, en introduisant ce que le géomètre italien appelle le « problème extérieur ».

Il s'agit du cas où le domaine d'intégration T_1, au lieu d'être intérieur à une nappe du conoïde caractéristique de sommet a (avec une frontière constituée par des portions de cette nappe et de S), est *en dehors* du conoïde et se trouve limité par les *deux* nappes et des portions de S (fig. 20) : il arrive alors que, tout au moins dans les exemples les plus immédiats, S n'est nulle part une surface d'espace (ce qui n'est pas le cas pour le problème intérieur).

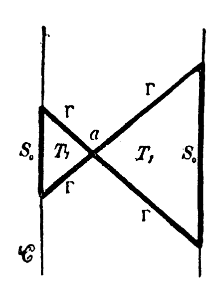


Fig. 20.

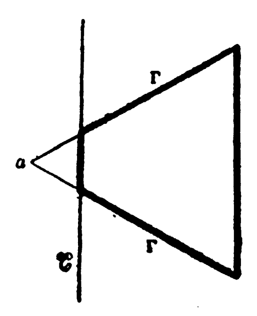


Fig. 20 *bis*.

Un tel problème se comporte tout autrement que le précédent, ceci étant une conséquence des conclusions du numéro **97**. Opérons sur le domaine T_1 comme nous l'avons fait précédemment sur T, en appliquant la formule fondamentale à la fonction inconnue u et à la solution élémentaire v (de pôle a) dans laquelle nous changerons seulement le signe de Γ de manière à le rendre positif en dehors du conoïde : tout se passe comme dans les calculs précédents, de sorte qu'on aura un **SSS** sur T et un **SS** sur la portion (annulaire) S_0 interceptée sur S entre les nappes du conoïde. Mais si on construit de nouveau la petite surface Σ qui est nécessaire pour exclure le voisinage de a, la valeur limite de l'intégrale généralisée correspondante

ne contiendra plus en facteur la partie finie du volume de l'hyperboloïde à deux nappes, mais la partie finie du volume de l'hyperboloïde à une nappe, qui est nulle, ainsi qu'on l'a vu au numéro **97**. Par conséquent, aucun terme correspondant à la singularité en a ne doit être inscrit, et la formule se réduit à :

$$(55)\quad \left|\overline{\mathbf{SSS}\, vf\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m} + \right|\overline{\mathbf{SS}\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + \mathrm{L}uv\right) d\mathrm{S}} = 0.$$

Elle ne détermine plus la valeur de u_a, mais, ne contenant que les données du problème, *fournit pour celui-ci une condition de possibilité.*

On peut obtenir ainsi une infinité de telles conditions nécessaires, en prenant le point a arbitrairement dans S. Mais, naturellement, on peut encore en obtenir d'autres, ainsi qu'on l'a fait au numéro précédent, en prenant a en dehors de S (fig. 20 *bis*).

On doit substituer pour v d'autres quantités pour obtenir la singularité demandée en a, qui conduit à l'expression de u_a. De plus, la question de trouver un tel v n'est plus un problème déterminé, justement parce que le problème n'est plus bien posé et que, par conséquent, les solutions, s'il en existe, peuvent s'écrire d'un nombre infini de manières en fonction des données [en les combinant avec les conditions de possibilité (55)].

M. Volterra emploie l'expression

$$\int_0^\Theta \log\left(1 - \Theta^2\right) \frac{d\Theta}{\sqrt{1-\Theta^2}} + \log r.\ \mathrm{arc\,sin}\ \frac{t - t_0}{r}$$

$\left(\text{avec } \Theta = \dfrac{t - t_0}{r}\right)$, dont la singularité utile est encore toute une ligne parallèle à l'axe des t. Si on opère là-dessus comme on l'a fait pour (2), c'est-à-dire en la différentiant par rapport à t_0, on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - (t-t_0)^2}} \log\left(\frac{r^2 - (t-t_0)^2}{r}\right).$$

On voit que cette dernière expression admet la singularité $r = 0$; mais un tel fait n'est aucunement anormal dans le cas actuel, en raison de la susdite indétermination nécessaire de l'expression de la solution.

La détermination de quantités analogues pour l'équation hyperbolique générale dépendrait de l'étude générale des singularités de cette espèce (algébrico-logarithmiques sur un conoïde caractéristique et logarithmiques sur une autre variété) (1).

128. ***Retour sur les potentiels de surface généralisés.*** — Revenons au problème intérieur, mais en supposant encore que S n'a pas partout une orientation d'espace. Les expressions

$$\mathbf{SS}\ u_1 v dS, \tag{56}$$

$$\mathbf{SS}\ u \frac{dv}{d\nu} dS \tag{57}$$

se comportent encore comme des potentiels de surface de couches simples ou doubles, ainsi qu'au numéro **118**, mais avec des caractères quelque peu différents. Le domaine d'intégration pour un potentiel de surface ordinaire s'étend à toute la surface, indépendamment de la position du point a pour lequel on calcule le potentiel. Dans le cas du numéro **118**, l'aire d'intégration S_0 devient infinitésimale quand a approche de S. Dans le cas actuel, S_0 se conduit d'une manière intermédiaire : si on prend, par exemple, l'équation (e_2), S contenant un plan parallèle à l'axe des t, S_0 est l'intérieur d'une branche d'hyperbole, l'intersection du plan avec une nappe du cône de révolution (fig. 21), et, quand a arrive sur le plan, l'hyperbole se réduit à ses asymptotes et S_0 à l'espace angulaire compris entre elles.

Comme il arrive dans la théorie ordinaire des potentiels, les expressions (56) et (57) continuent à avoir un sens

(1) Les indications de notre mémoire des *Acta Mathematica*, t. XXXI (p. 367) sont erronées sur ce point.

quand a est sur S. On peut le voir [1] en ce qui concerne (56), en opérant comme au numéro **104**, c'est-à-dire en rapportant S à des lignes (λ) issues de a, chacune d'elles étant caractérisée par les valeurs de $m - 2$ paramètres λ_1, λ_2, ..., λ_{m-2}, un de ses points étant défini par [2] un $(m - 1)^e$ paramètre s. Le facteur s^{m-2} du dénominateur sera détruit par un facteur semblable qui figure dans l'expression de l'élément superficiel de S, de sorte que tout se passe comme au

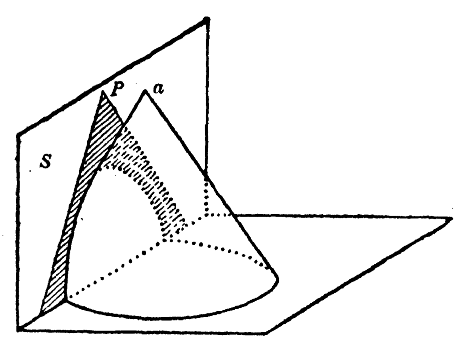


Fig. 21.

numéro **104**. De plus, la convergence est uniforme par rapport à la position de a sur S ou au dehors de S, de sorte que l'expression (56) reste continue.

Dans (57), le dénominateur contient s^{m-1} en facteur; mais (comme pour le potentiel ordinaire de double couche) un facteur supplémentaire s apparaît au dénominateur à cause de la présence de $\frac{d\Gamma}{d\nu}$: car cette dernière quantité serait nulle (n° **58**) en un point quelconque x de S, si la direction ν était transversale à la géodésique ax, et tel est approximativement le cas quand x, variant sur S, approche

(1) Dans ce numéro, les raisonnements sont abrégés. Le lecteur les complétera aisément en combinant les méthodes précédentes avec celles bien connues de la théorie classique des potentiels.

(2) On peut admettre que les expressions des x sur (λ) sont tangentes aux expressions correspondantes sur la géodésique qui touche λ en a, de sorte que des points pris respectivement sur les deux courbes avec la même valeur de s sont à une distance mutuelle de l'ordre de s^2.

de a, puisque ν est transversale à la ligne coordonnée (λ) qui passe par x et qui fait avec la géodésique un angle infinitésimal de l'ordre de s.

Quand a est près d'un point P de S, mais en dehors de S, le facteur $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ n'est plus infinitésimal pour des points x avoisinant P, de sorte que la convergence de (57) n'est plus uniforme et que cette intégrale est discontinue.

Examinons son mode de discontinuité.

Dans ce but, admettons d'abord que S est un lieu de géodésiques issues de P [dont les directions initiales sont naturellement toutes dans le même plan à $(m - 2)$ dimensions, de sorte que S soit régulière], et considérons une fonction quelconque u, coïncidant avec la fonction donnée sur S, mais définie et régulière en dehors de S : soit $f = \mathfrak{F}(u)$. Si c'est nécessaire, associons à S une autre portion de surface S' (surface d'espace) de manière à enclore, avec un des demi-conoïdes, une portion d'espace T, comme dans les figures 18 et 18 *bis*. On appliquera notre formule à un tel domaine, en plaçant successivement le point a d'un côté de S, de l'autre côté, et en P. Dans le premier cas, la somme des intégrales **SSS** et **SS** est égale à $-2\pi u_a$, dans le second cas à zéro. Dans le cas intermédiaire de a en P, l'intégrale (38) (voir n° **105**) est étendue à des directions initiales comprises entre le cône caractéristique et le plan tangent à S. On est, par conséquent, conduit à la partie finie de la moitiée du volume d'un hyperboloïde à deux nappes (n° **100**), égale à $-\pi u_P$. La discontinuité de la somme algébrique d'intégrales considérée est ainsi, comme dans la théorie classique, exactement divisée en deux parties égales par la valeur qu'elle prend quand a est sur S.

D'un autre côté, cette discontinuité ne porte que sur l'intégrale (57) relative à S : car les intégrales relatives à S' sont évidemment continues, et les autres intégrales convergent uniformément.

Il ne reste plus qu'à se débarrasser de l'hypothèse que S est un lieu de géodésiques. C'est ce qu'on fait en considérant les géodésiques tangentes à S en P, qui engendrent

une seconde surface $\overline{S}$. Si on soustrait les uns des autres les potentiels (57) relatifs à ces deux surfaces et au même point a, la différence est une intégrale qui converge uniformément [1] par rapport à la position de α. Par conséquent, la conclusion s'étend à toute forme régulière de S.

---

(1) On utilise la remarque de la note précédente. La distance comprise entre points correspondants sur S et $\overline{S}$ étant du second ordre et l'angle entre leurs plans tangents étant infinitésimal, il est facile de voir, comme pour les potentiels ordinaires, que la différence des valeurs de $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ en ces points est de l'ordre de s^2. Quant aux valeurs de u, on peut les supposer les mêmes aux points correspondants.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS A QUELQUES ÉQUATIONS USUELLES

---

129. Nous allons donner quelques exemples simples du calcul de nos formules. Le premier qui se présente est l'équation des *ondes cylindriques* (e_2) : prenons-la avec second membre et avec $\omega = 1$. La solution élémentaire est (x_0, y_0, t_0 et x, y, t étant les coordonnées de a et de x)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}, \qquad \Gamma = (t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2$$

et, comme $L = 0$ dans ce cas, la formule générale de résolution du problème de Cauchy sera :

$$(58) \qquad 2\pi u_a = 2\pi u(x_0, y_0, t_0)$$

$$= \iiint_T \frac{f dx dy dt}{\sqrt{\Gamma}} + \left|\overline{\iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} u_1 - u \frac{d}{dv} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\right) dS.}\right.$$

Le second terme sous le signe $\iint$ est le seul qu'il soit besoin de transformer pour ne pas introduire autre chose que les symboles ordinaires de l'analyse. On a donné au numéro **108** une première méthode générale dans ce but. En introduisant

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

et l'angle azimutal φ, les coordonnées d'un point quelconque du demi-conoïde de sommet a seront :

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \qquad y = y_0 + r \sin \varphi, \qquad t = t_0 - \varepsilon r,$$

ε désignant $+1$ si le demi-conoïde utile (ou inverse) est dirigé vers les t décroissants (cas de $t_0 > 0$ quand S est le plan $t = 0$) et -1 dans le cas contraire. Alors on aura

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dx} = -(x - x_0), \quad P_2 = -(y - y_0), \; P_3 = t - t_0;$$

la quantité à intégrer, dans le second membre de la formule (42) du numéro **108**, sera

$$\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial A}{\partial P_1} & \frac{\partial A}{\partial P_2} & \frac{\partial A}{\partial P_3} \end{vmatrix}}{2\,(k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3)} \quad uv = uvr d\varphi,$$

et l'expression (58) deviendra (notations du n° **108**) :

$$(59) \qquad 2\pi u\,(x_0, y_0, t_0) = \iiint_T \frac{f dx dy dt}{\sqrt{\Gamma}}$$
$$+ \lim \left\{ \iint_{S_1} \left(\frac{u_1}{\sqrt{\Gamma}} - u\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \right) dS + \int_{(r')} \frac{ur}{\sqrt{\Gamma}}\, d\varphi \right\}.$$

130. Cette formule est générale pour n'importe quelle forme de S. Mais on lui donne une forme meilleure pour le calcul pratique par l'emploi de nos règles générales relatives au symbole $\lceil\!\!\overline{}$ (V. en particulier le n° **84**). C'est ce que nous ferons en nous bornant aux deux sortes de surfaces S qui ont été principalement considérées.

Si, pour commencer, S est le plan $t = 0$, on aura

$$dS = dx\, dy = r\, dr\, d\varphi.$$

La transversale ν coïncidera (au sens près) avec la normale intérieure, de sorte que : $\frac{d}{d\nu} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ et : $\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{|t_0|}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}$

quel que soit le signe de t_0. Le second terme (soustractif) sous le signe $\iint$ de (58) s'écrira

$$|t_0| \int d\varphi \overline{\left| \int_0^{|t_0|} \frac{urdr}{(t_0^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \right.}.$$

Comme on l'a expliqué précédemment, on a

$$\overline{\left| \int_0^{|t_0|} \frac{urdr}{(t_0^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \right.} = \int_0^{|t_0|} \frac{(u - \bar{u})rdr}{(t_0^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{u}}{|t_0|},$$

où $\bar{u}$ représente la valeur de $u = u_0$ à l'extrémité du rayon correspondant, soit

$$\bar{u} = u_0(x_0 + |t_0| \cos \varphi, \quad y_0 + |t_0| \sin \varphi),$$

et on a finalement :

$$(60) \qquad 2\pi u\ (x_0, y_0, t_0) = \iiint \frac{fdxdydt}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$+ \iint \left[\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} u_1 - \frac{|t_0|}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} (u - \bar{u}) \right] rdrd\varphi + \int_0^{2\pi} \bar{u}d\varphi .$$

L'intervention de $|t_0|$, en donnant deux expressions différentes suivant le signe de t_0, concorde avec nos remarques du numéro **118** concernant la discontinuité des **SS** employés dans la formule générale (1).

On vérifie aussi les conclusions du numéro **112** sur le signe de l'intégrale résiduelle en admettant que, dans (60), u_0 est positif pour r plus petit qu'une certaine valeur $r_1 < |t_0|$ et nul pour $r > r_1$ (de sorte que $\bar{u} = 0$), et que $f = u_1 = 0$.

---

(1) La discontinuité apparaît aussi en ce qui concerne le signe de u_1 : comme il est dit au numéro **118**, on ne doit pas oublier que $u_1 = \epsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ et, par conséquent, change de signe au moment où le point a traverse le plan $t = 0$.

131. En second lieu, on admettra que S consiste en une portion S′ (finie ou, comme dans la figure **19**, illimitée) du plan $t = 0$ et en une partie cylindrique S″ ayant le contour σ de S′ comme section droite. De plus, nous donnerons à t_0 une valeur telle que le demi-conoïde de sommet a ne coupe que S″ et non S′ (fig. 22) telles sont, comme on l'a dit numéro **126**, les conditions dans lesquelles M. Volterra a opéré pour démontrer le principe de Huygens [sous sa forme (C)] pour (e_2).

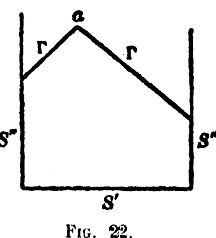


Fig. 22.

L'intégrale triple et l'intégrale double sur S′ seront

$$(61) \qquad \iiint_T \frac{f}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy\, dt + \iint_{S'} \left(\frac{u_1}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{|t_0|}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}\, u \right) dx\, dy,$$

aucun signe $\lceil$ n'étant cette fois nécessaire. Sur S″, la transversale [en raison de $\mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) < 0$] sera *opposée* à la normale intérieure n (qui est parallèle à la normale au contour σ dirigée vers l'intérieur de S′), ce qui donne ($d\sigma$ étant l'élément d'arc de σ) :

$$\iint \left(u \frac{d}{dn} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{dn} \right) d\sigma\, dt$$

$$= \iint \left(\frac{u r \dfrac{dr}{dn}}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{dn} \right) d\sigma\, dt.$$

Seul le premier terme demande à être transformé. On l'intègre d'abord par rapport à t, le long du segment l de la génératrice correspondante du cylindre compris dans Γ, c'est-à-dire de $t = 0$ à $t = t_0 - \varepsilon r$, en remplaçant u par $(u - \overline{u}) + \overline{u}$, où

$$\overline{u} = u(x, y, t_0 - \varepsilon r)$$

est la valeur de u à l'intersection de la génératrice avec la

nappe conoïdale. Or (pour n'importe quel signe de t_0)

$$\left|\int_l \frac{dt}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} = \left|\int_l \frac{dt}{[(t-t_0)^2 - r^2]^{\frac{3}{2}}} = \left|\int_r^{|t_0|} \frac{dt'}{(t'^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}\right.\right.\right.$$

$$= -\frac{1}{r^2}\,\frac{|t_0|}{\sqrt{t_0^2 - r^2}},$$

de sorte que la valeur de $2\pi u_a$ est la somme de (61) et de

$$\text{(61')}\qquad \iint_{S'_0}\left[\frac{(u-\overline{u})r\,\dfrac{dr}{dn}}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\,\frac{du}{dn}\right] d\sigma\, dt$$

$$-\left|t_0\right|\int_0 \frac{\overline{u}}{r}\,\frac{dr}{dn}\,\frac{d\sigma}{\sqrt{t_0^2 - r^2}}.$$

L'intégrale simple doit être considérée comme étant prise le long de la courbe d'intersection de S″ avec Γ, quoique $d\sigma$ et r se rapportent à la base σ du cylindre.

132. On appliquera un calcul semblable à l'équation des *ondes cylindriques amorties*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mathrm{K}u = 0$$

étudiée par M. Coulon, ainsi qu'il a déjà été dit. La solution élémentaire est

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\,\mathrm{Ch}\sqrt{\mathrm{K}\Gamma}$$

(avec la même valeur de Γ, Ch étant un cosinus hyperbolique qui prend la valeur 1 sur la circonférence $r = |t_0|$) et on aurait :

$$2\pi u_a = \left|\iint_{S_0}\left[\frac{u_1\,\mathrm{Ch}\sqrt{\mathrm{K}\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{1}{2}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\left(\frac{\mathrm{Ch}\sqrt{\mathrm{K}\Gamma}}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{\mathrm{K}}\,\mathrm{Sh}\sqrt{\mathrm{K}\Gamma}}{\Gamma}\right)u\right] d\mathrm{S}.\right.$$

La transformation du numéro **129** donnera

$$2\pi u_a = \lim_{\tau' = 0} \left\{ \iint_{S_1} \left[\frac{u_1 \,\mathrm{Ch}\,\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{d\nu}\left(\frac{\mathrm{Ch}\,\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{K}\,\mathrm{Sh}\,\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma} \right) u \right] dS + \int_{\tau'} \frac{u}{\sqrt{\Gamma}}\, r\, d\varphi \right\}$$

[où S_1 et (τ') ont encore la même signification qu'au n° **108**], l'intégrale simple complémentaire étant exactement la même que dans (59) (avec la même valeur de v, puisque la substitution de 1 à $\mathrm{Ch}\sqrt{K\Gamma}$ au numérateur de v est indifférente pour τ' infinitésimal). La transformation du numéro **130**, en prenant pour S le plan $t = 0$, donnera

$$2\pi u_a = \iint \left[\frac{\mathrm{Ch}\,\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\, u_1 - |t_0| \left(\frac{\mathrm{Ch}\,\sqrt{K\Gamma} - 1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{K}\,\mathrm{Sh}\,\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma} \right) u \right] r\,dr\,d\varphi - |t_0| \iint \frac{(u - \bar{u})\, r dr d\varphi}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{2\pi} \bar{u} d\varphi.$$

La simplicité de ce résultat, comparée avec les difficultés que, comme nous l'avons dit, M. Coulon a rencontrées, et avec la complication de l'expression (12) (n° **79**) qu'il aurait dû introduire pour imiter les calculs de M. Volterra, nous semble suffisante pour montrer l'intérêt qu'il y a à éviter une méthode consistant, en somme, à intégrer pour différentier ensuite à nouveau

Si l'équation avait un second membre f, il faudrait ajouter un terme correspondant

$$\iiint_T \frac{f\,\mathrm{Ch}\,\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy\, dt\,;$$

on pourrait aussi aisément traiter de la même manière qu'au numéro **131** le cas de S cylindrique.

133. Prenons de nouveau l'équation (ordinaire) des ondes, mais avec deux variables de plus, soit :

$$(e_4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}\right) = f.$$

La solution élémentaire sera

$$\frac{1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{[(t_0 - t)^2 - r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

r représentant, naturellement, $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_4 - a_4)^2}$ et, avec nos notations, la solution du problème de Cauchy, par rapport à $t = 0$, sera donnée par

$$4\pi^2 u_a = -\left|\overline{\mathbf{SSS}\frac{f}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}\, dx_1 \cdots dx_4\, dt}\right. + \left|\overline{\mathbf{SS}_{t=0}\left(u_0 \cdot \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{u_1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}\right) dS}\right.$$

$$= -\left|\overline{\mathbf{SSS}\,\frac{f}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}\, dx_1 \cdots\cdots dx_4\, dt}\right. + \left|\overline{\mathbf{SS}\left(\frac{3|t_0|u_0}{\Gamma^{\frac{5}{2}}} - \frac{u_1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}}\right) dx_1 \cdots\cdots dx_4}\right..$$

Dans l'intégrale d'espace (c'est-à-dire quintuple) et dans l'intégrale de surface contenant u_1, on introduira les valeurs $\overline{f}$, $\overline{u_1}$ de f et de u_1 au point où une perpendiculaire à l'axe du cône caractéristique menée par un point quelconque $(x_1, \dots, x_4, t)$ rencontre la surface de ce cône.

Si on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, o les cosinus directeurs d'une direction parallèle à $t = 0$, telle que

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3} = \frac{x_4 - a_4}{\alpha_4} > 0,$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1,$$

$\overline{f}$ représentera :

$$f\,[a_1 + \alpha_1 |t_0 - t|,\ a_2 + \alpha_2 |t_0 - t|,\ a_3 + \alpha_3 |t_0 - t|,\ a_4 + \alpha_4 |t_0 - t|,\ t].$$

Comme l'intégrale contenant u_0 introduit

$$\frac{1}{\Gamma^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(t_0^2 - r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

on devra se servir non seulement de $\overline{u}$, mais aussi de $\overline{u'}$, valeur de la dérivée radiale $\overline{u'} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_0}{\partial r}$ en un point quelconque de l'arête $r = |t_0|$ le long de laquelle le cône caractéristique coupe $t = 0$. Si on désigne par $d\Omega$ un élément d'angle solide de l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4), la formule sera :

$$4\pi^2 u_a = - \mathbf{SSS} \frac{(f - \overline{f})}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} dx_1 \cdots dx_4 \, dt$$

$$+ \mathbf{SS} \left[3 \, |t_0| \, \frac{u - \overline{u} + \overline{u'}(t_0^2 - r^2)}{\Gamma^{\frac{5}{2}}} \right.$$

$$\left. - \frac{(u_1 - \overline{u_1})}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} \right] dx_1 \cdots dx_4$$

$$+ 2 \left[\int |t_0 - t| \, dt \, \mathbf{S} \overline{f} d\Omega + \mathbf{S} (|t_0| \, \overline{u_1} + 3t_0^2 \overline{u'}) d\Omega \right]$$

$$+ 2 \, \mathbf{S} \, \overline{u} d\Omega,$$

chacun de ces termes ayant maintenant une signification au sens ordinaire si f et u_1 ont des dérivées jusqu'au premier ordre et u_0 jusqu'au second ordre.

Naturellement, on n'aurait aucune difficulté à écrire la formule analogue dans le cas où on aurait un terme d'amortissement de la forme Ku.

LIVRE IV

LES ÉQUATIONS A UN NOMBRE PAIR DE VARIABLES INDÉPENDANTES ET LA MÉTHODE DE DESCENTE

CHAPITRE PREMIER

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION A $2m_1$ VARIABLES

I. — Formules résolvantes.

134. Les premiers cas pour lesquels la solution du problème de Cauchy a été connue en Analyse n'appartiennent pas, comme on l'a vu, à la classe dont nous venons de nous occuper : les méthodes de Riemann et de Kirchhoff correspondent respectivement à $m = 2$ et $m = 4$.

Nous constaterons que, dans de tels cas, des singularités telles qu'on en a rencontrées dans le précédent Livre ne se présentent plus, toute intégrale généralisée étant même éliminée. C'est ce qui explique pourquoi les solutions dont on vient de parler ont été trouvées les premières.

Néanmoins, dans le cas général, les valeurs paires de m doivent être considérées comme apportant de nouvelles difficultés. Les méthodes précédentes ne sont plus valables, et cela pour deux raisons :

1° La solution élémentaire n'est plus *bien déterminée* (n° 65).

2° On ne peut plus introduire la *partie finie* des intégrales qu'on est conduit à utiliser, car l'exposant $\frac{m-2}{2}$ ou $\frac{m}{2}$ avec lequel Γ apparaît au dénominateur de la solution élémentaire ou de ses dérivées, est un entier.

Il s'ensuivra d'ailleurs de la forme même des expressions auxquelles nous aboutirons, qu'elles ne pourraient pas avoir été obtenues par simple imitation de notre première méthode.

Mais comme nous savons maintenant traiter le cas de $2m_1 + 1$ variables indépendantes, nous sommes conduits à atteindre le même résultat quand le nombre des variables est $2m_1$ en employant la méthode de *descente* (n° **30**). La solution de l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathcal{F}(u) = \sum_{i,k=1}^{m}\sum A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

m étant égal à $2m_1$, se déduira de la solution correspondante pour l'équation à $2m_1 + 1$ variables

$$(\mathrm{E}') \qquad \mathcal{F}'(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

en désignant par z une $(m + 1)^e$ variable auxiliaire.

Si, comme on l'a supposé dans ce qui précède, la forme caractéristique

$$\mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots\ldots P_m) = \Sigma A_{ik} P_i P_k$$

de (E) contient un carré positif et $(m - 1)$ carrés négatifs, la forme correspondante

$$\mathbf{A}'(P_1, \ldots\ldots P_m, R) = \mathbf{A} - R^2$$

relative à (E′) consistera en un carré positif et m carrés négatifs. On a déjà vu que la quantité Γ' analogue à Γ et relative à (E′), est

$$\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2,$$

en désignant par $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$ deux points de l'espace à $(m + 1)$ dimensions. On a également trouvé, au n° **70**, quelles relations existent entre les solutions élémentaires des deux équations : on a vu que les coefficients des puissances successives de Γ, dans l'une d'entre elles, diffèrent par des facteurs numériques des coefficients des puissances correspondantes de Γ' dans l'autre.

En considérant les équations adjointes

$$(\mathcal{E}) \quad \mathcal{G}(v) = 0 \qquad (\mathcal{E}') \quad \mathcal{G}'(v) = \mathcal{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

de (E) et de (E'), les formules du n° **70** expriment que, si

$$v' = \frac{V'}{\Gamma'^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{V'}{\Gamma'^{m_1 - \frac{1}{2}}}$$

est la solution élémentaire de $(\mathcal{E}')$, avec

$$(1) \quad V' = \sum_0^\infty V_h' \Gamma'^h = \sum (-1)^h V_h' [(z-c)^2 - \Gamma]^h,$$

la solution élémentaire de $(\mathcal{E})$ sera

$$(2) \qquad v = \frac{V}{\Gamma^{m-1}} - \mathcal{V} \log \Gamma + w$$

(w étant une fonction régulière); et, si on utilise les coefficients C_n du n° **95**, les formules (62) et (62 *ter*) du n° **70**, appliquées à l'équation adjointe, peuvent s'écrire :

$$(3) \quad V = (m_1 - 1)\, C_{m_1 - 1} \sum_{h=0}^{m_1 - 2} \frac{1}{(m_1 - h - 1)\, C_{m_1 - h - 1}} V_h' \Gamma^h,$$

$$(3') \quad \mathcal{V} = (m_1 - 1)\, C_{m_1 - 1} \sum_{h = m_1 - 1}^{\infty} C_{h - m_1 + 1} V_h' \Gamma^{h - m_1 + 1}$$

$$= (m_1 - 1)\, C_{m_1 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k V'_{k + m_1 - 1} \Gamma^k.$$

Or, ceci peut s'obtenir directement en opérant sur v' (ou plutôt sur la quantité semblable

$$(v') = \frac{V'}{(-\Gamma')^{\frac{m-1}{2}}}$$

qui se rapporte à $\Gamma' < 0$) comme on l'a vu au n° **73**. On forme l'expression [également solution de $(\mathcal{E}')$]

$$(4)\qquad \overline{\left|\int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} (v')\,dc\right.} = \overline{\left|\int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{V'}{[(c-z)^2-\Gamma]^{m_1-\frac{1}{2}}}\,dc\right.}$$

(où c_1 est une constante); ceci (en changeant c en $z + c'$ sous le signe $\int$) peut s'écrire

$$(4')\qquad \overline{\left|\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1-z} (v')\,dc'\right.} = \overline{\left|\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}\right.} - w_1,$$

$w_1 = \int_{c_1-z}^{c_1} (v')dc'$ étant une fonction régulière; le premier terme, qui est indépendant de z, est (à un facteur numérique près) la partie irrégulière [1] de la solution élémentaire v de $(\mathcal{E})$. Car en substituant (1) pour V', l'intégrale de chaque terme sera donnée par les calculs du n° **95** [formules (28), (28') de ce numéro] et ceux-ci donnent précisément comme résultat une quantité de la forme désirée.

De plus, on obtient de nouveau les valeurs des coefficients de l'expression (3), qui deviennent naturellement identiques à celles du Livre II (n° **70**) si on multiplie l'expression (4') par le facteur constant

$$(5)\qquad (-1)^{m_1-1}\,2(m_1-1)\,C_{m_1-1} = (-1)^{m_1-1}\,\mathbf{k}.$$

Le cas de $m = 2$ est spécial. L'expression (4') n'exige pas l'emploi du symbole $\overline{|}$ et a la valeur

$$(6)\qquad \sum\int (-1)^h\, V'_h\, (c'^2-\Gamma)^{h-\frac{1}{2}}\, dc'$$
$$= -\frac{1}{2}\log\Gamma \cdot \sum C_h V'_h \Gamma^h + w.$$

---

(1) La différence (4') est une solution de $(\mathcal{E}')$ et, le second terme étant holomorphe, on a :

$$\mathcal{G}'\left(\overline{\left|\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}\right.}\right) = \mathcal{G}'(w_1).$$

La valeur commune des deux membres est une fonction holomorphe (comme on le voit sur sa seconde expression), et indépendante de z (d'après le premier membre). Par conséquent, comme on l'a remarqué, il existe une fonction w de x_1, x_2, ... x_m seulement, telle que

$$\mathcal{G}(w) = \mathcal{G}'(w_1).$$

Par conséquent, il n'existe pas de quantité V, mais seulement une quantité $\mathcal{V}$ (égale à $\Sigma C_h V'_h \Gamma^h$), qui n'est autre, comme on l'a déjà dit, que la fonction de Riemann $\left(\text{multipliée par le facteur constant } \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\right)$, le nombre **k** étant égal à 2 [1].

135. Une fois ceci admis, pour obtenir une solution de l'équation (E) remplissant, sur la multiplicité S, les conditions données, on considèrera, dans l'espace à $(m + 1)$ dimensions E_{m+1} défini par les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots x_m, z)$, la multiplicité S′ (hypercylindre) dont la projection est S (fig. 23) [2], c'est-à-dire celle qui est obtenue en prenant successivement pour $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les coordonnées d'un point quelconque de S et pour z toutes les valeurs réelles possibles. Si S a une orientation d'espace par rapport à Γ, S′ aura une orientation d'espace par rapport à Γ'.

Comme on aura à considérer des intégrales multiples à la fois dans l'espace E_m à m dimensions et dans l'espace E_{m+1} à $(m + 1)$ dimensions, on modifiera la notation employée au n° **38** de la manière suivante : on gardera les symboles **SS** et **SSS** pour E_m; d'autre part une intégrale de surface (c'est-à-dire une intégrale prise sur une variété m fois étendue, laquelle sera toujours un hypercylindre) dans E_{m+1} sera désignée par **SS**$\int$; une intégrale de volume [c'est-à-dire une intégrale $(m + 1)^{\text{uple}}$] dans E_{m+1}, par **SSS**$\int$.

Une solution u de l'équation (E) étant définie par la double condition :

d'avoir en chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ de S′ la valeur que u doit avoir au point correspondant $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de S;

d'avoir comme dérivée transversale [3] au point

---

(1) Ceci n'est pas en accord avec (5) : le facteur $(m_1 - 1)$, qui devrait être nul, est remplacé par 1, comme on l'a fait plusieurs fois au Livre II.

(2) La figure 23, correspondant à $m = 2$, peut être employée comme figure schématique dans le cas général.

(3) D'après l'expression de la forme **A′** (n° précédent), la direction transversale à l'hypercylindre S′ en un quelconque de ses points est parallèle à la transversale à S au point correspondant.

$(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ la valeur donnée de $\frac{du}{d\nu}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_m$), on sait (n° **30**) que cette solution sera unique, indépendante de z et vérifiera (E). Par conséquent, une telle solution sera solution du problème donné et réciproquement.

La fonction u sera donnée par la formule (39) (n° **105**), savoir (dans la nouvelle notation)

$$(\mathrm{F}) \qquad (-1)^{m_1} \pi\Omega_{m-2}\, u_a = - \left|\mathbf{SSS}\int_{\mathrm{T}'} v' f dx_1 \ldots dx_m\, dz\right| + \left|\mathbf{SS}\int_{\mathrm{S}_0'} \left(u \frac{dv'}{d\nu} - v'\frac{du}{d\nu} - \mathrm{L}uv'\right) d\mathrm{S}'\right|,$$

où T′ désigne la portion d'espace à $(m+1)$ dimensions comprise entre S′ et Γ′; S_0' (fig. 23), la portion correspondante de S′; et $m = 2m_1$.

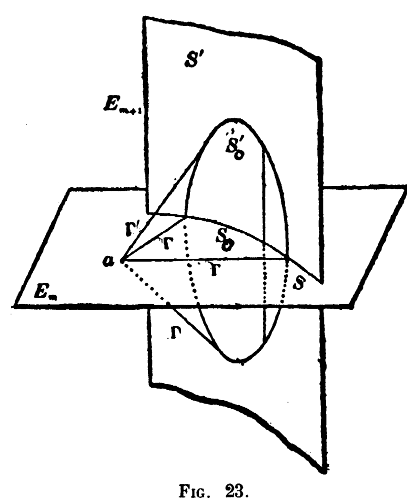


Fig. 23.

136. Strictement, on peut dire qu'on a ainsi résolu le problème ; mais, en rappelant un célèbre mot de Poincaré [1], il faut reconnaître qu'il est assez « insuffisamment résolu », car la solution précédente contient des éléments étrangers — l'espace E_{m+1}, la variable auxiliaire z et tout ce qui leur est relatif; — et il y a évidemment lieu de la transformer pour la débarrasser de ces éléments étrangers.

Géométriquement, la relation entre les figures tracées dans E_m et dans E_{m+1} est la suivante.

---

(1) « Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas : il y a, seulement des problèmes *plus ou moins* résolus ». Poincaré, conférence au IVe Congrès des Mathématiciens, Rome, 1908; *Atti del IV congresso intern. dei Matematici*, t. I, p. 175.

T′ se projette sur l'espace E_m à m dimensions suivant la région T comprise entre S et Γ : ce qui veut dire que, si le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ appartient à T′, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ appartient à T, et que réciproquement, tout point de T est la projection commune d'une infinité de points de T′, savoir de tous ceux dont les z sont compris entre $-\sqrt{\Gamma}$ et $+\sqrt{\Gamma}$ (en supposant que la $(m+1)^e$ coordonnée de a est nulle).

De la même façon, S_0' se projette sur E_m en S_0, chaque point de S_0 étant la projection d'une infinité de points de S_0', ayant leurs z compris entre $-\sqrt{\Gamma}$ et $+\sqrt{\Gamma}$.

137. Ceci noté, nous allons entreprendre la transformation de la formule (7).

Prenons, par exemple, le premier terme du second membre, qui est un **SSS** $\int$ étendu à T′.

Notre méthode consistera à intégrer d'abord par rapport à z.

Pour $m = 2$, v' étant d'un infini d'ordre $\frac{1}{2}$ seulement, cela ne soulève aucune objection. Mais pour des valeurs supérieures à 2 de l'entier pair m, on n'a pas le droit d'agir ainsi dans tout le domaine d'intégration, car les projetantes de T′ sur T coupent la surface singulière Γ′ sous un angle qui devient infiniment petit au voisinage de Γ. Nous aurons, par conséquent, à diviser le domaine T en deux parties T_1 et T_2 — la seconde contenant le voisinage du conoïde — par une frontière auxiliaire τ (qui tendra finalement vers Γ).

Dans la portion T_1' de T′ qui se projette suivant T_1 (et dont la frontière est constituée par Γ′ et par un cylindre τ' de base τ), les intégrations par rapport à z sont légitimes, de sorte que le **SSS** $\int$ correspondant s'obtiendra en intégrant m fois, sur T_1, l'intégrale simple

$$\text{f.}\left|\overline{\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{\sum_{h=0}^{\infty} V_h' (\Gamma - z^2)^h \, dz}{(\Gamma - z^2)^{m_1 - \frac{1}{2}}}}\right.$$

Si le facteur de f est intégré terme à terme (1), soit :

$$\sum V_h' \left| \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{(\Gamma - z^2)^{m_1-h-\frac{1}{2}}}, \right.$$

on voit que chaque terme dépend des opérations du n° **96**.

Ceci montre que :

1° Tous les termes correspondant à h plus petit que $m_1 - 1$ disparaissent;

2° Les termes suivants (h variant de $m_1 - 1$ à ∞) donnent un résultat égal au produit de 2π par le coefficient du logarithme dans l'intégrale (4') au facteur $(-1)^{m_1-1}$ près, savoir $\frac{1}{\mathrm{k}} \mathcal{V}$.

Par conséquent, dans ce premier terme, la quantité infinie sur le conoïde, qui apparaît sous le signe **SSS** dans les formules relatives au cas de m impair, est déjà remplacée par la quantité parfaitement régulière $\mathcal{V}$.

Pour $m = 2$, la transformation est ainsi opérée.

138. Dans T_2 (pour $m > 2$) cette méthode n'est plus valable, et on va voir que le résultat est très différent de ce qu'elle suggérerait. Les lignes d'intégration étant assujetties à la condition de rencontrer Γ' sous un angle fini, on va considérer maintenant un système de courbes l, dont chacune joindra un point de Γ (défini par des coordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$) à un point de τ, et les lignes qui en dérivent par translation dans un plan $z =$ const. quelconque. Un point de T_2 sera par conséquent défini par les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ et de Γ, cette quantité variant, sur chaque ligne l, de zéro à une quantité γ, très petite si τ est très voisin de Γ.

Soit

$$(8) \qquad dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = \mathrm{K} d\beta_1\, d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1}\, d\Gamma = d\tau_\gamma d\Gamma$$

l'expression d'un élément de T_2.

(1) Il ne se produit, quant à la convergence, aucune difficulté, de par la présence du symbole $\big|$; car ce dernier n'intervient que pour un nombre fini de termes de la somme.

Si T_2' est la partie de T' projetée suivant T_2, un point de T_2' sera défini par les coordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, \Gamma, z$.

Intégrons d'abord suivant les courbes l, c'est-à-dire en laissant constants $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, z$. Nous ferons ensuite varier z, et enfin $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$.

Comme la frontière de T_2' autre que Γ' (c'est-à-dire le cylindre) n'est pas un lieu de courbes l, de sorte que les segments de courbes l compris dans T'_2 deviennent infiniment petits dans le voisinage de l'intersection du cylindre avec Γ', on appliquera les principes du Livre III, n° **90** : on devra prendre la partie finie de chaque intégrale simple le long d'une courbe l et, en intégrant ceci par rapport à z, on prendra de nouveau la partie finie du résultat. Ceci donne l'intégrale double dans la section $\mathcal{C}_2$ (fig. 24) de T'_2 par un plan à deux dimensions quelconque

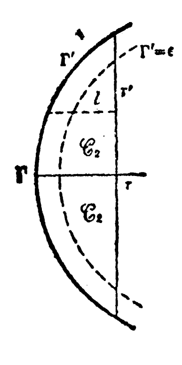


FIG. 24.

$$\beta_1 = \text{const.},$$
$$\beta_2 = \text{const.}, \ldots,$$
$$\beta_{m-1} = \text{const.} :$$

intégrale qui reste finie (comme cela est évident *a priori* et comme on va le vérifier) quand les paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ varient, et dont l'intégration par rapport à ces paramètres se fera au sens classique.

On peut remarquer immédiatement que les termes correspondant à $h \geqslant m_1 - 1$ du développement (1) de V' donnent seulement des intégrales finies au sens ordinaire, qui deviennent infiniment petites quand γ tend vers zéro. On les négligera donc, et on n'aura à s'occuper que d'un nombre fini, savoir $m_1 - 1$, de termes de ce développement.

Pour $m = 2$, on a déjà remarqué que ces termes n'existent pas. Pour $m = 4$, c'est-à-dire $m_1 = 2$, on en a seulement un, savoir V_0', qu'il faut diviser par $(\Gamma - z^2)^{3/2}$ et intégrer par rapport aux β, à Γ et à z après l'avoir multiplié

par Kf. En écrivant Kf $V_0' = F_0$, l'intégrale par rapport à Γ est (moyennant une intégration par parties) :

$$\left|\int_{z^2}^{\gamma} \frac{F_0 d\Gamma}{(\Gamma - z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(-2\frac{F_0}{\sqrt{\Gamma - z^2}}\right) + 2\int_{z^2}^{\gamma} \frac{\partial F_0}{\partial \Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma - z^2}}.\right.$$

L'intégrale qui subsiste au second membre est une intégrale ordinaire, qui tend vers zéro avec $\gamma - z^2$. En dehors du signe $\int$, on a un terme qui est un infini fractionnaire dans le voisinage de la limite inférieure $\gamma = z^2$: on doit donc supprimer cet infini fractionnaire et ne conserver que le terme $\frac{-2F_0}{\sqrt{\gamma - z^2}}$.

Ce dernier est facile à intégrer par rapport à z, et donne $-2\pi F_0$.

De même, pour tout m_1 et $h < m_1 - 1$, écrivons

$$Kf V_h = F_h.$$

En prenant l'intégrale correspondante sur $\mathcal{C}_2$, nous éliminerons facilement le symbole $\lceil$: car, puisque

$$\frac{1}{(\Gamma - z^2)^{m_1 - h - \frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^{m_1-h-1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1 - h - \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{d^{m_1-h-1}}{d\Gamma^{m_1-h-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma - z^2}}\right),$$

on a, par une formule classique,

$$(9) \qquad \int \frac{F_h d\Gamma}{(\Gamma - z^2)^{m_1-h-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1 - h - \frac{3}{2}\right)}\int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma - z^2}} \frac{d^{m_1-h-1}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-1}} + R_h.$$

$$(10)\quad R_h = \frac{(-1)^{m_1-h-1}F_h}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{d^{m_1-h-2}}{d\Gamma^{m_1-h-2}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}}$$

$$-\cdots-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-2}}$$

$$=\frac{-F_h}{m_1-h-\frac{3}{2}}\frac{1}{(\Gamma-z^2)^{m_1-h-\frac{3}{2}}}-\cdots$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-2}}.$$

Le premier terme du second membre de (9) donne une intégrale ordinaire qui s'annule avec γ et peut être négligée. D'un autre côté, la valeur R_h' de R_h au voisinage du contour $\Gamma = z^2$ est un infini fractionnaire et doit être supprimée (en fait, tout au moins pour z arbitraire, elle représente ici *le seul* infini fractionnaire qu'on ait à écarter en vertu de la définition de la notation $\overline{|\quad}$) Tout ceci réduit la partie finie de l'intégrale simple (9) à la valeur de R_h à l'autre extrémité $\Gamma = \gamma$ de l'intervalle d'intégration, soit

$$R_h'' = -\frac{F_h}{m_1-h-\frac{3}{2}}\frac{1}{(\gamma-z^2)^{m_1-h-3/2}}-\cdots$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\gamma^{m_1-h-2}}$$

qu'il nous faut maintenant intégrer par rapport à z, depuis $-\sqrt{\gamma}$ jusqu'à $+\sqrt{\gamma}$, en prenant la partie finie du résultat. Or, la valeur de l'intégrale

$$(11)\qquad \left|\overline{\int_{-\sqrt{\gamma}}^{+\sqrt{\gamma}}\frac{dz}{(\gamma-z^2)^{n+\frac{1}{2}}}}\right.$$

a été trouvée (Livre III, n° 96) nulle pour chaque n positif.

Par conséquent, le seul terme qu'on ait à considérer est le dernier, qui donne :

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\gamma^{m_1-h-2}}.$$

On a à prendre la dérivée ci-dessus pour $\Gamma=\gamma$. Mais finalement on doit faire tendre γ vers zéro. On prend donc la dérivée en question pour $\gamma=0$, et ceci donne la limite demandée.

Il reste seulement, en prenant pour h toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à m_1-2, à obtenir la somme des résultats. On va voir que ceci se relie directement à la valeur du polynôme (3) : car la dérivée $(m_1-h-2)^e$ de F pour $\Gamma=0$ peut être considérée (en raison de la formule classique de Leibnitz pour la dérivée d'un produit) comme étant la dérivée $(m_1-2)^e$ de $F\Gamma^h$ multipliée par

$$\frac{(m_1-h-2)\,!}{(m_1-2)\,!}.$$

Ainsi, en introduisant de nouveau les coefficients C et en tenant compte de (3), on a [1] :

$$(12)\qquad \lim_{\gamma=0}\left|\iint\frac{v'd\Gamma dz}{(\Gamma-z^2)^{m_1-1}}\right.$$

$$=-\frac{\pi}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\left(\sum_0^{m_1-2}\frac{F_h\Gamma^h}{(m_1-h-1)C_{m_1-h-1}}\right)$$

$$=-\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{1}{(m_1-2)\,!}\left(\frac{d^{m_1-2}KfV}{d\gamma^{m_1-2}}\right)_{\gamma=0}$$

139. Nous venons d'appliquer le résultat général du n° **90**; mais, dans le cas présent, il est facile de vérifier directement que les choses se passent bien comme on l'a démontré à l'endroit cité. Car, en se référant à la définition de $\ulcorner$ telle qu'elle est

(1) Quand f est supposé analytique, on peut obtenir la même formule en se servant des développements de Maclaurin, comme nous l'avons fait dans les *Acta Mathematica*, t. XXXI.

donnée aux nos **88**, **89**, on aurait à limiter T_2' par $\Gamma' = \varepsilon$ (ligne pointillée de la fig. 24) et à prendre la limite des **SSS** correspondants après soustraction des infinis fractionnaires en ε. Or, on voit immédiatement, par (10), que la valeur de R_h' (pour $\Gamma = z^2 + \varepsilon$) est un tel infini fractionnaire; il en est de même pour le reste d'une quelconque des intégrales (11), quand on limite le segment d'intégration à $z = -\sqrt{\gamma} + \varepsilon$ et $z = +\sqrt{\gamma} - \varepsilon$, ceci démontrant — comme cela a été fait, au n° **90**, pour le cas général — que le procédé d'intégrations successives, en employant chaque fois le symbole $\lceil$, donne correctement la valeur de l'intégrale double relative à Γ et à z.

140. Enfin, intégrons par rapport à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$. Sur la multiplicité τ définie par l'équation $\Gamma = \gamma$, où γ est une constante quelconque, le produit $K d\beta_1\, d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1}$ donne un élément qu'en raison de l'expression (8), nous avions auparavant désigné par $d\tau_\gamma$ $\left(\text{ou } \frac{dT}{d\gamma}\right)$

L'intégrale

$$(13) \qquad I_\gamma = \mathbf{SS}\, fV\, d\tau_\gamma = \mathbf{SS}\, Kf\, d\beta_1\, d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1}$$

sera une fonction de γ, qui peut être différentiée par rapport à γ en différentiant K/V sous le signe **SS** et en intégrant par rapport aux β.

Par conséquent, la quantité cherchée sera obtenue comme proportionnelle au coefficient de γ^{m_1-2} dans le développement de I_γ, ou, en d'autres termes [en raison de (12)], elle est égale à [1]

$$(14) \qquad \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{\gamma=0} \cdot I_\gamma.$$

Elle contiendra, comme on le voit, les dérivées de f et celles de V, jusqu'à l'ordre $m_1 - 2$. Cette fonction V n'est que partiellement déterminée, les termes qui contiennent Γ^{m_1-1} en facteur étant arbitraires; mais de tels termes n'ont pas d'influence sur l'expression (14).

---

(1) Il faut ici tenir compte du signe — devant le premier terme de (7).

La partie de la valeur de u_a correspondant au terme

$$-\overline{\left| \mathbf{SSS} \int v' f \, dx_1 \ldots dx_m \, dz \right.}$$

consiste alors en l'intégrale m^{uple}

$$(14') \qquad -\frac{2\pi}{\mathrm{k}} \mathbf{SSS} \int \mathcal{V} \, dx_1 \ldots dx_m$$

étendue à l'intérieur de T, et en l'expression (14), intégrale $(m - 1)^{\text{uple}}$ étendue à la surface de Γ. Ces deux quantités ne contiennent pas, cette fois, une fonction infinie quelconque, mais seulement les deux fonctions régulières $\mathcal{V}$ pour l'une, V pour l'autre.

141. On doit remarquer, cependant (pour $m > 2$), que, pour être d'accord avec le résultat du Livre III, l'expression (13) doit d'abord être calculée après limitation de T — et, par conséquent, de τ — par une petite portion de surface z excluant le voisinage de a, puis faisant finalement tendre z vers a, avec les hypothèses mentionnées au n° **106**, ceci étant le procédé indiqué aux n^os **105-106**, et dont celui dont nous nous occupons n'est qu'une simple traduction. Il est évident, pour la même raison, que ce procédé convergera, et même uniformément comme on l'a dit au n° **106**.

Mais le fait est que cette précaution n'est pas nécessaire. On peut obtenir la même valeur finale en étendant immédiatement les **SS** à toute la surface τ et en appliquant les $m_1 - 2$ différentiations au résultat ainsi obtenu.

Pour le démontrer, il faut montrer que si une telle intégrale était étendue à la petite partie de τ qui est du même côté de Σ que le point a, sa dérivée $(m_1 - 2)^e$ par rapport à γ, pour $\gamma = 0$, existerait et tendrait vers zéro quand on ferait tendre Σ vers a (tout en maintenant les restrictions du n° **106**). Il suffit de donner cette démonstration pour une loi de variation de Σ convenablement choisie, puisque nous savons que le résultat final ne dépend pas de cette loi.

C'est ce qu'on fera en introduisant [1] des variables normales ξ,

---

(1) Il y aurait lieu de tenir compte de l'influence du changement de variables ainsi exécuté. On pourrait voir directement qu'elle se traduirait par l'introduction, sous le signe **SSS**, d'un facteur égal au jacobien

telles qu'elles sont définies au n° **57**. Cela réduit Γ à une forme quadratique à coefficients constants, que l'on peut même (par une substitution linéaire effectuée sur les ξ) réduire à

$$\Gamma_0 = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi^2_{m-1},$$

ce que nous écrirons :

$$\Gamma_0 = t^2 - r^2 = t^2 - \mathrm{R},$$

en écrivant t au lieu de ξ_m et $\mathrm{R} = r^2$ pour $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots \xi^2_{m-1}$. Le conoïde caractéristique de sommet a devient ainsi un hypercône de révolution ordinaire, et $\Gamma = \gamma$ représentera une (hyper) quadrique déjà considérée au n° **97**.

On peut alors choisir Σ : nous prendrons des plans tels que $t = \text{const.} = \varepsilon$.

La fonction $\mathrm{F} = \mathrm{V}f$ sous le signe **SSS** est supposée régulière (voir plus bas) (et le restera par le changement de variables, qui est régulier); ceci admis, il faut étudier la différentiation de l'intégrale

$$\mathbf{SS}\, \mathrm{F} d\tau_\gamma, \tag{15}$$

où $d\tau_\gamma$ est tel que son produit par $d\gamma$ représente l'élément à m dimensions $d\xi_1 \dots d\xi_m$. Ce dernier sera remplacé par :

$$r^{m-2}\, d\Omega_{m-2},$$

($d\Omega_{m-2}$ ayant la même signification qu'au n° **97**), ce qui équivaut à le rapporter à t, r et à des paramètres angulaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{m-2}$; et on peut commencer par intégrer par rapport à $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}$. Cela introduira l'intégrale

$$\Phi = \mathbf{S}\, \mathrm{F}\, d\Omega_{m-2},$$

fonction de t et de r et paire par rapport à cette dernière variable (1), de sorte qu'on peut la considérer comme étant régulière

---

de la transformation, quantité régulière qui ne modifie pas, au point de vue des raisonnements du texte, les propriétés de la fonction F. Nous n'insisterons pas sur ce côté du calcul, parce que le plus simple, pour en traiter, est d'exposer la méthode sous forme entièrement invariantive, c'est-à-dire indépendante de tout changement de variables, ainsi que nous le ferons dans l'Appendice I. Cette autre forme du calcul diffère précisément de celle que nous avons indiquée jusqu'ici par l'introduction convenable, dans toutes les formules, de facteurs $\sqrt{|\mathrm{D}|}$, en désignant toujours par D le discriminant de H; et l'on sait le lien de cette quantité avec le déterminant fonctionnel dont nous venons de parler.

(1) F étant développé par la formule de Taylor suivant les puissances des ξ et, par conséquent, de t et de r avec des coefficients trigonomé-

en fonction de t et de $R = r^2$. Au moyen de cette introduction, l'intégrale de volume $\iiint F\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m$, relative au volume à m dimensions compris entre le conoïde $\Gamma = 0$, l'hyperquadrique $\Gamma = \gamma$ et l'hyperplan $t = \varepsilon$, sera exprimée par l'intégrale double

$$(16) \qquad \iint \Phi \cdot r^{m-2}\, dr dt,$$

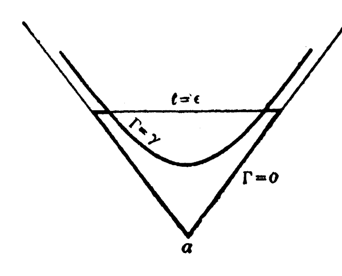


FIG. 25.

l'aire d'intégration étant limitée (fig. 25), par les trois lignes droites $r = 0$, $t = \varepsilon$, $t = r$ et un arc de l'hyperbole

$$t^2 - r^2 = \gamma.$$

L'expression (15) est la dérivée [1] de (16) par rapport à γ. Comme $d\tau_\gamma$ est le « quotient » de l'élément d'espace à m dimensions par $d\gamma$, on doit remplacer $drdt$ par un élément correspondant $d\Pi_\gamma$ de l'hyperbole, qui sera le quotient de $d\Pi = drdt$ par $d\gamma$. Ce quotient (voir n° **38**) est

$$dt : \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{dt}{2r}.$$

de sorte que

$$(15') \qquad d\tau_\gamma = \frac{dT}{d\gamma} = \frac{1}{2}\, r^{m-3}\, d\Omega_{m-2}\, dt.$$

La question, par conséquent, concerne l'intégrale simple

$$(17) \qquad \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} r^{m-3}\, \Phi\, dt = \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi\,(t,\, R)\, R^{m_1 - 3/2}\, dt$$

$$= \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi\,(t,\, t^2 - \gamma)\, (t^2 - \gamma)^{m_1 - 3/2}\, dt,$$

---

triques en φ, tout terme qui est impair en r, quand il est multiplié par $d\Omega_{m-2}$ et intégré par rapport aux φ, correspond à une intégrale prise à l'intérieur d'une hypersphère de rayon r, laquelle est nulle, puisque son élément est un monôme en ξ, impair par rapport à au moins l'un d'entre eux.

(1) Cf. plus loin, n° **147**.

dont il s'agit de savoir si la dérivée $(m_1 - 2)^e$, pour $\gamma = 0$, existe et est infiniment petite avec ε. Or, d'après la règle classique, la dérivée première est :

$$-\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \left[R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right) \Phi \right] (t^2 - \gamma)^{m_1 - 5/2} \, dt.$$

$\left(\text{car, R étant égal à } t^2 - \gamma, \frac{\partial R}{\partial \gamma} \text{ est égal à } -1\right)$. D'un autre côté, on n'a écrit aucun terme correspondant à la variabilité de la limite inférieure : ce terme est évidemment nul, m_1 étant supposé être supérieur à 1 (et même, pour l'instant, à 2). Ainsi, posant

$$(18) \qquad \Phi_1(t, R) = -\left[R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right) \Phi \right] = -\left[\frac{r}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right) \Phi \right],$$

on voit que la dérivée en question est

$$(17') \qquad \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi_1(t, t^2 - \gamma)(t^2 - \gamma)^{m_1 - 5/2} \, dt,$$

c'est-à-dire analogue à l'expression (17) elle-même, mais en différant par le changement de m_1 en $m_1 - 1$.

La dérivée $(m_1 - 2)^e$ de (17), pour $\gamma = 0$, est la dérivée $(m_1 - 3)^e$ de (17'). En d'autres termes, si notre conclusion est certaine pour une valeur quelconque de m_1, elle est certaine pour la suivante.

Mais, pour $m_1 = 2$, on n'a qu'à examiner les valeurs de l'intégrale elle-même, savoir :

$$\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi(t, t^2 - \gamma) \sqrt{t^2 - \gamma} \, dt$$

(sans avoir à la différentier); et, pour $\gamma = 0$, cette intégrale se réduit [1] à

$$\int_0^{\varepsilon} \Phi(t, t) \, t dt,$$

(1) Pour $m = 4$ et Φ identiquement égal à 1, la première forme de (17) devient $\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} r dt$, dont on voit immédiatement qu'elle représente la moitié de l'aire du segment hyperbolique déterminée par la corde $t = \varepsilon$, et par conséquent, pour $\gamma = 0$, la moitié de l'aire du triangle entre cette corde et les asymptotes.

quantité qui est plus petite que $H\frac{\epsilon^2}{2}$, en désignant par H une valeur maxima de $|\Phi|$.

La démonstration est, par conséquent, complète et on voit que la dérivée $(m_1 - 2)^e$ de l'expression (15), pour $\gamma = 0$, est, pour ε infiniment petit, un infiniment petit de l'ordre de ε^2.

Au lieu d'employer le symbole Φ, on peut remarquer que le premier membre Φ_1 de (18) est égal à $\mathbf{S}\, F_1 d\Omega_{m-2}$, avec

$$F_1 = -\left[\frac{r}{2}\frac{\partial F}{\partial r} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right)F\right].$$

$m_1 - 2$ opérations semblables (le coefficient, à l'intérieur des crochets, décroissant chaque fois d'une unité) conduiront à une certaine fonction finale F_{m_1-2}; et la conséquence du raisonnement est que la dérivée $(m_1 - 2)^e$ demandée de I_γ est

$$(19) \qquad \int dt\, \mathbf{S}\, F_{m_1-2}\, d\Omega_{m-2}$$

où, dans F_{m_1-2}, on doit faire $r = t$; mais ceci peut s'écrire :

$$(19') \qquad \mathbf{SS}\, F_{m_1-2}\, d\Omega_{m-2}\, dt,$$

intégrale qui s'étend à Γ_0. En revenant aux coordonnées primitives, ceci peut être considéré comme une intégrale étendue à Γ. Sur ce dernier conoïde, les paramètres φ peuvent être considérés comme $(m - 2)$ d'entre ceux que l'on a appelés λ (chaque système de valeurs des φ déterminent une génératrice de Γ_0, qui correspond à une bicaractéristique de Γ), tandis que t, variable normale, peut être considéré comme le paramètre s.

142. Ayant ainsi transformé le premier terme de (17), une évaluation entièrement semblable s'applique évidemment à l'intégrale

$$-\left|\overline{\mathbf{SS}\int\left(v'\frac{du}{dv} + Luv'\right)dS'}\right. = -\left|\overline{\mathbf{SS}\int v'\,(u_1 + Lu_0)\,dS'}\right..$$

On aura, pour cette quantité, la valeur

$$-\frac{2\pi}{k}\left[\mathbf{SS}_{S_0}\,\mathcal{V}\,(u_1 + Lu_0)\,dS \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m_1-2)!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\,\mathbf{S}_\sigma\, V\,(u_1 + Lu_0)\,d\sigma_\gamma\right],$$

où σ est l'intersection de S par la surface $\Gamma = \gamma$, et $d\sigma_\gamma$, l'élément de σ défini par la notation

(8 *bis*) $$d\sigma_\gamma d\gamma = dS.$$

143. Prenons, finalement, le terme

(20) $$\left|\overline{\mathbf{SS}\int u\,\frac{dv'}{d\nu}\,dS'}\right. = \left|\overline{\mathbf{SS}\int u\,\frac{dv'}{d\nu}\,dSdz.}\right.$$

Une méthode tout à fait analogue peut aussi lui être appliquée. Car les opérations précédentes ont montré, que, en général, si w' est une quantité quelconque de la forme

$$w' = \frac{\Sigma W_h \Gamma'^h}{\Gamma'^{p-\frac{1}{2}}}$$

avec W_h' indépendant de z, et qu'on pose $(w') = \dfrac{\Sigma W_h' \Gamma'^h}{(-\Gamma')^{p-\frac{1}{2}}}$; si, de plus,

(21) $$\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1} (w')\,dc' = (-1)^{p-1}\left(\frac{W}{\Gamma^{p-1}} - \mathfrak{W}\log\Gamma + \dots\right)$$

(les points représentant des termes réguliers pour $\Gamma = 0$), alors :

(22) $$\left|\overline{\mathbf{SS}\int w'udS'}\right. = +\,2\pi\left(\mathbf{SS}_S\,u\mathfrak{W}dS \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(p-2)!}\,\frac{d^{p-2}}{d\gamma^{p-2}}_{(\gamma=0)}\,\mathbf{S}_\sigma uWd\sigma_\gamma\right).$$

Tel sera le cas si on prend $w' = \mathbf{k}\,\dfrac{dv'}{d\nu}$ et (comme on le voit par différentiation directe) (w') sera $-\,\mathbf{k}\,\dfrac{d(v')}{d\nu}$, le nombre p étant ici égal à $m_1 + 1$. L'intégrale (21) sera alors

$$-\,\mathbf{k}\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}\frac{d(v')}{d\nu}\,dc'}\right.$$

et, par conséquent, ainsi qu'on le sait, égale à

$$-\mathbf{k}\frac{d}{dv}\left|\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}(v')\,dc'\right.$$

$$= -(-1)^{m_1-1}\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{V}}{\Gamma^{m_1-1}} - \mathcal{V}\log\Gamma + \ldots\right)$$

en raison du n° **134**, de sorte que :

$$\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{V}}{dv},\ \mathrm{W} = -(m_1-1)\frac{\mathrm{V}d\Gamma}{dv} + \frac{\Gamma d\mathrm{V}}{dv} - \mathcal{V}\,\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{dv}.$$

Ce sont ces valeurs que l'on aura à substituer dans (22), le résultat devant être divisé par **k**, ce qui donne encore $\frac{2\pi}{\mathbf{k}}$ en facteur au second membre.

On observera que la dérivée $(p-2)^e$, c'est-à-dire la dérivée $(m_1-1)^e$ du dernier terme de W pour $\gamma = 0$, s'obtient immédiatement, savoir

$$\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\mathcal{V}\,\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{dv} = (m_1-1)!\,\mathcal{V}\frac{d\Gamma}{dv},$$

de sorte que

$$(22bis)\quad \frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\mathbf{S}\,u\mathcal{V}\,\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{dv}\,d\sigma_\gamma$$

$$= \mathbf{S}u\mathcal{V}\frac{d\Gamma}{dv}\,d\sigma_\gamma$$

(sans aucun terme correspondant à la variabilité de $d\sigma_\gamma$ avec γ, toujours en raison du facteur Γ^{m_1-1} qui figure dans la quantité à différentier).

Dans le même ordre d'idées, le terme précédent de W ne donnera lieu qu'à une différentiation $(m_1-2)^{uple}$, à cause du facteur Γ qu'il contient :

$$(22\,ter)\quad \frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\mathbf{S}\Gamma u\frac{d\mathrm{V}}{dv}\,d\sigma_\gamma$$

$$= \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d\gamma^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\mathbf{S}u\frac{d\mathrm{V}}{dv}\,d\sigma_\gamma.$$

143 *bis*. Au premier abord, les expressions ainsi écrites pour le dernier terme (20) semblent présenter un inconvénient que n'ont pas celles qui correspondent aux autres termes. Elles semblent dépendre des termes en Γ^{m_1-1} de V, lesquels ne sont pas déterminés.

Il est facile de vérifier que cette dépendance est simplement apparente. Imaginons que, de chaque point de S', un très petit segment soit pris sur la transversale ν, tel que le $d\nu$ correspondant soit égal à une constante (très petite). Désignons par S'_ν le lieu des points ainsi obtenus, et donnons à u, en chacun d'eux, la même valeur que celle qu'il a au point correspondant de S'.

Le terme (20), dans ces conditions, sera la dérivée, par rapport à ν, de la quantité

$$\left|\overline{\mathbf{SS}\int_{S'_\nu} uv'dS'}\right. \tag{23}$$

et sera, par conséquent, égal à

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\mathbf{k}}\frac{d}{d\nu}\mathbf{SS}_{S_\nu}\mathcal{V}u\,dS \\ &-\frac{2\pi}{\mathbf{k}}\frac{d}{d\nu}\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\mathbf{S}_{\sigma_{\gamma\nu}}u\mathbf{V}d\sigma_\gamma. \end{aligned} \tag{24}$$

Dans le second terme, S_ν est la base de S'_ν sur l'espace E_m; $\sigma_{\gamma\nu}$, l'intersection de S_ν avec $\Gamma = \gamma$, et les différentiations $\frac{d}{d\gamma}$ et $\frac{d}{d\nu}$ peuvent se permuter (puisque γ et ν sont des variables indépendantes entrant dans l'expression du signe $\mathbf{S}$ par l'intermédiaire de $\sigma_{\gamma\nu}$). On doit observer que, dans l'expression primitive (23), la différentiation concerne seulement v' : ceci signifie que, pour les calculer pour un élément quelconque en un point X de S'_ν, il faut considérer l'élément correspondant autour du point correspondant $X^{(0)}$ de S', qui est la « projection transversale » de X, et à l'aide duquel on doit calculer u (comme étant la valeur de cette dernière quantité en $X^{(0)}$) et dS', qui n'est pas la valeur de l'élément sur S'_ν, mais la valeur de sa projection transversale sur S'.

Des observations semblables s'appliquent, par conséquent, à (24), de sorte que u, $d\mathrm{S}$ et $d\sigma_\gamma$ doivent encore être pris en projection transversale sur S; mais, comme on doit l'observer, la conclusion n'est pas que la différentiation ne va concerner que V : car la projection transversale, sur S, de $\sigma_{\gamma\nu}$ est variable avec ν. Supposons que, entre des points x de σ_γ et des points (infiniment voisins) X de $\sigma_{\gamma\nu}$, on a établi une correspondance ponctuelle (ce qui peut se faire d'un nombre infini de manières) à partir de laquelle une autre transformation ponctuelle infinitésimale est définie, sur S, entre x et la projection transversale $\mathrm{X}^{(0)}$ de X. On peut imaginer que la valeur de V en X et la valeur $u^{(0)}$ de u en $\mathrm{X}^{(0)}$ sont exprimées en fonction des coordonnées de x. Quant à la relation entre les deux éléments $d\sigma_\gamma$ sur σ_γ et sur $\sigma_{\gamma\nu}$, on la trouvera en se rappelant que $d\sigma_\gamma$ est le quotient de $d\mathrm{S}$ par $d\gamma$, cette dernière quantité ayant la même valeur pour x et pour X. En se rappelant aussi que $d\mathrm{S}$, relatif à X, doit être pris en projection transversale sur S, on voit que l'intégrale du second terme de (24) peut s'écrire:

$$\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} \mathrm{V} u^{(0)} \frac{d\mathrm{S}^{(0)}}{d\mathrm{S}}\, d\sigma_\gamma, \tag{25}$$

où $\frac{d\mathrm{S}^{(0)}}{d\mathrm{S}}$ est le rapport des éléments correspondants dans la transformation ponctuelle entre x et $\mathrm{X}^{(0)}$ et où on doit aussi tenir compte des conventions précédentes pour V et $u^{(0)}$

On peut alors effectuer la différentiation par rapport à ν sur S, ce qui donne, pour la dérivée de (25) par rapport à γ (m_1 — 2 fois) et à ν, la valeur :

$$\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}} \frac{d}{d\nu} \mathbf{S}_{\sigma_{\gamma\nu}} u\, \mathrm{V}\, d\sigma_\gamma \tag{26}$$

$$= \frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}} \mathbf{S}_\sigma \left(u_0 \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta\nu} + \mathrm{V} \frac{du_0{}^{(0)}}{d\nu} + u_0 \mathrm{V} \frac{d}{d\nu} \frac{d\mathrm{S}^{(0)}}{d\mathrm{S}} \right) d\sigma_\gamma.$$

La dérivée $\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta \nu} = \lim_{\nu = 0} \frac{\mathrm{V_X} - \mathrm{V}_x}{\Delta\nu}$ correspond, d'après sa définition, à un déplacement effectué sur une surface $\Gamma = \mathrm{Const}^{\mathrm{te}}$, ainsi qu'il est nécessaire pour qu'on puisse

la différentier $(m_1 - 2)$ fois par rapport à γ sans avoir à connaître de V autre chose que le développement

$$V_0 + V_1\Gamma + \ldots + V_{m_1-2}\Gamma^{m_1-2},$$

tel que nous avons appris à le calculer au Livre II. On aura pour tout h au plus égal à $m_1 - 2$,

$$\frac{d^h}{d\gamma^h}_{(\gamma = 0)} \frac{\delta V}{\delta \nu} = h! \frac{\delta V_h}{\delta \nu}$$

La manière de traiter le premier terme de (24) n'appelle aucune observation nouvelle, et dépend des règles ordinaires du Calcul infinitésimal. On doit d'abord différentier sous le signe **SS** — c'est-à-dire remplacer $\mathcal{V}$ par $\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}$; — on aura alors un terme aux limites, puisque le domaine S_ν — ou plus exactement sa projection transversale sur S — dépend de ν. Ce terme est toujours un terme négatif si S est une surface d'espace, la raison étant que (comparer n° **108**, note, p. 233 et fig. 13) la transversale à S en un point quelconque de l'arête d'intersection avec Γ est dirigée vers l'extérieur de Γ, et que, par conséquent, la projection transversale de S_ν est quelque part à l'intérieur de S (fig. 26). La partie ainsi soustraite de S consiste en éléments dont chacun est un petit cylindre (à $m - 1$ dimensions) ayant un élément de σ comme base et le petit segment $xX^{(0)}$ défini ci-dessous (voir fig. 26) comme génératrice : le volume d'un tel élément est, avec nos notations, $d\sigma_\gamma d\gamma$, le second facteur représentant l'accroissement de Γ quand on passe de x à $X^{(0)}$ ou, ce qui revient au même de X à $X^{(0)}$, et étant par conséquent en valeur absolue égal à $\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| d\nu$. En divisant par $d\nu$, on a la dérivée :

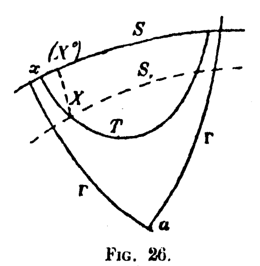


FIG. 26.

$$\text{(27)} \qquad \frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu} \mathcal{V} u_0 \, dS$$
$$= \mathbf{SS}_S \, u_0 \frac{d\mathcal{V}}{d\nu} dS - \mathbf{SS}_\sigma \, u_0 \mathcal{V} \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| d\sigma_\gamma.$$

Il est bien entendu que cette formule ne concerne que le cas où S a une orientation d'espace et où par conséquent $\frac{d\Gamma}{d\nu} < 0$. Le signe devant le dernier terme devra naturellement être changé si on remplace $\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|$ par $\frac{d\Gamma}{d\nu}$, et la nouvelle formule ainsi obtenue sera valable pour toute orientation de S puisque $\frac{d\Gamma}{d\nu} > 0$, résultant d'une surface S orienté dans le temps, coïnciderait avec le fait que les parties correspondantes de la projection transversale de S_ν déborderaient S (au lieu d'être à son intérieur).

Cette deuxième expression de (20), par combinaison de (26) et de (27), est équivalente à la première [comme il apparaît immédiatement pour les termes en $\mathcal{V}$ par comparaison avec (22)-(22 *ter*)] ; mais on voit, cette fois, qu'elle ne contiendra pas de termes en Γ^{m_1-1} provenant de l'expression de V.

144. L'évaluation du terme (18) complète la solution du problème. Nous pourrons faire passer au premier membre le facteur

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\pi}(m_1 - 1)\ C_{m_1-1}$$

lequel viendra multiplier le facteur $(-1)^{m_1-1}\pi\Omega_{m-2}$ qui figure déjà dans la formule (F) (Cf. n° **135**), donnant le coefficient

$$(28) \qquad (-1)^{m_1}(m_1 - 1)C_{m_1-1}\,\Omega_{m-2}.$$

Tenant compte de la relation du n° **99** entre Ω_{m-2} et Ω_{m-1}, ce coefficient s'écrit encore

$$(28\ bis) \quad (-1)^{m_1}\frac{(m_1 - 1)}{\pi}\,\Omega_{m-1} = 2\,\frac{(-1)^{m_1}}{(m_1 - 2)!}\,\pi^{m_1-1}$$

et on obtient l'énoncé suivant :

Pour $m = 2m_1$, *soient*

V, $\mathcal{V}$, *les deux fonctions régulières qui apparaissent dans la solution élémentaire* (2) *de l'équation adjointe* $\mathcal{G}(v) = 0$;

Γ, T, S_0, *les domaines analogues à ceux qui ont été définis pour m impair;* τ, *la partie de la surface* $\Gamma = \gamma$

(γ *étant une constante positive très petite) comprise dans* T; σ_γ, *l'intersection de cette même surface avec* S_0, *les éléments* $d\tau_\gamma$ *et* $d\sigma_\gamma$ *des variétés* τ *et* σ *étant définis par les égalités* (8) (n° **138**) et (8 *bis*) (n° **142**).

La solution du problème de Cauchy sera donnée par la formule :

$$(29) \qquad 2 \cdot \frac{(-1)^{m_1}}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1} u_a$$

$$= -\mathbf{SSS}_T \mathcal{V} f dx_1 \dots dx_m - \mathbf{SS}_{S_0}\left[\mathcal{V}(u_1 + Lu_0) - u_0\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}\right] dS$$

$$+ \mathbf{S}_\sigma u_0 \mathcal{V}\frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma_\gamma$$

$$+ \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\Bigg\{\mathbf{SS}_\tau f V d\tau_\gamma$$

$$+ \mathbf{S}_\sigma\left[V(u_1 + Lu_0) - u_0\frac{dV}{d\nu}\right] d\sigma_\gamma\Bigg\}$$

$$+ \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u_0 V\frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma_\gamma,$$

ou (conformément au n° précédent) :

$$(29\ bis) \quad = -\mathbf{SSS}_T \mathcal{V} f\, dx_1 \dots dx_m - \mathbf{SS}_{S_0}\mathcal{V}(u_1 + Lu_0) dS$$

$$+ \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\left[\mathbf{SS}_\tau f V d\tau_\gamma + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma} V(u_1 + Lu_0)\, d\sigma_\gamma\right]$$

$$- \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\frac{d}{d\nu}\mathbf{S}_{\sigma_{\gamma\nu}} V u_0\, d\sigma_\gamma$$

$$+ \frac{d}{d\nu}\mathbf{SS}_{S_\nu} u_0 \mathcal{V} dS,$$

où le dernier terme peut être calculé par (27) et l'avant-dernier par (26).

Il est bien entendu que, dans le cas présent, chaque différentiation sous les signes **SS** ou **SSS** doit se faire par les règles classiques du calcul, ainsi que nous aurons d'ailleurs l'occasion de le montrer plus explicitement, et qu'il ne se présente aucune difficulté comme celles qu'on avait rencontrées dans le cas de m impair.

145. Il est également clair que plusieurs propriétés appartenant à la solution telle qu'elle est formée au Livre précédent, s'appliquent immédiatement à celle qu'on vient de trouver, puisque cette dernière n'est pas essentiellement distincte de la première.

Tel est d'abord le cas pour la remarque du commencement du n° **104** : si la forme de S est telle qu'elle comprenne, avec Γ, un volume T auquel a est extérieur (voir fig. 12 *bis* et 12 *ter*), on a des formules identiques à (29) (29 *bis*), à ceci près que le premier membre est remplacé par *zéro*, ceci étant une conséquence immédiate des formules (F'), n° **104**.

On voit immédiatement que la même remarque s'applique à la « propriété d'échange » (n° **114**), sujet qui sera examiné à nouveau dans le prochain chapitre.

Il en est de même pour la remarque que nous avons faite (n° **113**) sur le cas où S est constitué par des caractéristiques, auquel cas la connaissance de u_0 suffit pour écrire la solution, puisque la connaissance de $u_1 = \frac{du_0}{d\nu}$ y est impliquée.

Enfin, et surtout, nous n'avons besoin d'aucun nouveau calcul pour passer de l'analyse de la solution à sa synthèse (les frontières étant toujours supposées orientées dans l'espace) : on doit considérer comme déjà fournie (d'après le Livre précédent, chap. III, **116-117**), la démonstration qu'elle vérifie toutes les conditions du problème [1].

145 *bis*. *Autre forme de la formule.* — Les termes en $d\tau_\gamma$ et $d\sigma_\gamma$ de (29) et (29 *bis*) peuvent s'écrire d'une autre manière en remarquant que $d\tau_\gamma d\gamma$, par exemple, est un élément (un petit cylindre, voir Livre II, n° **38**) du volume compris entre une surface τ et une surface consécutive analogue dans laquelle γ est changé en $\gamma + d\gamma$. Il résulte de ceci que, par un tel changement de γ, l'intégrale

(1) Dans le cas d'une variété S caractéristique, une telle vérification serait, de la même manière, une conséquence de la vérification correspondante relative à m impair. La démonstration du n° **119** pour $m = 3$ s'appliquerait à $m = 2$.

$\mathbf{SSS} f V dx_1 \ldots dx_m$ relative au domaine qu'on a appelé T_2 s'augmentera de $d\gamma \, \mathbf{SS} f V d\tau_\gamma$, de sorte que $\mathbf{SS} f V d\tau_\gamma$ est la dérivée de cette intégrale de volume [1] par rapport à γ.

De même, $\mathbf{S}\left(V \frac{du}{d\nu} + LuV\right) d\sigma_\gamma$ sera la dérivée par rapport à γ de $\mathbf{SS}\left(V \frac{du}{d\nu} + LuV\right) dS$ étendue à la portion S_2 de S comprise entre $\Gamma = 0$ et $\Gamma = \gamma$; et la même transformation s'appliquerait à l'autre terme en $d\sigma_\gamma$. En écrivant les notations abrégées $\mathbf{SSS}_2$ et $\mathbf{SS}_2$ pour $\mathbf{SSS}_{T_2}$ et $\mathbf{SS}_{S_2}$, on voit que la formule (29 *bis*) est équivalente à

$$(29\ ter) \qquad 2(-1)^{m_1} \frac{1}{(m_1-2)!} \pi^{m_1-1} u_a$$

$$= -\mathbf{SSS}_T \mathcal{V} f dx_1 \ldots dx_m - \mathbf{SS}_{S_0} \mathcal{V}(u_1 + Lu_0)\, dS$$

$$+ \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \Big[\mathbf{SSS}_2 f V dx_1 \ldots dx_m + \mathbf{SS}_2 V (u_1 + Lu_0)\, dS\Big]$$

$$- \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d}{d\nu} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SS}_2\, u_0 V dS + \frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu}\, u_0 \mathcal{V} dS$$

forme du résultat qui nous sera utile; et (29) peut être transformé de la même façon [2].

---

(1) L'accroissement du volume T_2 (volume compris entre deux positions consécutives de τ) contiendrait des parties irrégulières dans le voisinage de l'arête σ; mais elles sont du second ordre en $d\gamma$.

On peut se figurer la disposition générale d'une pareille figure en se la représentant schématiquement (Cf. fig. 25, p. 302) dans le cas le plus simple de $m = 2$ et supposant en outre, pour simplifier encore, l'équation à coefficients constants. La surface $\Gamma' = \gamma$ de E_{m+1} est alors une nappe d'hyperboloïde à deux nappes $\mathcal{H}_2$; $\Gamma = \gamma$ est une branche d'hyperbole, section principale de cet hyperboloïde; T_1 est la région intérieure à cette branche d'hyperbole (avec limitation par S); T_2 est (avec la même limitation) une région comprise entre cette hyperbole et ses asymptotes.

(2) Il sera également utile de se rappeler que, les calculs de ce n° n'étant pas essentiellement distincts de ceux du précédent, les remarques faites au n° 141 quant à la convergence, après différentiation par rapport à γ, du terme $\mathbf{SSS} f V dx_1 \ldots dx_m$ restent valables sous la forme présente. Dans les deux cas, en outre, la convergence est uniforme du moment que les dérivées de fV jusqu'à l'ordre $(m_1 - 2)$ sont bornées.

146. *Le cas de Riemann.* — Disons un mot du cas de $m = 2$ déjà traité directement au Livre II, et qui, comme on l'a dit, est un peu différent des autres.

Le conoïde caractéristique dégénère en un système de deux lignes caractéristiques : celles-ci seront parallèles aux axes, si on prend l'équation sous la forme de Laplace. Nous écrirons cette dernière de manière à avoir $|\Delta| = 1$, par conséquent, en la multipliant par ± 2 :

$$\pm 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu \right) = \pm 2 f.$$

Il nous faut choisir le signe en raison de la situation de l'angle utile compris entre les caractéristiques (c'est-à-dire de l'angle qui intercepte un arc de S), la forme $\mathbf{A}(\pi_1, \pi_2)$ étant assujettie à être positive pour les droites qui coupent cet angle utile : par conséquent, ce signe dépendra (comme on l'a vu au n° **42**) du sens de variation de y considéré comme fonction de x, et il arrive que, dans ce cas, on ne définit pas par la nature même de l'équation ce qu'on doit appeler une « orientation d'espace », mais, au contraire, que l'équation doit être écrite de manière à faire de la ligne donnée S une ligne « d'espace ».

Nous avons déjà remarqué que chaque terme de la formule $\left(\text{en mettant d'abord à part celui qui contient } \frac{dv'}{d\nu}\right)$ peut être transformé sans distinguer entre T_1 et T_2, en raison de l'absence du symbole $\ulcorner$ et de V. Dans un quelconque de ces termes, par conséquent, on n'a qu'à écrire $\mathcal{V}$ au lieu de v', supprimer un $\mathbf{S}$ et diviser (¹) par — 2.

Mais le même traitement peut aussi s'appliquer au terme en $\frac{dv'}{d\nu}$ en employant la méthode du n° **144.** $a\alpha$, $a\beta$ étant, comme au Livre II, n° **42**, les deux caractéristiques issues de a (Γ est précisément constitué par ces deux lignes); S, la ligne qui porte les données et qui coupe les

(1) Le facteur 2π, donné au n° **137**, est détruit par le coefficient du premier membre.

deux caractéristiques en α et β, on doit tracer une courbe avoisinante S_ν telle que chaque point de S_ν se déduise d'un point de S en prenant sur la transversale ν à S un petit segment correspondant à $d\nu$ = const., lequel S_ν coupera les caractéristiques en α', β' (fig. 27); S_ν' étant le cylindre droit de base S_ν, on a à prendre la dérivée, par rapport à ν, de l'intégrale $\mathbf{SS}\int uv'd\mathrm{S}'$ (voir n° **144**), étant bien entendu que le $d\mathrm{S}'$ d'un élément quelconque de S_ν' et la valeur correspondante de u, se rapportent, par définition, à la projection transversale sur S'.

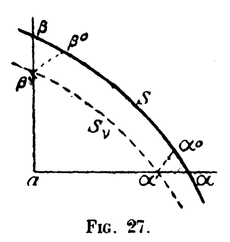


Fig. 27.

Mais $\mathbf{SS}\int uv'd\mathrm{S}'$ est égal à (1) $\pi\,\mathbf{SS}_{S_\nu} u\mathcal{V}ds$, intégrale simple qu'on peut maintenant écrire avec un signe $\int$ ordinaire et dont la dérivée se composera du produit de π par :

1° Le terme $\int u\,\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}\,ds$, représentant l'intégrale de la variation infinitésimale de $uv'd\mathrm{S}$ entre les points correspondants de S et de S_ν;

2° Deux termes relatifs aux arcs $\alpha\alpha^{(0)}$, $\beta\beta^{(0)}$ (fig. 27) d'une des courbes qui n'ont pas de correspondants sur l'autre, de sorte que les limites d'intégration par rapport à s sont des fonctions de ν. Les dérivées de ces deux fonctions sont égales à $\pm$ 1, en raison du fait que la direction transversale est symétrique de la tangente par rapport à des parallèles aux axes, de sorte que les deux triangles $\alpha\alpha'\alpha^{(0)}$ et $\beta\beta'\beta^{(0)}$ sont isocèles. Les deux termes en question donneront ainsi $\frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\alpha$ ou $\frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\beta$, correspondant évidemment au second terme de (27).

Ces deux termes sont, dans ce cas, les seuls qu'on ait à ajouter au second membre des formules (7) après y avoir

(1) On change la lettre S en s, en accord avec la notation ordinaire et avec le n° 40, pour désigner l'arc de S.

changé v' en $\mathcal{V}$, **SS** et **SSS** en $\int$ et $\int\int$ (et supprimé, naturellement, le symbole $\sqcap$). Ceci donne précisément les résultats qui ont été déduits de la méthode de Riemann. Le fait que la fonction $\mathcal{V}$ de Riemann est le coefficient du logarithme de la solution élémentaire, comme on l'a déjà trouvé au n° **45**, apparaît, cette fois, comme un cas particulier de nos considérations générales.

147. Ayant ainsi résolu la question par notre artifice de « descente », on peut se demander s'il existe un moyen d'obtenir le même résultat sans ce détour. Voici comment on peut effectivement y arriver :

Soit G = o une caractéristique de l'équation, que nous supposerons, pour commencer, régulière : c'est-à-dire que, non seulement le premier membre G de son équation devra être une fonction régulière des coordonnées (fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre qui interviendra dans les raisonnements et les calculs) mais que, en outre, il n'existera dans la région où l'on opère aucun point (point singulier) où ses m dérivées du premier ordre s'annulent simultanément. L'équation caractéristique

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial x_m}; x_1, \dots, x_m\right) = 0,$$

devant être vérifiée tout le long de cette surface, on devra avoir identiquement

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 G, \tag{30}$$

$\mathbf{A}_1$ étant une fonction régulière des x. Notons tout de suite, qu'il en résulte, pour la dérivée transversale à une surface G = const., en prenant $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{1}{2}\sum \pi_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} = \mathbf{A}\ (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = \mathbf{A}_1\ G \tag{30 bis}$$

Soit, d'autre part,

$$v = \frac{V}{G^p} - \mathcal{V} \log G, \tag{2 bis}$$

(p étant un entier positif pendant que V, $\mathcal{V}$ sont des fonctions régulières), une solution de l'équation ($\mathcal{E}$). ce qui implique que $\mathcal{V}$ est lui-même une solution de cette équation. Soient T (fig. 28) le volume compris entre la surface précédente et une seconde

surface S et situé, pour fixer les idées, du côté $G \geqslant 0$; T_γ, le domaine obtenu en coupant S, non plus par $G = 0$, mais par la surface voisine $G = \text{const.} = \gamma > 0$. Appliquons, dans T_γ, la formule fondamentale (F) à une solution u (régulière) de l'équation (E) et, d'autre part, successivement aux deux solutions v et $\mathcal{V}$ de l'équation adjointe. L'introduction de $\mathcal{V}$ donne d'abord, en désignant toujours par u_1 la dérivée transversale de u en un point arbitraire de S

$$(31)\quad -\mathbf{SSS}_{T_\gamma} \mathcal{V} f dT + \mathbf{SS}_{S_\gamma}\left[u\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} - \left(u_1 + Lu\right)\mathcal{V}\right]dS$$
$$= -\mathbf{SS}_\gamma\left[u\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} - \left(\frac{du}{d\nu} + Lu\right)\mathcal{V}\right]dS,$$

formule dans laquelle nous avons rassemblé au premier membre les termes de volume et les termes relatifs à S, en mettant à part, au contraire, dans le second membre, ceux qui sont relatifs à la surface $G = \gamma$. Si nous considérons encore u et u_1, le long de S, comme des données de la question, ce second membre reste la seule quantité inconnue.

Nous en désignerons la valeur par $-\varpi$.

Pour obtenir une expression de cette inconnue, ou plutôt de sa valeur limite ϖ_0 pour $\gamma = 0$, écrivons, toujours dans T_γ, la formule fondamentale, la solution introduite de l'équation adjointe étant, cette fois, v, et dérivons par rapport à γ (ou, si l'on veut, appliquons la formule dans la portion de T comprise entre deux surfaces voisines $G = \gamma$ et $G = \gamma + d\gamma$, et passons à la limite pour $d\gamma = 0$). Chaque élément de volume donnera, comme coefficient de $d\gamma$, l'élément d'intégrale $(m - 1)$-uple

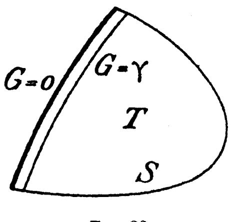


FIG. 28.

désigné précédemment $\frac{dT}{d\gamma}$; et, de même, chaque élément de la surface S donnera, comme coefficient de $d\gamma$, l'élément $(m - 2)$-uple, convenablement compté, de la variété σ_γ, intersection de S avec $G = \gamma$, élément désigné par $\frac{dS}{d\gamma}$. On trouve donc, en tenant compte de (30) et de la valeur (2 *bis*) choisie pour v, l'égalité

$$(31\ bis)\qquad \frac{Q_1}{\gamma^{p+1}} + \frac{Q}{\gamma^p} - \frac{\chi_1}{\gamma} - \chi\log\gamma$$
$$= \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\Pi}{\gamma^p} - \varpi_1 - \varpi\log\gamma\right),$$

où, en même temps que la quantité ϖ déjà introduite, figurent les expressions

$$Q_1 = - p\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} uV \frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$Q = - \mathbf{SS}_\gamma Vf \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{dV}{d\nu} - (u_1 + Lu)V\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\chi_1 = \mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u\mathcal{V}\frac{\partial G}{\partial \nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\chi = - \mathbf{SS}_\gamma \mathcal{V}f \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} - (u_1 + Lu)\mathcal{V}\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

(ν désignant la transversale à S), et

$$\Pi = \mathbf{SS}_\gamma\left[u\frac{dV}{d\nu} - \left(\frac{du}{d\nu} + Lu\right)V - p\mathbf{A}_1 uV\right]dS,$$

$$\varpi_1 = \mathbf{SS}_\gamma \mathbf{A}_1 u\mathcal{V}\frac{dT}{d\gamma},$$

(ν désignant la transversale à $G = \gamma$, calculée, dans la dernière formule, avec $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$).

On voit d'abord, comme il fallait s'y attendre, que les coefficients de $\log\gamma$ sont égaux de part et d'autre [c'est la relation obtenue en dérivant, par rapport à γ, les deux membres de (31)]. Mais de plus, comme, dans les conditions où nous nous plaçons jusqu'ici, les fonctions Π, ϖ_1, ϖ sont développables suivant les puissances de γ (au moins jusqu'à l'ordre qui nous intéressera), on voit aussi que ϖ_0 *est le coefficient de l'unique terme en* $\dfrac{1}{\gamma}$ *qui existe au second membre.*

Donc, on a

$$(32)\qquad \varpi_0 = -\frac{1}{p\,!}\left(\frac{d^pQ_1}{d\gamma^p}\right)_{\gamma=0} - \frac{1}{(p-1)\,!}\left(\frac{d^{p-1}Q}{d\gamma^{p-1}}\right)_{\gamma=0} + (\chi_1)_{\gamma=0}.$$

Telle est, à la limite (c'est-à-dire pour $\gamma = 0$) la valeur du second membre de (31). L'élimination de ϖ_0 entre (31) et (32) fournit une relation entre les valeurs de u et de u_1 sur S (confirmant, comme on le sait déjà par ailleurs, que dans la disposition de figure actuelle, ces valeurs ne peuvent pas être données arbitrairement).

147 *bis*. Prenons maintenant pour $G = 0$, non plus une caractéristique régulière, mais un conoïde caractéristique, de sorte que G n'est autre que Γ et que, par conséquent, la quantité

précédemment désignée par A_1 a la valeur constante 4, pendant que p a la valeur $\frac{m-2}{2}$. Les considérations précédentes vont se trouver modifiées par la singularité qui apparaît au sommet du conoïde. Ceci ne change rien à l'évaluation du premier membre de (31 *bis*) (à un terme près pour $m = 2$); mais, au second membre, le terme de coefficient ϖ n'est plus le seul qui fournisse un terme en $\frac{1}{\gamma}$ (c'est-à-dire qui, avant dérivation, soit en $\log \gamma$).

Pour le voir, on peut, soit abstraire du domaine d'intégration le voisinage du sommet du conoïde en coupant par une petite surface auxiliaire S_1 et évaluer (asymptotiquement) les termes correspondants ainsi ajoutés au premier membre de (31 *bis*), soit laisser la surface $\Gamma = \gamma$ complète et étudier directement le changement à apporter au second membre. Nous adopterons cette seconde manière d'opérer.

Les choses apparaissent d'ailleurs sous un jour assez notablement différent suivant que m est égal à 2 ou supérieur à 2.

1° Prenons d'abord $m = 2$, c'est-à-dire le cas classique de Riemann. L'équation étant, comme d'habitude, réduite à la forme de Laplace (ε), le conoïde se réduit à un angle droit, dont nous prendrons le sommet a pour origine des coordonnées, et les lignes $\Gamma = 4\,xy =$ const. seront des hyperboles équilatères.

Le nombre p est ici nul. La quantité Π (grâce au fait que tous les termes sous le signe d'intégration contiennent en facteur π_1 ou π_2) est une intégrale curviligne ordinaire, à coefficients réguliers, celle que nous avons formée au n° **40**. Cette intégrale étant prise le long de l'arc mn d'hyperbole $\Gamma = \gamma$ intercepté par S, sa dérivée par rapport à γ est au plus [1] de l'ordre de $\log \frac{1}{\gamma}$.

(1) La dérivée d'une telle intégrale s'obtient immédiatement par transformation en une intégrale double, et on voit ainsi qu'elle est dans un rapport fini avec la dérivée de l'aire interceptée dans notre hyperbole par la ligne fixe S (laquelle joint entre eux deux points, distincts de l'origine, pris respectivement sur les parties positives des axes), c'est-à-dire avec la dérivée de la quantité $\int_{\frac{\gamma}{y_1}}^{x_2} \frac{\gamma}{x}\,dx$, où y_1, x_2 sont des fonctions dérivables de γ, finies et différentes de zéro pour $\gamma = 0$. Une telle dérivée, calculée par la règle classique, se montre bien de l'ordre de $\log \frac{1}{\gamma}$.

Les termes Q, $\frac{d\Pi}{d\gamma}$, $\frac{d\varpi_1}{d\gamma}$ ont, dans notre Mémoire précédent (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. LII, p. 241), été à tort considérés comme restant finis pour $\gamma = 0$ lorsque $m = 2$.

Les termes ϖ_1 et (au premier membre) Q introduisent, au contraire, $\frac{dT}{d\gamma}$. Sur l'hyperbole $\Gamma = \gamma$, on a

$$(33) \qquad \frac{dT}{d\gamma} = \pm \frac{\cos(n,\ x)\,ds}{\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)} = \pm \frac{\cos(n,\ y)\,ds}{\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y}\right)}$$

$$= \pm \frac{dx}{x} = \mp \frac{dy}{y}$$

et ϖ_1 représente, au signe près, l'intégrale curviligne

$$\int u\mathcal{V}\,\frac{dx}{x}$$

étendue à l'arc mn intercepté sur l'hyperbole par la multiplicité (ici la ligne) S.

On peut réduire $u\mathcal{V}$ à sa valeur à l'origine : en effet, en raison

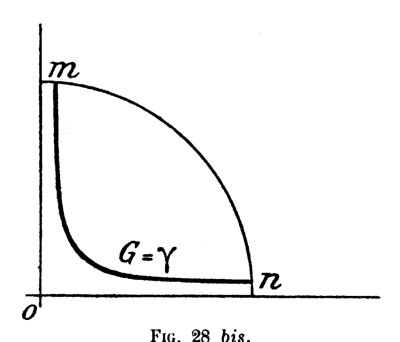


Fig. 28 *bis*.

de la double forme (33) de l'élément $\frac{dT}{d\gamma}$, tout terme contenant en facteur soit x, soit y donnera encore une intégrale curviligne à coefficients finis et réguliers, donc au plus de l'ordre de $\log\frac{1}{\gamma}$. Cette quantité $u\mathcal{V}$, qui se réduit à u_a si l'on prend égale à l'unité la valeur initiale de $\mathcal{V}$, sera multipliée par

$$\log\frac{x_1}{x_2} = \log\gamma - \log(y_1 x_2),$$

en désignant par x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées des points m, n

prises, comme cela est visiblement possible, dans un ordre tel que $y_1\, x_2$ ne tende pas vers zéro avec γ.

La différence des deux valeurs (31) et (32) de ϖ_0 n'est donc plus nulle, mais égale à u_a, dont elle fait connaître la valeur.

Quant à la partie

$$\mathbf{SS} \mathrm{V}f \frac{d\mathrm{T}}{d\gamma} = \pm \int \mathrm{V}f \frac{dx}{x}$$

du terme Q, on voit qu'elle est au plus égale, en valeur absolue, à $\log \frac{x_2}{x_1}$ max. $|\mathrm{V}f|$, donc au plus de l'ordre de $\log \frac{1}{\gamma}$.

2° Soit maintenant m supérieur à 2. Nous réduirons, comme au n° **141** (1), Γ à la forme

$$\Gamma = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi^2_{m-1} = t^2 - r^2,$$

en désignant par t la dernière variable ξ_m et par r^2 la somme des carrés des variables restantes. Cette forme donnée à Γ implique que, à l'origine des coordonnées, la quantité $\mathbf{A}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_m)$ se réduit à

$$\mathbf{A}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_m;\, o, o, \dots, o) = \mathrm{P}_m^2 - \mathrm{P}_1^2 - \dots - \mathrm{P}^2_{m-1}$$

et, par conséquent, au voisinage de l'origine, à une forme quadratique très peu différente de celle-là. L'élément de volume étant (**141**)

$$d\mathrm{T} = d\xi_1\; d\xi_2\; \dots\; d\xi_m = r^{m-2}\, d\Omega_{m-2}\, dr\, dt,$$

l'élément désigné plus haut par $\frac{d\mathrm{T}}{d\gamma}$ a l'expression formée au n° **141**

$$\frac{1}{2}\, r^{m-3}\, d\Omega_{m-2}\, dt, \tag{15'}$$

dans laquelle il convient de noter que l'exposant de r est ici au moins égal à 1.

Dans ces conditions, en opérant comme au n° **141** ou comme nous allons le faire dans un instant, il est aisé de voir que le terme ϖ_1 ne fournit dans la dérivation aucun terme infini avec $\frac{1}{\gamma}$.

(1) Comme au n° **141**, nous ne discuterons pas l'influence de ce changement de variables, le mieux, à ce point de vue, étant de partir de la forme donnée aux calculs dans l'Appendice I.

Par contre, il en est autrement du terme en Π. Dans ce dernier, la quantité qui figure entre crochets sous le signe **SS** est une fonction régulière; sa valeur à l'origine est d'ailleurs uniquement donnée par son dernier terme $-p\,\mathbf{A}_1\,u\mathrm{V}$, car dans tous les autres interviennent les dérivées $\pi_i = \dfrac{\partial\Gamma}{\partial\xi_i}$, lesquelles sont nulles au sommet a de notre conoïde. Si donc nous commençons par multiplier par $d\Omega_{m-2}$ et intégrer par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, le résultat sera une certaine fonction $\Phi\,(r,\,t)$ régulière (et paire par rapport à r) qui prend, pour $r = t = 0$, la valeur

$$-2(m-2)\Omega_{m-2}u_a\mathrm{V}_a, \tag{34}$$

après quoi on aura

$$\Pi = \frac{1}{2}\int r^{m-3}\Phi(r,\ t)\,dt, \tag{34 bis}$$

l'intégrale étant prise, dans le plan des rt, le long d'un arc d'hyperbole $t^2 - r^2 = \gamma$ (Cf. fig. 25, p. 302), que l'on peut supposer limité par la ligne $t = h$. Si, sous le signe $\int$, on réduit Φ à son terme initial (34), celui-ci sera multiplié par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^{m-3}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h}(t^2-\gamma)^{m_1-3/2}\,dt.$$

Or, cette dernière est (**95**) de la forme

$$\frac{(-1)^{m_1}}{4}\,\mathrm{C}_{m_1-1}\;\gamma^{m_1-1}\log\gamma + \cdots.$$

(C_{m_1-1} étant le coefficient numérique désigné plus haut), dans laquelle les termes remplacés par des points représentent une série entière en γ. Comme on doit diviser par γ^{m_1-1}, ceci donne un terme de la forme qui nous intéresse et dont le coefficient est la quantité (34).

Il est aisé de voir que ce terme est seul de son espèce dans le cas où les données sont analytiques et où, par conséquent $\Phi(r,\,t)$ est de la forme

$$\Phi(r,\ t) \doteq \Phi_1(r,\ t^2) + t\Phi_2(r,\ t^2),$$

Φ_1 et Φ_2 désignant des séries entières en r et t^2 : il suffit de traiter d'une manière analogue à la précédente chaque terme des développements ainsi obtenus.

Si l'on veut supposer seulement que les quantités sur lesquelles on opère sont régulières, c'est-à-dire dérivables jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on raisonnera comme au n° **141**, en formant les dérivées successives de l'intégrale (34 *bis*) jusqu'à l'ordre $m_1 - 1$. Il apparaîtra ainsi, par l'emploi de la formule de Taylor, que la quantité

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\Pi}{\gamma^{m_1-1}}\right) = -(m_1 - 1)\frac{\Pi}{\gamma^{m_1}} + \frac{1}{\gamma^{m_1-1}}\frac{d\Pi}{d\gamma},$$

se présente sous la forme de termes en $\frac{1}{\gamma^{m_1}}, \frac{1}{\gamma^{m_1-1}}, \ldots, \frac{1}{\gamma}$ à coefficients constants et de termes finis, augmentée d'un terme en $\log \gamma$ dont le coefficient a pour limite (34), au coefficient numérique $\frac{(-1)^{m_1}}{4} C_{m_1-1}$ près. D'une manière ou de l'autre, on retombe bien sur la formule (29).

Mais on doit constater la notable différence qui, dans l'analyse précédente, paraît séparer les cas de $m = 2$ et de $m \geqslant 4$. Il serait difficile de concevoir que les deux calculs correspondants se ramènent en réalité à une même norme, si l'on ne connaissait les liens qui rattachent l'une à l'autre les fonctions V et $\mathcal{V}$, tels qu'ils apparaissent lorsqu'on déduit le cas de $m = 2m_1$ de celui de $m = 2m_1 + 1$ par voie de « descente ». La méthode de descente se montre donc, en fin de compte, beaucoup moins artificielle qu'elle ne le semblait au premier abord et apparaît comme liée à la nature des choses.

148. L'expression obtenue, dans ce qui précède, pour l'inconnue diffère considérablement, on le voit, de celle qui a été établie pour m impair. Dans cette dernière, la solution élémentaire était introduite directement. Ici, c'est elle qui sert encore de base, mais seulement en tant qu'elle fournit les deux fonctions V et $\mathcal{V}$, lesquelles apparaissent seules dans les calculs à effectuer.

D'un autre côté, la valeur de l'inconnue, pour m pair, apparaît sous la forme d'une somme de deux intégrales, l'une étendue à l'intérieur du conoïde caractéristique, et dont la quantité à intégrer contient en facteur les données elles-mêmes, multipliées par des fonctions connues; l'autre étendue au conoïde caractéristique lui-même, et contenant, dans les mêmes conditions, les données et leurs dérivées

jusqu'à l'ordre ($m_1 - 2$) (ou même $m_1 - 1$). Les intégrales ainsi écrites ne contiennent que des quantités finies, si les données sont régulières.

Dans le cas de m impair, on avait une seule intégrale, comprenant les données elles-mêmes (sans différentiation explicite), mais ayant le caractère paradoxal examiné auparavant, et contenant, dès lors, pour ainsi dire virtuellement, une intégrale de frontière et certaines dérivées des fonctions introduites.

Une telle expression, par conséquent, serait considérée comme intermédiaire entre deux expressions de la classe ci-dessus (les intégrales ordinaires rencontrées dans le cas de m pair) correspondant à deux valeurs consécutives de m_1.

Elle a également, par rapport à u_1 ou à f par exemple, un ordre de continuité qui doit être considéré comme intermédiaire (1) entre de telles valeurs consécutives de m_1.

149. ***Application au principe de Huygens.*** — Les formules ci-dessus nous permettent de donner une réponse à la question fondamentale suivante :

Pour quelles équations le principe de Huygens est-il vrai dans son sens spécial, c'est-à-dire dans son sens (B)?

On sait déjà que de telles équations ne doivent pas être cherchées parmi celles que nous avons examinées au Livre III.

Mais, pour le cas de m pair, on voit maintenant que l'intégrale résiduelle, telle qu'elle est donnée par nos calculs dans le domaine que nous avons appelé T_1' et dans le domaine analogue sur S', dépend exclusivement de la quantité $\mathcal{V}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale résiduelle s'annulle est que la fonction $\mathcal{V}$ *soit*

(1) Ceci est pleinement vérifié par l'application des méthodes particulières au Calcul Fonctionnel, ainsi que cela a été développé dans notre Calcul des variations (nos 243-248) et notablement précisé par MM. Fréchet et M. Riesz (voir notre Mémoire des *Acta Mathematica*, t. XXX, p. 379).

identiquement nulle, c'est-à-dire que la solution élémentaire ne contienne pas de terme logarithmique.

Si tel n'est pas le cas, l'intégrale résiduelle sera différente de o pour des données arbitraires. La question du signe, comme on l'a considéré au n° **112**, peut recevoir une réponse quelconque en raison des valeurs des coefficients de l'équation : car, tout au moins pour $m = 4$, la remarque du n° **65** montre évidemment qu'on peut obtenir n'importe quel signe pour $\mathcal{V}$ par un choix convenable du coefficient C si les autres sont supposés choisis d'avance.

Nous avons dit que nous donnions *une* réponse, et non pas *la* réponse à la question : car il est clair qu'on peut la souhaiter « beaucoup plus résolue » qu'elle ne vient de l'être. On a énoncé la condition nécessaire et suffisante, mais on ignore comment on peut trouver des équations qui la remplissent, ou même s'il en existe aucune en dehors de (e_{2m_1-1}) (ou, naturellement, de celles qui se déduisent de (e_{2m_1-1}) par des transformations évidentes). Ce point, ainsi que beaucoup d'autres questions concernant l'intégrale résiduelle, demanderait des recherches ultérieures.

Quant à la forme finale (C) du principe, elle peut être considérée comme démontrée par nos formules d'intégration, dans le même sens qu'elle l'est, pour (e_3) ou (e_2), par les résultats de Kirchhoff et de Volterra.

2. — Exemples classiques.

150. Il ne sera pas inutile de donner quelques applications des formules générales précédentes, et même de vérifier leur accord avec des résultats connus antérieurement.

Nous avons déjà vu (**146**) comment les choses se passent dans le cas de $m = 2$.

a) ***Formule de Poisson.*** — Vient ensuite celui de $m = 4$ (donnant $m_1 = 2$, $\mathbf{k} = 1$), et l'équation la plus simple de ce type est l'équation (e_3) des ondes sphériques.

On a alors, en désignant par (x, y, z, t) et (x_0, y_0, z_0, t_0) les deux points dont dépend Γ, et prenant $\omega = 1$:

$$\Gamma = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2$$
$$= (t - t_0)^2 - r^2.$$

Il n'y a pas de terme logarithmique dans la solution élémentaire (voir n° **69**), qui se réduit à $\frac{1}{\Gamma}$, de sorte que $\mathcal{V} = 0$, $V = 1$.

Pour cette équation (et, en général, pour $m = 4$, $m_1 - 2$ étant nul), la différentiation par rapport à γ et la considération de la surface auxiliaire $\Gamma = \gamma$ ne se présenteront pas excepté pour les termes considérés au n° **143** [dernière ligne de la formule (29)] et peuvent même être évitées pour ceux-ci, si on les traite comme on l'a fait au n° **144**.

Supposons d'abord que S est l'hyperplan $t = 0$, ce qui est le cas de l'analyse de Poisson. $\frac{d}{d\nu}$ sera $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ (avec $\varepsilon = \pm 1$ d'après la règle déjà employée au n° **129**), et a la valeur 0 pour V, la valeur $-2|t_0|$ pour Γ. L'élément de S (c'est-à-dire l'élément de volume de l'espace ordinaire) étant $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, l'élément $d\sigma_\gamma$, quotient de dS par

$$|d\Gamma| = 2r|dr|,$$

sera $\frac{1}{2} r \sin \theta \, d\theta d\varphi$. Ainsi, le terme en u_1 sera $\left(\text{comme } r = |t_0| \text{ pour } t = \Gamma = 0 \text{ et que } u_1 = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right)$:

$$\mathbf{S}\, V u_1 d\sigma_\gamma = \frac{|t_0|}{2} \iint u_1 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{t_0}{2} \iint \frac{\partial u}{\partial t} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Le terme en u_0 (dans lequel $L = 0$) sera (puisque, pour $\Gamma = 0$, on a $r = t_0 - t$, dont la dérivée par rapport à ν est -1) :

$$\frac{d}{d\nu}\left(\mathbf{S}\, V u_0 d\sigma_\gamma\right) = -\frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{t_0}{2} \iint u_0 \sin \theta d\theta d\varphi\right).$$

La différence de ces deux termes, divisée par 2π [qui est la valeur du coefficient (28 *bis*)], coïncide naturellement avec le second membre de la *formule de Poisson*.

Si l'équation aux dérivées partielles a un second membre $f \neq 0$, donnant le nouveau terme $\mathbf{SS}\, f V d\tau_\gamma$, la valeur de

$$d\tau_\gamma = \frac{dx\, dy\, dz\, dt}{d\gamma}$$

qui y figure se déduit immédiatement de $d\sigma_\gamma$ en multipliant par dt, de sorte que le terme supplémentaire se trouve être (après division par 2π) :

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0} |t_0 - t|\, dt \iint f \sin\theta d\theta d\varphi,$$

où f représente, en l'espèce,

$$f\,[x_0 + (t_0 - t)\sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + (t_0 - t)\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z_0 + (t_0 - t)\cos\theta,\ t].$$

151. b) ***Le cas de Kirchhoff.*** — Considérons maintenant l'hypersurface de Kirchhoff, savoir un hypercylindre que nous désignerons par S″ et dont la base sera une surface (ordinaire) fermée s (l'équation étant encore supposée sans second membre). Le domaine d'intégration peut être, selon la nature de la question, l'intérieur ou l'extérieur du cylindre. Prenons aussi $t_0 > 0$.

En prenant les π respectivement égaux aux cosinus directeurs de la normale n à s (dirigée vers l'intérieur par rapport à notre domaine, qui peut être intérieur ou extérieur par rapport à s) et (pour le quatrième) à zéro, on doit prendre dS″ égal à l'élément de l'hypercylindre $dsdt$; et la direction transversale ν sera opposée à n, les termes en $(x - x_0)^2$ .... étant négatifs.

L'intégration étant relative à l'arête d'intersection σ_0 de S″ avec Γ, $d\sigma_\gamma$ doit être tel que

$$d\sigma_\gamma = ds : \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right) = \frac{ds}{2(t_0 - t)} = \frac{ds}{2r},$$

ces expressions représentant, au facteur $d\gamma$ près, le volume dS″ d'un petit cylindre quelconque (qu'on peut supposer parallèle à l'axe des t) compris, sur S″ entre un élément du conoïde caractéristique et un élément correspondant de la surface avoisinante $\Gamma = \gamma$.

C'est là tout ce qui est nécessaire pour le calcul du n° **142**, puisqu'il ne comporte aucune différentiation par rapport à γ. Pour les opérations du n° **144**, on définit la

correspondance entre x et $x^{(0)}$ de sorte que le segment joignant ces deux points soit parallèle à l'axe des t : en d'autres termes, d'un point x quelconque de σ_0 (qui représente un point de s associé à la valeur $t_0 - r$ pour t), on trace un petit segment $\delta n = - \delta\nu$ normal à S″ qui change r en $\frac{dr}{dn}\delta n$ et accroît t de manière à faire reprendre à Γ sa valeur primitive, par conséquent de la quantité

$$\delta t = - \frac{r}{t_0 - t}\frac{dr}{dn}\delta n.$$

Ceci est l'accroissement qui, donné à t *sur la surface primitive* de l'hypercylindre S″, fait passer du point x au point $x^{(0)}$. Par conséquent, on a :

$$u^{(0)} = u + \delta t \frac{\partial u}{\partial t} = u + \frac{r}{t_0 - t}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u}{\partial t}\delta\nu,$$

$$\frac{dS''^{(0)}}{dS''} = 1 + \frac{r}{(t_0 - t)^2}\frac{dr}{dn}\delta\nu.$$

En substituant ces valeurs dans (26) et observant que, sur le conoïde $\frac{r}{t_0 - t} = 1$, tandis que V est identiquement égal à 1, on obtient, pour l'intégrale (« potentiel retardé ») relative à l'hypercylindre,

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{\overline{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t} + \overline{u}_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right]ds,$$

formule dans laquelle (comme au n° **131**) ds se rapporte à la base du cylindre, pendant que $\overline{u}_0$, $\overline{u}_1$ sont les valeurs de u_0, u_1 aux points correspondants de σ_0, savoir :

$$\overline{u}_i = u_i(x, y, z, t - r) \qquad (i = 0, 1)$$

Ceci coïncide bien avec la formule de Kirchhoff $\left(\text{si on tient compte de ce que } u_1 = \frac{du}{d\nu} = -\frac{du}{dn}\right)$.

152. En thèse générale, l'expression précédente ne donne pas la valeur complète de u_a : car la frontière du domaine

ne peut pas être constituée par le cylindre seul [1]. Si, pour fixer les idées, on la suppose complétée par une portion S′ de l'hyperplan $t = 0$, on doit ajouter des termes relatifs à S′.

Ces termes consistent évidemment en des intégrales sphé riques, comme dans la formule de Poisson; mais il y a une observation indispensable à faire concernant la manière d'évaluer les deux **S** correspondant à (20) dans ce cas, comme dans tout autre cas où S consiste en deux parties se rejoignant sous un angle différent de zéro.

Dans la formule même de Poisson, le terme qui contient u_1 est

$$t_0 \mathbf{M}_{t_0}(u_1) = \frac{t_0}{4\pi} \iint u_1 d\Omega_2,$$

$d\Omega_2 = \sin\theta\, d\theta d\varphi$ étant encore un élément d'angle solide et l'intégration étant étendue à toute la sphère du centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon t_0. Il est clair que, cette fois, on doit écrire la même intégrale avec la seule différence qu'elle se limite à la portion de sphère qui est comprise dans le domaine. Ceci est évidemment valable aussi pour le premier terme M (u_0) de la dérivée $\frac{d}{dt_0}\left[t_0 \mathrm{M}_{t_0}(u_0)\right]$. Quant à la partie restante de la dérivée $\Big($en faisant abstraction du facteur $\frac{1}{4\pi} t_0\Big)$, elle peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \iint u_0 d\Omega_2, \tag{35}$$

ou $\Big(\frac{d}{dr}$ désignant la dérivée radiale, ou dérivée relative à la normale extérieure à la sphère$\Big)$

$$\iint \frac{du_0}{dr}\, d\Omega_2, \tag{35 bis}$$

qui sont équivalentes l'une à l'autre.

---

(1) Dans la théorie de Kirchhoff sous sa forme classique, la frontière est complétée par une portion de l'hyperplan $t = -\mathrm{T}$ (avec T positif très grand), sur laquelle on suppose toutes les données nulles. On est ainsi dispensé d'écrire un terme complémentaire.

Mais pour le problème actuel, les deux formes ci-dessus *ne sont plus* équivalentes. Si, pour prendre un cas déterminé, on prend pour s le plan $x = 0$, le domaine étant du côté positif, et si on désigne par $\mathfrak{M}_0(x, \rho)$ la valeur moyenne de la fonction u_0 le long de la circonférence de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon ρ, son plan étant parallèle à $x = 0$, savoir

$$(36) \quad \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0(x, \rho)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x, y_0 + \rho \cos \varphi, z_0 + \rho \sin \varphi) \, d\varphi,$$

M_{t_0} sera remplacé, dans le cas actuel, par

$$\frac{1}{2} \int \mathfrak{M}_0(x_0 - t_0 \cos \theta, t_0 \sin \theta) \sin \theta \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\lambda_0} \mathfrak{M}_0(x_0 - \lambda t_0, t_0 \sqrt{1 - \lambda^2}) \, d\lambda,$$

où λ représente $\cos \theta$, la limite supérieure (qui était $+1$ dans le cas de la formule primitive de Poisson) étant, cette fois,

$$\lambda_0 = \frac{x_0}{t_0}.$$

On obtiendra (35 *bis*) si on remplace, sous le signe $\int$ $\mathfrak{M}_0$ par

$$(36') \quad \frac{d\mathfrak{M}_0}{dt_0} = -\lambda \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial x} + \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial \rho}.$$

Ceci n'est plus égal à la dérivée (35) : il manque le terme

$$(37) \quad -\frac{1}{2} \frac{x_0}{t_0^2} \mathfrak{M}_0\left(0, \sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right)$$

correspondant au fait que λ_0 est une fonction de t_0.

Laquelle des deux expressions (35) ou (35 *bis*) doit-on introduire dans la formule? On aura facilement la réponse si on se rappelle que le terme en question est dû à la quantité (20) du n° **143**.

Or, si on suppose que S (représenté par une ligne brisée sur la figure 29) se compose de deux parties $\bar{S}$ et $\bar{\bar{S}}$ se

rencontrant sous un certain angle, il est clair que l'intégrale correspondante (20) doit être prise sur chacune d'elles séparément, par la méthode du n° **143** ou du n° **144**; et, pour ce dernier, aucun déplacement du contour de $\bar{S}$, quand ν varie, n'aura à se produire en raison de la présence de $\bar{\bar{S}}$, de sorte que, partout ailleurs que sur Γ, les contours de $\bar{S}$ et de $\bar{S}_\nu$ devront se correspondre l'un à l'autre par projection transversale, le S_ν total devant se construire comme on l'a représenté (fig. 29) par des lignes pointillées. Ainsi, aucun terme aux limites n'aura à correspondre à l'arête commune de $\bar{S}$ et $\bar{\bar{S}}$ (comme cela apparaîtrait aussi par simple application du n° **143**).

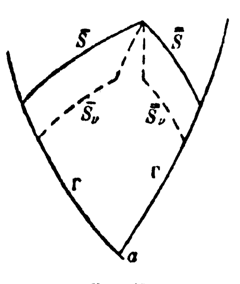


Fig. 29.

Par conséquent, dans le problème particulier ci-dessus considéré, le terme (37) ne doit *pas* être introduit. Le véritable terme en u_0 contient (35 *bis*) et non pas (35) et la formule complète est :

$$(38)\quad 4\,\pi u_a = \left[t_0 \iint \left(u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial r}\right) \sin\theta d\theta d\varphi + \iint u_0 \sin\theta d\theta d\varphi\right]$$

$$+ \left[\iint \left(\frac{\bar{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) ds\right]$$

où les intégrales du premier crochet sont prises pour $t = 0$, sur une portion de sphère comprise dans le domaine donné, tandis que l'intégrale du second crochet est un potentiel retardé relatif à σ_0.

153. Remarques. — *La quantité* (38) *est solution de l'équation aux dérivées partielles.* D'une manière générale, cette propriété appartient aux expressions (29)-(29 *ter*) calculées dans ce qui précède, même si la frontière admet des arêtes anguleuses telles que celles que nous venons de considérer. Il

y a plus : elle ne suppose aucune condition de concordance, le long de l'arête, entre les données relatives aux deux parties de S; pour l'expression (38), par exemple, elle ne suppose pas que les valeurs de u ou de sa dérivée normale, calculées le long de s et pour $t = 0$ à l'aide des données relatives à l'hypercylindre, coïncident avec celles que fournissent les données de Poisson relatives à $t = 0$. Elle subsisterait, de même, si ces données étaient affectées de n'importe quelles discontinuités de première espèce (en nombre fini).

En effet, le raisonnement du n° **115** (Liv. III), relatif à m impair, subsiste si on limite l'hypersurface S par une arête fixe quelconque et qu'on convienne de n'étendre les intégrales **SS** qu'à la portion de S_0 ainsi limitée; d'autre part, une variété S à arêtes anguleuses, ou le long de laquelle les données présenteraient une discontinuité de première espèce, pourrait évidemment être considérée comme un système de variétés limitées à la manière qui vient d'être supposée. Enfin, la propriété ainsi établie pour m impair s'étend d'elle-même à m pair par voie de descente, puisqu'on peut ainsi regarder les deux problèmes comme équivalents.

En ce qui concerne les conditions définies, la question ne se pose pas. Il est clair :

que, pour celles qui sont relatives à $t = 0$, elle n'est pas autre que dans le cas de Poisson, la formule (38) se réduisant à la formule de Poisson au voisinage de $t = 0$;

que, par contre, celles qui sont relatives à l'hypercylindre ne sont pas vérifiées en général : nous savons que le problème n'est pas correctement posé.

154. c) ***L'équation des ondes sphériques amorties.*** — L'équation

$$(E_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Ku = 0$$

a été étudiée dans les travaux de MM. Birkeland, Carvallo,

Weber, Brillouin (¹), et plus tard dans plusieurs notes de M. Tedone (²). En comparant cette équation à la précédente (e_3), on voit que Γ sera le même, et on peut encore prendre V = 1, comme on l'a remarqué au Livre II (n° **69**), de sorte qu'on doit inscrire les mêmes termes que dans les calculs précédents (n^{os} **151-153**), avec, en plus, un terme en $\mathcal{V}$ de la formule (28), où [la solution élémentaire étant donnée par la formule (61 *bis*), n° **69**] on a :

$$\mathcal{V} = -\frac{K}{4} j'\left[K\frac{(t-t_0)^2-r^2}{4}\right],$$

$j(\lambda)$ désignant toujours

$$\left[1+\frac{\lambda}{1^2}+\frac{\lambda^2}{(2!)^2}+\ldots+\frac{\lambda^h}{(h!)^2}+\ldots\right]$$

Si S est l'hyperplan $t = 0$, la formule sera $\left(\text{en remarquant que } \frac{d}{d\nu}=\frac{\partial}{\partial t} \text{ est, dans ce cas, égal à } -\frac{\partial}{\partial t_0}\right)$

$$(39)\qquad u_a = \frac{\partial}{\partial t_0}\left[t_0\, M_{t_0}(u_0)\right] + t_0\, M_{t_0}(u_1) + \frac{K}{2}\int_0^{t_0} r^2 M_r(u_1)\, j' dr + \frac{K}{2}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_0^{t_0} r^2 M_r(u_0)\, j' dr,$$

où le symbole M a la même signification que précédemment, et où l'argument qui figure dans j' est $K\,\frac{t_0^2-r^2}{4}\cdot$ L'identité de ce résultat avec la conclusion des ouvrages cités (par exemple, Weber ou Brillouin) se vérifie sans aucune difficulté.

Quand S consiste en une portion de $t = 0$ (c'est-à-dire d'espace ordinaire) limitée par une surface s, et en un

(1) Birkeland, *C. R. Ac. Sc.*, t. CXX (1895), p. 1046; Carvallo, *ibid.*, 14 janvier 1895; Weber, dans *Partielle Differentialgleichungen der Math. Physik*, t. II, édition de 1901, p. 310; Brillouin, *C. R. Ac. Sc.*, t. XXXVI, 1903, p. 667.

(2) *Rendic. Acc. Lincei*, 5e série, t. XXII (1913, 1er semestre), p. 757; t. XXIII (1914, 1er semestre), p. 63, 120, 473.

hypercylindre de base s (voir Brillouin, *loc. cit.*) les termes (38) doivent être complétés par les suivants (l'argument de j étant ici $\left.\frac{(t-t_0)^2-r^2}{4}\right)$:

$$\frac{K}{2}\iiint u_1 j' dx dy dz + \frac{K}{2}\frac{\partial}{\partial t_0}\iiint u_0 j' dx dy dz$$
$$+\frac{K}{2}\iint \bar{u}_0 \frac{dr}{d\nu} ds$$
$$-\frac{K}{2}\iint ds\left[\frac{dr}{d\nu}\int_0^{t_0-r} u_0 \frac{\partial j'}{\partial r} dt - \int_0^{t_0-r} u_1 j' dt\right].$$

Les deux premiers termes ne diffèrent des termes de l'intégrale correspondante (39) (au facteur 4π près) que par le fait que

$$\mathrm{M}_r(u_i)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint u_i\,(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\, y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\, z_0+r\cos\theta)\,\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint u_i d\Omega_2 \qquad (i=0,1)$$

est remplacé par une intégrale étendue seulement à une partie de la sphère correspondante, comme au n° précédent. Le second terme, par exemple, peut s'écrire

$$\frac{K}{2}t_0^2\iint u_0 d\Omega_2 + \frac{K}{2}\int_0^{t_0} r^2\frac{\partial j'}{\partial t_0} dr\iint u_0 d\Omega_2,$$

les intégrales doubles se rapportant à de telles portions de sphères.

Pour une forme arbitraire de S, cas que M. Tedone a aussi considéré [1], la formule est :

$$2\pi u_a = \frac{K}{4}\left(\iiint_{S_0} u_1 j_0' dS - \frac{d}{d\nu}\iiint_{S_\nu} u_0 j'_0 dS\right)$$
$$+\iint_\sigma u_1 d\sigma_\gamma - \frac{d}{d\nu}\iint_{\sigma_\nu} u_0\, d\sigma_\gamma\,;$$

le calcul du dernier terme doit se faire comme on l'a établi au n° **153**, dans le cas où S aurait des arêtes vives.

---

(1) Les résultats de M. Tedone ont une apparence tout à fait différente au premier abord [une transformation convenable étant même nécessaire

155. d) ***Equations à un plus grand nombre de variables.*** — Les équations du même type à 6, 8 .... variables seront traitées de la même manière par application de la formule (29), ou (29 *bis*).

Prenons simplement l'équation des « ondes hyper sphériques » (ordinaires) :

$$\left(e_{2m_1-1}\right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2{}_{2m_1-1}} = 0$$

et supposons que S est l'hyperplan $t = 0$, avec $t_0 > 0$. Comme V est encore égal à 1 et $\mathcal{V}$ à o, on trouve la même simplification que précédemment. $d\sigma_\gamma$ est donné par

$$d\sigma_\gamma = \frac{dS}{|d\gamma|} = \frac{r^{2m_1-2} d\Omega_{m-2} dr}{2r\, dr} = \frac{1}{2} r^{2m_1-3}\, d\Omega_{m-2},$$

$d\Omega_{m-2}$ désignant un élément de la surface hypersphérique de rayon 1. Comme $d\gamma = -2rdr$, on voit que le facteur $(-1)^{m_1}$ est ainsi détruit et que [1]

$$(40) \qquad 4\,\pi^{m_1-1} u_a = \left(\frac{d}{2t_0 dt_0}\right)^{m_1-2} \left(t_0{}^{2m_1-3} \iint_{r=t_0} u_1 d\Omega_{m-2}\right) + \frac{d}{dt_0}\left(\frac{d}{2t_0 dt_0}\right)^{m_1-2}\left(t_0{}^{2m_1-3}\iint_{r=t_0} u_0 d\Omega_{m-2}\right).$$

---

pour trouver la formule (39) à laquelle arrive Weber] et s'obtiennent par une méthode très différente, impliquant la résolution de certaines équations intégrales. Ceci est dû, exactement comme dans le cas de M. Coulon (V. Livre III, n° 79), à l'impossibilité, qu'on voit maintenant être plus radicale même que pour m impair, d'introduire directement la solution élémentaire, de sorte qu'on doit employer à sa place des substitutions plus ou moins indirectes. Cette nécessité, d'un autre côté, n'est pas dépourvue d'avantages, car elle donne lieu à des identités intégrales suggestives concernant les fonctions de Bessel : sujet qui se relie à certaines conséquences de ce que nous avons appelé la « proposition A » au Livre II, n° 33.

(1) Pour employer l'expression (29 *bis*), il est nécessaire, cette fois, que la différentiation

$$\frac{d}{dv}\left(= \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{d}{dt_0}\right)$$

soit faite en dernier, puisqu'elle doit s'appliquer au dénominateur $\frac{d}{2t_0\, dt_0}$.

Si $M_1(r)$ désigne la valeur moyenne de u_1 sur la surface hypersphérique de rayon r, on peut écrire :

$$(40') \qquad \frac{4\pi^{m_1-1}}{\Omega_{m-2}} u_a = \left(\frac{d}{2t_0 dt_0}\right)^{m_1-2} [t_0^{2m_1-3} M_1(t_0)] + \frac{d}{dt_0}\left(\frac{d}{2t_0 dt_0}\right)^{m_1-2} [t_0^{2m_1-3} M_0(t_0)].$$

La solution obtenue par M. Tedone en 1898 (*Annali di Mat.*, *loc. cit.*) est d'apparence différente, le terme en u_1, par exemple, étant

$$(41) \qquad \sum_{h=0}^{m_1-2} A_h \frac{d^{m_1-2-h}}{dr^{m_1-2-h}} [r^{m_1-1-h} M_1(r)]_{(r=t_0)},$$

où les A sont des constantes numériques. Il est évident, par simple examen, que

$$\left(\frac{d}{2rdr}\right)^{m_1-2} [r^{2m_1-3} M_1(r)]$$

est de la forme ci-dessus : les A peuvent être considérés comme définis par la relation, identique en λ,

$$(41') \quad \Pi(\lambda) = \frac{1}{2^{m_1-2}} (\lambda+3)(\lambda+5) \ldots (\lambda+2m_1-3)$$
$$= A_0(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots(\lambda+m_1-1)+\ldots$$
$$+ A_h(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots(\lambda+m_1-h-1)+\ldots$$
$$+ A_{m_1-3}(\lambda+2) + A_{m_1-2},$$

comme on le voit en posant $M_1(r) = r^\lambda$ et en observant, d'un autre côté, qu'une telle identité en λ peut s'écrire d'une manière et d'une seule. Une méthode simple pour la détermination [1] des constantes A_h consiste à représenter le premier membre $\Pi(\lambda)$ de l'égalité précédente par l'intégrale de contour

$$\Pi(\lambda) = \frac{(m_1-2)!}{2i\pi} \int_C \frac{(1-z)^{-\frac{\lambda+3}{2}}}{z^{m_1-1}} dz$$

---

(1) Cette détermination pourrait sans doute se déduire également de la théorie de l'interpolation [le dernier membre de (41') se ramenant immédiatement à un polynôme de Newton] ou de la théorie des séries de facultés.

(intégration le long d'une ligne fermée autour de l'origine, comme d'ordinaire). Si on pose

$$1 - z = (1 - Z)^2 \qquad \text{d'où : } z = 2Z - Z^2,$$

cette intégrale devient (le nouveau chemin d'intégration C′ entourant l'origine de la même manière que C)

$$\Pi(\lambda) = \frac{(m_1 - 2)!}{2i\pi} \int_{C'} \frac{(1 - Z)^{-(\lambda+2)} dZ}{2^{m_1-2} Z^{m_1-1} \left(1 - \frac{Z}{2}\right)^{m_1-1}},$$

ou, finalement, en développant $\left(1 - \frac{Z}{2}\right)^{-(m_1-1)}$ ainsi que $(1 - Z)^{-(\lambda+2)}$ suivant les puissances de Z et en ne retenant que les termes en $\frac{1}{Z}$ dans la quantité à intégrer :

$$\Pi(\lambda) = \sum \frac{(m_1 - 2 + h)!}{2^{m_1-2+h} h!(m_1 - 2 - h)!} (\lambda + 2) \ldots (\lambda + m_1 - h - 1),$$

de sorte que les coefficients A_h qu'on doit substituer dans (41) sont

$$A_h = \frac{(m_1 - 2 + h)!}{2^{m_1-2+h} h!(m_1 - 2 - h)!},$$

Naturellement, les termes en u_0 se déduisent de ce qui précède en écrivant $\left(\frac{d}{dr}\right)^{m_1-1-h}$ au lieu de $\left(\frac{d}{dr}\right)^{m_1-2-h}$ et ceci donne [en tenant compte du coefficient du premier membre de (40)] la forme donnée au résultat par M. Tedone [*loc. cit.*, formule (24)].

3. — Un type de problème mixte. Application à la possibilité du problème de Cauchy.

156. Reprenons la formule (38), n° **152**. Elle nous permet de trouver une solution u de (e_2), en supposant qu'on connaisse les données de Cauchy à la fois pour $t = 0$ et pour $x = 0$.

Mais nous savons qu'un tel problème n'est pas correctement posé. Pour satisfaire à cette condition, on doit le remplacer, comme nous l'avons déjà dit au Livre I, par un *problème mixte*.

Nous reviendrons, à la fin de l'ouvrage [1] sur cette catégorie de questions. Mais nous devons noter dès à présent, à leur égard, une remarque générale. La résolution de tout problème mixte, relatif à deux hypersurfaces S′ et S″ dont la première, orientée dans l'espace, porte des données de Cauchy, la seconde (orientée dans le temps) la donnée de la seule valeur de u, et qui comprennent entre elles une caractéristique $\mathcal{C}$ passant par leur arête d'intersection s, se compose en réalité de deux parties : tout d'abord la détermination de la solution dans la région 1 comprise entre S′ et $\mathcal{C}$, ce qui est purement et simplement le problème de Cauchy; puis le calcul, dans la région 2 comprise entre $\mathcal{C}$ et S″, de cette même solution, déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{C}$ (celles que fournit l'opération précédente) et par ses valeurs sur S″. Ce dernier problème est celui qui a été examiné (du moins dans le cas des données analytiques) au n° **51** et auquel le problème mixte est, on le voit, équivalent, une fois le problème de Cauchy préalablement résolu.

Toutefois, la fonction cherchée u, ainsi déterminée par ces deux opérations différentes, n'admettra des dérivées jusqu'à un certain ordre continues au passage de $\mathcal{C}$ que si les deux fonctions qui la représentent dans 1 et dans 2 respectivement ont entre elles un contact de cet ordre en tous les points de $\mathcal{C}$. D'après ce qui a été dit au n° **28** (Livre II), c'est ce qui devra avoir lieu au moins pour l'ordre un.

Les remarques du n° ***51 bis*** permettent de simplifier notablement l'étude de cette concordance. D'après ces remarques, il suffira qu'elle ait lieu en un point de chaque bicaractéristique située sur $\mathcal{C}$ et, en particulier, en chaque point de l'arête d'intersection s dont la caractéristique $\mathcal{C}$ est issue, puisque (dans les applications) cette arête n'est tangente à aucune bicaractéristique. Or, c'est ce dont on peut s'assurer par l'examen des données mêmes de la question, ainsi que nous allons le faire dans le cas simple auquel nous nous bornerons ici.

---

(1) V. Appendice II.

Ce cas est celui de la frontière plane [1], qui relève d'une méthode appartenant à la catégorie ci-dessus mentionnée, à savoir de la méthode des images, classique en théorie du potentiel. L'artifice s'applique aussi bien à (e_2) qu'à (e_3) : développons-la pour cette dernière équation [dont la théorie ainsi qu'on le sait, implique celle de (e_2)]. Le problème consiste à trouver la quantité u déterminée par l'équation

$$(e_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

et par les conditions définies

$$(C_3) \qquad u = u_0(x, y, z); \ \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x, y, z) \qquad (\text{pour } t = 0, \ x \geqslant 0),$$

$$(\mathbf{C}_3) \qquad u = \mathbf{u}(y, z, t); \qquad (\text{pour } x = 0, \ t \geqslant 0),$$

étant bien entendu que les quantités données des seconds membres satisfont aux conditions

$$(42) \qquad u_0(0, y, z) = \mathbf{u}(y, z, 0),$$

$$(43) \qquad u_1(0, y, z) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(y, z, 0).$$

Si le demi-conoïde rétrograde de sommet a, limité à $t = 0$, ne rencontre pas $x = 0$, u est donné par la formule de Poisson.

Dans le cas contraire, si on connaissait les valeurs de $\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}$ le long de $x = 0$, le problème serait résolu par la formule (38), ou encore

$$(44) \qquad 4\pi u_a = I_1 + I_2,$$

où I_1 est la première ligne du second membre de (38), constituée par une partie de chacune des intégrales de Poisson

---

(1) Contrairement au problème de Cauchy, le problème mixte fait intervenir d'une façon très profonde la forme de la frontière (nous avons en vue la partie de la frontière qui ne porte pas les données de Cauchy). Ainsi, pour le cas de deux variables indépendantes, le problème du câble électrique à contact glissant (n° **24** *bis*) demandera des calculs très différents suivant les différentes lois de mouvement du contact.

(savoir la partie relative à la partie $\overline{\sigma}$ de la sphère σ de rayon t_0 qui est du côté positif de $x = 0$), et où I_2 est l'intégrale de Kirchhoff le long de $x = 0$

$$I_2 = \iint \left(\frac{\overline{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dn}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds,$$

$\overline{u}_1$ étant égal à $\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}$ et le surligné ayant le même sens qu'au n° **151**.

Il reste à éliminer ces valeurs de $\overline{u}_1$ dans la dernière intégrale. C'est ce qu'on obtient en introduisant le point $a'(-x_0, y_0, z_0)$ symétrique de a par rapport à $x = 0$. Soit Γ' la partie du conoïde caractéristique correspondant (demi-conoïde rétrograde de sommet a') qui est dans la région

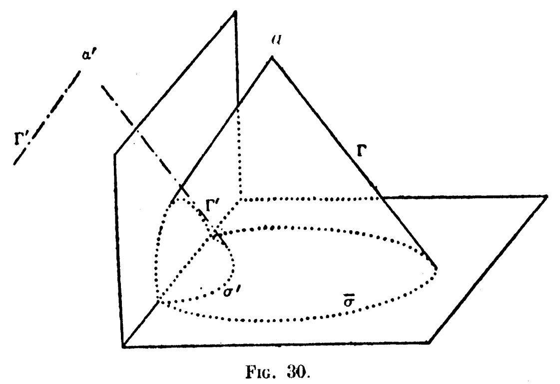


Fig. 30.

utile $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$; soit σ' (fig. 30) la trace de Γ' sur $t = 0$ (portion de surface sphérique dans l'espace ordinaire) (1). La somme

$$I_1' + I_2' = I_1' + \iint \left(\frac{\overline{u}_1}{r'} - \frac{1}{r'}\,\frac{dr'}{dn}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\,\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \right) ds$$

analogue au second membre de (44), mais pour laquelle on

(1) La figure correspondante (fig. 29) [qui serait la figure complète pour (e_2)] représente la projection de la vraie figure à quatre dimensions sur l'espace (x, y, t).

part du point a' au lieu de a — de sorte qu'on introduit

$$r' = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

au lieu de r — et où, de plus, I_1' se rapporte à σ' et non plus à $\overline{\sigma}$, *est nulle*, car le domaine d'intégration correspondant ne comprend pas le sommet a' (voir n° **146**). Une telle somme peut donc être retranchée de (44), et cette combinaison :

$$u = I_1 + I_2 - I_1' - I_2',$$

est celle que nous cherchons. Car, les valeurs de r et de r' étant égales entre elles en chaque point de $x = 0$, les termes en u_1 disparaissent dans la différence $I_2 - I_2'$.

Les autres termes de $I_2 - I_2'$ se doublent l'un l'autre, puisque les valeurs de $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ et $\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}$ prises le long de $x = 0$ sont opposées : de sorte que [1]

$$u_a = \frac{1}{4\pi}(I_1 - I_1') + \frac{1}{2\pi} J_2, \tag{45}$$

$$J_2 = \iint \left(-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial t} + \overline{\mathrm{u}}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds.$$

$I_1 - I_1'$ est une intégrale double relative à un système de deux calottes sphériques. Elle peut s'exprimer plus simplement en supposant fictivement que les valeurs de u et u_1 du côté négatif du plan $t = 0$ (c'est-à-dire relatives à $t = 0$, $x < 0$) sont respectivement opposées aux valeurs correspondantes du côté positif, savoir :

$$u_i(-x, y, z) = -u_i(x, y, z) \qquad (i = 0, 1), \tag{46}$$

(1) Tout plan S″ orienté dans le temps peut être étudié de la même manière (qu'il soit normal ou oblique à $t = 0$), car on sait que (e_3) peut être transformé en lui-même par une transformation linéaire en x, y, z, t telle que S″ devienne parallèle au nouvel axe des t. Dans l'espace non-transformé, le cône Γ′ aura avec S″ la même intersection que Γ, la ligne qui joint les deux sommets étant transversale à S″ et divisée par S″ en deux parties égales.

Mentionnons d'un mot les remarques importantes de M. Volterra (*London Proceedings*, 1904, et conférences de Stockholm) sur la manière toute particulière dont se comporte cette méthode des images dans le cas hperbolique (V. App. II).

moyennant quoi $I_1 - I_1'$ s'exprime par des intégrales doubles étendues à toute la surface de la sphère σ, et tout à fait semblables au second membre de la formule de Poisson.

Remarques. — La solution précédente est, conformément à ce que nous avons noté un peu plus haut, donnée par deux expressions analytiques différentes suivant que l'on est d'un côté ou de l'autre de l'hyperplan $x = t$, c'est-à-dire de la caractéristique $\mathcal{C}$ (intérieure au domaine dans lequel nous opérons) menée par l'arête commune aux deux parties $x = 0$, $t = 0$ de la frontière qui porte les données.

Dans la seconde de ces expressions, d'après (46), les valeurs de u_0 et de u_1 introduites sous le signe d'intégration sont discontinues le long de l'arête si elles ne s'y annulent pas. Par contre, en vertu de la même relation, la continuité n'est pas rompue en ce qui regarde les valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x}$.

157. La vérification de cette solution est, comme toujours, nécessaire.

Il n'y a plus aucune difficulté en ce qui concerne l'équation aux dérivées partielles : car elle est vérifiée (Cf. **153**) par $I_1 + I_2$, et aussi (puisque l'équation ne change pas lorsqu'on change x en $-x$) par $I_1' + I_2'$.

Quant aux conditions de Cauchy, il n'y a, nous l'avons vu également, aucune différence entre le cas actuel et celui de Poisson.

Supposons maintenant que le point (x_0, y_0, z_0, t_0) atteigne le plan $x = 0$. Les termes $I_1 - I_1'$ du type de Poisson disparaissent, comme devenant exactement égaux au signe près. Le terme

$$2\iint \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dn}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\omega,$$

dans lequel $\frac{dr}{dn}$ est fini, se comporte comme le potentiel d'une simple couche : il est, par conséquent, continu et prend la valeur 0; le terme restant

$$2\iint u\,\frac{d\,\frac{1}{r}}{dn}\,ds$$

se comporte comme le potentiel d'une double couche, et devient donc (la quantité à intégrer étant identiquement nulle quand s prend sa position limite P, comme il est bien connu) égal à $4\pi u_P$: c'est donc aussi la valeur limite de $4\pi u_a$.

La même vérification se fait encore aisément en introduisant, dans le calcul de J_2, une notation analogue à celle du n° **152** et relative à la frontière $t = 0$. On construira, avec les valeurs de u, la valeur moyenne

$$\mathfrak{N}(t,\rho) = \mathfrak{N}(y_0, z_0, t, \rho)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{u}\,(y_0 + \rho\cos\varphi,\ z_0 + \rho\sin\varphi,\ t)\, d\varphi$$

de $\mathrm{u}(y, z, t)$ le long de la circonférence de centre (y_0, z_0, t) et de rayon ρ, valeur qui, moyennant les formules de concordance (42), (43), vérifiera les relations

$$\mathfrak{N}(0,\rho) = \mathfrak{M}_0(0,\rho), \qquad \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}(0,\rho) = \mathfrak{M}_1(0,\rho);$$

à l'aide de cette quantité $\mathfrak{N}$, le terme $\frac{1}{2\pi} J_2$ s'exprimera par la formule

$$(47) \quad \frac{1}{2\pi} J_2 = \int_{\lambda_0}^{1} \left[\mathfrak{N}\left(t_0 - \frac{x_0}{\lambda}, \frac{x_0\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right) + \frac{x_0}{\lambda} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} \right] d\lambda$$

avec $\lambda_0 = \frac{x_0}{t_0}$.

On peut chasser de cette expression la dérivée partielle $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ en introduisant la dérivée totale

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\lambda} = \frac{x_0}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^2\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \rho},$$

et remarquant, d'autre part, que chacune des valeurs moyennes $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}$ est, par sa nature même, paire en ρ, de sorte que cette valeur moyenne s'exprimera et sera dérivable (au moins une fois, comme on le voit aisément à l'aide de la formule de Taylor, si u_t ou u admet des dérivées premières et secondes continues) en fonction de $\rho^2 = R$, même pour $R = 0$, et qu'on pourra écrire la relation précédente

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\lambda} = \frac{x_0}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} - \frac{2x_0^2}{\lambda^3} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R}.$$

Si nous tirons $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ de cette relation pour le porter dans (47), la dérivée totale de $(\lambda\mathfrak{N})$ est mise en évidence et il vient, en remarquant que $\mathfrak{N}(t, o) = \mathbf{u}(y_0, z_0, t)$:

$$\frac{1}{2\pi} J_2 = (\lambda\mathfrak{N})_{\lambda_0}^{1} + 2x_0^2 \int_{\lambda_0}^{1} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R} d\lambda$$

$$= \mathbf{u}(y_0, z_0, t_0 - x_0) - \frac{x_0}{t_0} \mathfrak{N}\left(o, \sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right)$$

$$+ 2x_0^2 \int_{\lambda_0}^{1} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R} d\lambda,$$

expression qui se réduit bien à $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}(y_0, z_0, t_0)$ lorsque x_0 s'annule [1], étant donné que le dernier terme est inférieur en valeur absolue à

$$\frac{2x_0^2 N'}{\lambda_0} = 2\, x_0 t_0 N',$$

en désignant par N' une borne supérieure de la valeur absolue de la dérivée $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R}$.

Quand au terme $I_1 - I_1'$, il disparaît, comme il a été dit plus haut.

Remarque. — Une conclusion analogue s'applique à $\frac{\partial u}{\partial t_0}$, ainsi que nous aurons besoin de le noter dans un instant : autrement dit, cette quantité tend vers $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0}$ lorsque x_0 tend vers zéro. En effet, la quantité $\frac{\partial I_1}{\partial t_0} - \frac{\partial I_1'}{\partial t_0}$ s'annulera, dans ces conditions, pour la même raison que $I_1 - I_1'$; et, dans les termes relatifs à la paroi orientée dans le temps, tout se passera, à des termes près (intégrales curvilignes prises le long de cercles sur l'arête $x = t = o$) qui sont nuls avec x_0, comme si $\mathbf{u}$ était remplacé par $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

---

(1) Il faudrait (cf. **29**) considérer à part le cas où t_0 tendrait vers zéro en même temps que x_0 : la limite de l'expression obtenue dans le texte dépendrait alors de celle du rapport $\frac{x_0}{t_0}$. La conclusion énoncée subsisterait cependant, mais seulement, cette fois, grâce à l'intervention des termes en $M_{t_0}(u_i)$, dont la valeur limite, comme il résulte de la formule (49) ci-après, dépendrait alors également de celle de λ_0.

157 bis. La démonstration est complète en apparence. En réalité, nous savons qu'il n'en est rien. Il faut s'assurer (Cf. **28**) que u et ses dérivées premières sont continues sur l'hyperplan $x = t$, qui est la caractéristique menée par l'arête commune s aux deux parties de S : sans quoi on aurait construit une solution vérifiant (C_3) et une solution vérifiant ($\mathbf{C}_3$), mais l'ensemble des deux fonctions ainsi construites ne devrait pas être regardée comme *une* solution vérifiant les diverses conditions du problème.

Mais cette question est résolue par les remarques du n° **153**. Si la concordance existe pour u lui-même, nous savons qu'en ce qui regarde les dérivées premières, il suffit (**51** *bis*) de la vérifier pour $x = t = 0$. Encore suffit-il, en ce qui regarde ces dérivées, de considérer *l'une* d'entre elles, par exemple $\frac{\partial u}{\partial t_0}$, puisque la concordance des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial y_0}$, $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ résulte de celle des valeurs de u et que (Cf. Liv. I et *Leçons sur la propagation des ondes*, Liv. II, n° **72**), la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ tant dans 1 que dans 2, est liée à celles de u et de $\frac{\partial u}{\partial t_0}$ par la relation

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_0}\,dx_0 + \frac{\partial u}{\partial t_0}\,dt_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0}\,dy_0 + \frac{\partial u}{\partial z_0}\,dz_0$$

pour tout déplacement effectué sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire pour $dx_0 = dt_0$.

Or, pour les mêmes raisons qu'au Livre II, n° **29**, la continuité de u est évidente (1). D'autre part, il résulte du n° précédent que la valeur de $\frac{\partial u}{\partial t}$ prise dans la région 2 n'est autre que la valeur correspondante de $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}$, tandis que dans la région 1, elle est celle de u_1; et nous avons admis entre elles la relation de concordance (43)

(1) Ici encore, il faut mettre à part le cas d'un point pris sur l'arête elle-même, et où (Cf. Livre II, *loc. cit.*) la concordance résulterait de celle des données elles-mêmes, exprimée par la relation (42).

La vérification directe est encore aisée à l'aide des notations introduites ci-dessus. Dans la région 1 qui correspond à $x > t$, les intégrales $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ font connaître $M_{t_0}(u_0)$ et $M_{t_0}(u_1)$ par les expressions

$$(48)\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathfrak{M}_0(x_0 - \lambda t_0,\ t_0\sqrt{1-\lambda^2})\,d\lambda,\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathfrak{M}_1(\quad)\,d\lambda,$$

et

$$M_{t_0}\left(\frac{du_0}{dr}\right), \quad \text{par} \quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mathfrak{M}_0}{dt_0}\,d\lambda,$$

où $\dfrac{d\mathfrak{M}_0}{dt_0}$ est donné par l'expression (33), n° **153**.

Dans la région $2\,(x \leqslant t)$, les quantités $M_{t_0}(u_i)$ $(i = 0,1)$ seront, en tenant compte de notre distribution fictive pour les valeurs négatives de x (et avec la signification précédemment indiquée de λ_0) :

$$(49)\qquad \overline{M}_{t_0}(u_i) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{\lambda_0} \mathfrak{M}_i(\qquad)\,d\lambda\right.$$
$$\left. - \int_{\lambda_0}^{+1} \mathfrak{M}_i(\lambda t_0 - x_0,\ t_0\sqrt{1-\lambda^2})\,d\lambda.\right.$$

La quantité $M_{t_0}\left(\dfrac{du_0}{dr}\right)$ se composera également de deux intégrales prises l'une de -1 à λ_0 et l'autre (soustractive) de λ_0 à 1. Mais dans cette dernière, le premier argument qui figure dans la fonction $\mathfrak{M}_0$ étant $x = \lambda t_0 - x_0$, l'expression de la dérivée diffère de (35 *bis*) par le changement de signe du premier terme; on a, dès lors,

$$(50)\qquad \overline{M}_{t_0}\left(\frac{du_0}{dr}\right) = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial x}\,d\lambda\right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{\lambda_0}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial\rho}\,d\lambda - \int_{\lambda_0}^{1}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial\rho}\,d\lambda\right],$$

et la première intégrale portera sur une quantité continue dans tout l'intervalle d'intégration (quoiqu'ayant deux expressions différentes dans les deux parties de cet intervalle, conformément à ce qui a été dit au n° **156**, Rem.).

J_2 se calcule par la formule (47). Chacun des termes ainsi calculés et leurs dérivées premières seront continues dans 2 comme dans 1. Au passage de 1 à 2, λ_0 passant par la valeur 1, la

continuité de u subsiste, les termes nouveaux qui y apparaissent (savoir des intégrales de λ_0 à 1) commençant par être infinitésimaux (Cf. **29**).

Dans les expressions des dérivées premières s'introduisent au contraire les intégrales curvilignes dont nous avons parlé au n° **29**, et qui ne sont, ici, autre chose que les termes qui, dans la différentiation de (49), correspondent à la variabilité de la limite d'intégration λ_0, termes qui se doublent l'un l'autre. Les moyennes $\mathfrak{M}_i$ se réduisant, pour $\rho = 0$, à la valeur de u_i au point unique auquel se réduit le cercle correspondant, on aura, en ce qui concerne, par exemple, la dérivée par rapport à t_0, le terme complémentaire

$$(51) \qquad -\frac{x_0}{t_0^2}\left[t_0 u_1\ (0, y_0, z_0,) + u_0\right] = -\frac{1}{t_0}\,(t_0 u_1 + u_0).$$

Quant à la quantité (50), elle ne donne lieu à aucun terme de cette espèce, puisque, nous l'avons vu, son premier terme contient, sous $\int$, une quantité continue et que, d'autre part, le passage par la caractéristique correspond à $\lambda_0 = 1$ et à $\rho = 0$, d'où (n° précédent) : $\dfrac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial \rho} = 0$.

Ainsi, la dérivée de $I_1 + I_1'$ par rapport à t_0 subit la discontinuité (51).

Mais cette discontinuité est exactement compensée par celle qui est relative à $\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\partial J_2}{\partial t_0}$, lequel est nul dans 1 et qui prend dans 2 [comme on le voit d'après (47)] la valeur initiale [égale à (51)]

$$\frac{x_0}{t_0^2}\left[\mathfrak{N}\ (0,0) + x_0\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}\right)_0\right].$$

158. Nous allons nous servir de cette solution du problème mixte relatif à une frontière plane pour l'étude d'une question qui s'est présentée au Livre I, n° **27**, concernant le problème de Cauchy par rapport à (e_3) et à $x = 0$, c'est-à-dire le problème qui consiste à trouver $u(x, y, z, t)$ tel que (ω étant encore pris égal à 1)

$$(e_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

et que

$$(52) \qquad u = u_0(y, z, t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = u_1(y, z, t), \text{ pour } x = 0,$$

ou le problème correspondant pour (e_2) c'est-à-dire celui de trouver $u(x, y, t)$ tel que

$$(e_2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

et que

$$(52') \qquad u = u_0 (y, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_1 (y, t) \qquad (\text{pour } x = 0).$$

On a vu qu'il n'existe, en général, pas de solution; et, par conséquent, comme aux nos **15 *bis*, 16,** pour $\Delta u = 0$, ou pour l'équation de la chaleur, la question se pose de trouver pour quelles valeurs de u_0 et u_1 la solution existera.

Une condition *suffisante* très simple a été découverte par M. Volterra [1] : savoir que la solution existera certainement si u_0 et u_1 sont analytiques en y, z [pour l'équation (e_3)] ou en y [pour l'équation (e_2)], quelle que soit la manière (régulière) dont ils dépendent de t.

Pour le voir, il suffit de remarquer que les équations différentielles ne changent pas quand on change x en it et t en ix.

Si, par conséquent, en raisonnant sur (e_3), on écrit l'expression

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \iint u_0 (y + ix \sin\theta \cos\varphi,\ z + ix \sin\theta \sin\varphi,\ t + x \cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi \right],$$

elle vérifiera encore l'équation différentielle (la vérification de ce fait reste encore valable dans le nouveau cas si on la prend sous la forme que nous lui avons donnée au Livre II, n° **23 *bis***). Ceci est vrai aussi, naturellement, pour

$$x \iint u_1 (y + ix \sin\theta \cos\varphi, z + ix \sin\theta \sin\varphi, t + x \cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

---

(1) Ce qui suit équivaut au contenu de son article de la *Rivista di Matematica*, t. IV, 1894, p. 1-14.

et la somme de ces deux termes satisfera aux conditions aux limites si on prend pour u_0 et u_1 les données (52) du problème.

Naturellement, ceci suppose que u_0 et u_1 sont analytiques en y, z, puisque des valeurs imaginaires de ces dernières variables s'introduisent dans le calcul.

Un raisonnement tout à fait semblable s'applique au problème relatif à (e_2), si on traite la formule (I'), Livre II, n° **30** *bis*, qui intègre cette équation, comme nous venons de traiter la formule de Poisson.

159. Peut-on maintenant trouver un système de conditions nécessaires et suffisantes? La solution précédente du problème mixte apporte une réponse, très imparfaite, il est vrai, à cette question, ainsi que nous l'avons montré au séminaire de M. Volterra, à Rome, en 1916 (1).

Comme nous l'avons fait dans des exemples précédents, on prend u_0 comme donné arbitrairement d'avance, et on essaye de trouver la forme admissible la plus générale pour u_1 en cherchant la forme la plus générale de la solution u. C'est ce qu'on peut faire en considérant u comme la solution du problème mixte, c'est-à-dire, comme étant défini par les conditions du n° **156**, dans lequel nous prendrons toutefois, au lieu du plan initial $t = 0$, un plan parallèle convenablement choisi $t = \theta$ pour porter les données de Cauchy, de sorte qu'on écrira (intervertissant, d'autre part, les notations pour les données) :

$$u = \mathrm{u}_0(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{u}_1(x, y, z), \text{ pour } t = \theta,\ x \geqslant 0,$$
$$u = u_0(y, z, t), \qquad\qquad \text{pour } x = 0.$$

La quantité θ est arbitraire : on peut admettre, par conséquent, qu'elle appartient à un intervalle de valeurs de t pour lequel u_0 est régulier, ou même qu'elle est arbitrairement voisine des valeurs de t qu'on considère spécialement.

---

(1) Le principe du calcul du n° **160** a été donné par nous en 1901 à Princeton (voir *Princeton University Bulletin*, t. XIII, 1902).

Ainsi qu'il a été trouvé ci-dessus, l'expression (45) donne, les $\overline{\mathrm{M}}$ désignant des moyennes prises avec la convention (46) de la fin du n° **156**,

$$u = \frac{1}{2\pi} \mathrm{J}_2 + \mathrm{M}_{t_0-\theta}(\mathbf{u}_0) + (t_0 - \theta)\left[\overline{\mathrm{M}}_{t_0-\theta}\left(\frac{d\mathbf{u}_0}{dr}\right) + \overline{\mathrm{M}}_{t_0-\theta}(\mathbf{u}_1)\right],$$

dont on doit prendre la dérivée par rapport à x pour $x = 0$, si on veut obtenir une expression de u_1.

En procédant de nouveau comme au Livre I, nos **15 *bis*, 16,** on observe que le premier terme, qui est le seul qui dépende de la fonction donnée u_0, conduira à *une* des solutions possibles : on ne tiendra aucun compte de sa forme, et on ne la soumettra ultérieurement à aucune transformation.

Cependant, sous la forme précédente, les termes qui restent ne sont pas complètement indépendants de u_0, puisque $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_1$ sont soumis aux conditions (42) et (43). On évite cet inconvénient en écrivant

$$\mathbf{u}_0(x, y, z) = u_0(y, z, 0) + \mathrm{U}_0(x, y, z),$$
$$\mathbf{u}_1(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(y, z, 0) + \mathrm{U}_1(x, y, z),$$

U_0 et U_1 étant assujettis à s'annuler avec x. Les termes obtenus en remplaçant $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_1$, par $u_0(0, y, z)$ et $\frac{\partial u_0}{\partial t}(0, y, z)$ seront considérés comme faisant un tout avec $\frac{1}{2\pi}\mathrm{J}_2$.

Etudions la partie restante

$$(53) \qquad u' = \overline{\mathrm{M}}_{t_0-\theta}(\mathrm{U}_0) + (t_0 - \theta)\left[\overline{\mathrm{M}}_{t_0-\theta}\left(\frac{d\mathrm{U}_0}{dr}\right) + \overline{\mathrm{M}}_{t_0-0}(\mathrm{U}_1)\right],$$

dans laquelle U_0 et U_1 sont ici assujettis à s'annuler pour $x = 0$, et qui représente l'expression la plus générale d'une solution de (e_3) dont les valeurs pour $x = 0$ sont nulles partout. Sur ce même hyperplan $x = 0$, nous avons à obtenir la valeur la plus générale u_1' du coefficient différentiel $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{x=0}$

On voit facilement (en combinant entre eux les éléments correspondants des deux surfaces sphériques le long

desquelles on a pris les M, c'est-à-dire les éléments qui ont la même projection sur $x = 0$) que — en tenant compte des conditions $U_0(0, y, z) = U_1(0, y, z) = 0$ — la dérivée en question est [1] :

$$(53') \qquad u_1' = \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{=0}$$

$$= M'_{t_0-\theta}(U'_0) + (t_0 - \theta)\left[M'_{t_0-\theta}\left(\frac{dU'_0}{dr}\right) + M'_{t_0-\theta}(U_1')\right],$$

les valeurs moyennes M′ étant prises maintenant sur l'hémisphère σ [centre $(0, y, z)$, rayon $t_0 - \theta$] qui est situé dans la région des x positifs, et U_0', U_1' désignant les dérivées de U_0, U_1 par rapport à x (pour x positif quelconque). On observe immédiatement que celles-ci sont des fonctions arbitraires de x, y, z, un choix quelconque de U_0', par exemple, donnant

$$U_0 = \int_0^x U_0'\, dx.$$

Si, réciproquement, u_1' est donné, le problème de trouver u se réduit à la détermination de U_0', U_1', c'est-à-dire à *résoudre l'équation* (53′).

160. C'est ce qu'on peut faire, du moins théoriquement, par la méthode suivante. D'abord, il est facile de séparer les deux termes du second membre de (53′). Car, en posant $t_0 - \theta = t'$, un d'entre eux est évidemment pair, et l'autre impair, en t', de sorte qu'on peut déterminer séparément U_0' et U_1' par

$$(54) \qquad \frac{\partial}{\partial t'}\left[t' M'_{t'}(U_0')\right] = \frac{1}{2}\left[u_1'(0, y, z, \theta + t') + u_1'(0, y, z, \theta - t')\right],$$

(1) Si on avait opéré sur u_0 et u_1 et non U_0 et U_1, c'est-à-dire sur des fonctions qui ne s'annulent pas avec x, la formule aurait contenu des termes complémentaires introduisant les valeurs moyennes de ces fonctions sur le cercle limite de l'hémisphère.

qui équivaut à

$$(55)\quad t'M_{t'}(U_0') = \frac{1}{2}\int_0^{t'} [u_1'(o, y, z, \theta + t') + u_1'(o, y, z, \theta - t')]\, dt'$$
$$= W(y, z, t')$$

et par

$$(55')\quad t'M'_{t'}(U_1') = \frac{1}{2}[u_1'(y, z, \theta + t') - u_1'(y, z, \theta - t')]$$
$$= W_1(y, z, t').$$

Chacune de ces équations ne doit être considérée que pour t' positif, et est un cas particulier d'une *équation intégrale de première espèce.*

Les quantités inconnues U_0' et U_1' n'étant assujetties qu'à être continues, nous multiplierons par $t'dt'$ et nous intègrerons depuis o jusqu'à t'. Le résultat [que nous n'avons besoin d'écrire que pour U_0', puisque les premiers membres des deux équations (55) et (55') sont entièrement semblables] est :

$$\int_0^{t'} t'W dt' = \int_0^{t'} t'^2 M'_{t'}(U_0')\, dt',$$

et le second membre représente l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iiint U_0'\, dx\, dy\, dz$$

pour *l'intérieur* de l'hémisphère.

Le principe du raisonnement consistera à observer que cette dernière intégrale admet une dérivée par rapport à chacune des variables y et z, sans faire aucune hypothèse sur U_0' autre que celle de la continuité. Car, si le centre (o, y_0, z_0) de l'hémisphère est déplacé, parallèlement à l'axe des y, de dy, la nouvelle surface sphérique sera, dans le voisinage d'un point quelconque M (voir la figure 31, qui est une section plane de la figure de l'espace), déplacée, dans le sens de la normale, de

$$dy \cos(n, y) = \frac{y - y_0}{t'}\, dy,$$

et le nouveau volume différera du primitif par des éléments cylindriques (additifs ou soustractifs), dont chacun a

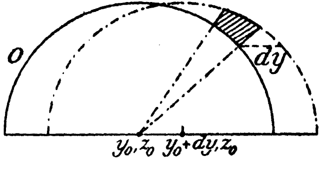


FIG. 31.

$\frac{y - y_0}{t'} dy$ comme hauteur et l'élément $t'^2 d\Omega$ comme base ($d\Omega = \sin\,\theta\, d\theta d\varphi$), donnant un terme

$$t'(y - y_0)U_0' d\Omega$$

dans l'intégrale. Ainsi, on a :

$$(56) \qquad \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_0} \iiint U_0'\, dx dy dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^{t'} t'W\,(y_0, z_0, t')\, dt = \frac{t'}{2\pi} \iint (y - y_0)\, U_0' d\Omega$$

$$= t'M'_{t'}\,[\,(y - y_0)\, U_0'],$$

et une expression similaire pour la dérivée par rapport à z_0.

161. Définissons maintenant les deux opérations fonctionnelles $\mathfrak{T}_y$ et $\mathfrak{T}_z$ par les formules

$$\mathfrak{T}_y\Phi = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{t'} t'\Phi(y, z, t')\,dt', \quad \mathfrak{T}_z\Phi = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{t'} t'\Phi(y, z, t')\,dt';$$

on voit que

$$\mathfrak{T}_{y_0} W = t'M'_{t'}[(y - y_0)U_0'], \qquad \mathfrak{T}_{z_0} W = t'M'_{t'}[z - z_0)U_0'].$$

Mais on peut opérer sur (56) comme on l'a fait sur U_0' lui-même. Par conséquent $\mathfrak{T}_{y_0}{}^2 W$ doit exister, ainsi que $\mathfrak{T}_{y_0}\, \mathfrak{T}_{z_0}\, W$ (ce dernier étant égal à $\mathfrak{T}_{z_0}\, \mathfrak{T}_{y_0}\, W$), ces deux quantités donnant respectivement les valeurs de

$$t'M'_{t'}[(y - y_0)^2 U_0'], \qquad t'M'_{t'}[(y - y_0)(z - z_0)U_0'].$$

On peut de nouveau leur appliquer à chacune d'elles les deux opérations $\mathfrak{T}$ et on voit qu'on peut opérer ainsi un nombre quelconque de fois, *que la fonction donnée u_1' soit indéfiniment dérivable ou non* (le dernier cas étant, naturellement, le cas général quand U_0' n'admet de dérivées que jusqu'à un certain ordre). On a

$$(57) \qquad T_{hk}(y_0, z_0, t') = \mathfrak{T}^h{}_y \ \mathfrak{T}^k{}_{z_0} W = t'M'_{t'}[(y - y_0)^h (z - z_0)^k U_0'].$$

On voit que ceci permet d'obtenir la valeur de toute intégrale double telle que $t'M_{t'}[P(y, z)U_0']$ où P est un polynome quelconque, puisque P peut être ordonné suivant les puissances de $(y - y_0)$, $(z - z_0)$. Par exemple, en désignant par y_1, z_1 un autre système de valeurs de y, z, la quantité

$$(y - y_0)^h (z - z_0) \ U'_0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\Sigma A_{hkmn}(y - y_1)^m (z - z_1)^n U_0',$$

de sorte que sa valeur moyenne sur un nouvel hémisphère σ, de centre (o, y, z) et de rayon égal à t_1', peut aussi être trouvée par une expression telle que

$$(57') \qquad T'_{hk}(y_0, z_0; y_1, z_1, t_1') = \frac{1}{t'} \Sigma A_{hkmn} T_{mn}(y_1, z_1, t_1').$$

161 *bis*. Il reste à déterminer U_0' à l'aide de (57) [ou de (57')] : c'est une espèce de « problème des moments » dont la solution, si elle existe, peut s'obtenir par des méthodes connues. Par exemple, il suffit de considérer une intégrale telle que

$$\frac{K^2}{\pi} \iint e^{-K^2[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]} \, U_0'(\xi, y, z) \, . \, t'^2 d\Omega$$
$$= 2t' \sum (-1)^{h+k} \cdot \frac{K^{2(h+k+1)}}{h!\,k!} \cdot T_{2h,\,2k}(y_0, z_0, t')$$

étendue à l'hémisphère primitif σ [de sorte que ξ désigne

$$\sqrt{t'^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}],$$

et qui, pour $K = \infty$, tend vers la limite $U_0'(t', y_0, z_0)$, — ou [1] une expression semblable formée avec les T_{hk} et tendant vers

$$\sqrt{t'^2 - (y_0 - y_1)^2 - (z_0 - z_1)^2} \times U_0'[\sqrt{t_1'^2 - (y_0 - y_1)^2 - (z_0 - z_1)^2}, y_0, z_0].$$

On a ainsi une série d'opérations qui doivent donner la solution U_0', s'il en existe une. Naturellement, on devra s'assurer que tel est le cas, c'est-à-dire que les valeurs de U_0' trouvées de cette manière satisfont véritablement à l'équation donnée (55), de telle sorte qu'un système de conditions nécessaires (et suffisantes) que u_1' doit vérifier pour que U_0' existe sera le suivant :

1° *La fonction* $W(y, z, t')$ *déduite de* u_1' *par* (55), *peut être soumise aux opérations* $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$ *un nombre quelconque de fois dans un ordre quelconque (ces opérations étant même permutables)*; et ceci s'applique aussi à W_1;

2° *Le résultat* T_{hk} *(ou* T'_{hk}*) doit être tel que*

$$2x_0 \sum (-1)^{h+k} \cdot \frac{K^{2(h+k+1)}}{h!\,k!} T_{2h,2k}(y_0, z_0, x_0),$$

(ou aussi bien une combinaison analogue convenable en T'*) tende vers une limite pour* $K = \infty$;

3° *Cette limite* $U_0'(x_0, y_0, z_0)$ *doit vérifier l'équation* (55).

162. On peut appliquer la même méthode au problème correspondant pour (e_2). Il est clair que, les données étant les valeurs $u_0 = 0$ et $u_1'(y, t)$ de u et de $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x = 0$,

---

(1) On peut aussi considérer la quantité

$$M_{t'}\left\{ 1 - \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{t'^2} \right]^m U_0' \Big\},$$

qu'on peut encore exprimer sous la forme $\Sigma B_{hk} T_{hk}$ et dont le quotient par

$$M_{t'}\left\{ 1 - \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{t'^2} \right\}^m$$

a également pour limite U_0' quand l'exposant m devient infini.

l'équation précédente (55) devra être remplacée (notations du n° **30**, Livre II) par

$$W = t'\mu_{t'}(U_0'),$$

c'est-à-dire par

$$W(y_0, t') = \frac{1}{\pi} \iint_{\{x \geqslant 0,\ x^2 + (y - y_0)^2 \leqslant t'^2\}} \frac{U_0'(x,y)\,dx dy}{\sqrt{t'^2 - x^2 - (y - y_0)^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_0'\,(t \sin \varphi,\ y_0 + t \cos \varphi)\, d\varphi.$$

La seule particularité distinguant ce cas du précédent est qu'une telle déduction doit se faire en résolvant d'abord une équation intégrale d'Abel, savoir :

$$(58) \qquad \frac{\pi}{2}\, m_t\,(U_0') = \frac{\partial}{t\partial t} \int_0^t \frac{W(y,\ t')\,t'dt'}{\sqrt{t^2 - t'^2}}$$

Ceci une fois fait, on procéderait comme dans le cas précédent et on obtiendrait des conclusions tout à fait semblables.

163. Le problème, dans l'un ou l'autre cas, est ainsi résolu, quoiqu'il le soit « très peu » au sens de Poincaré, en raison de la nature compliquée des conditions, et du fait que, par exemple, on ne peut pas même dire si la condition (3°) du n° **161** ***bis*** est distincte des deux premières ou si elle en est une conséquence.

De plus, ces conditions font jouer à la variable t un rôle tout à fait différent de celui que jouent les autres variables; et ceci ne devrait pas être : car ce problème est évidemment invariant par le groupe de Lorentz, ou, plus exactement, par le sous-groupe de celui-ci qui laisse x invariant et qui est, pour (e_2) par exemple, le groupe bien connu

$$\begin{cases} y' = y\ \mathrm{Ch}\alpha + t\ \mathrm{Sh}\alpha, \\ t' = y\ \mathrm{Sh}\alpha + t\ \mathrm{Ch}\alpha. \end{cases} \qquad (\alpha \text{ étant un paramètre arbitraire}).$$

Il est clair qu'il serait désirable d'écrire la solution sous une forme qui soit aussi invariante pour un tel groupe : tel serait le cas si on introduisait les variations de u_1', non

pas le long de parallèles aux axes de coordonnées, mais le long de bicaractéristiques.

Les résultats obtenus au Livre I, n° **27**, montrent que l'équation intégrale (55) ou (58) n'a pas de solution quand u_1' est indépendant de t et non-analytique en les autres variables; le résultat de M. Volterra montre qu'elle en a toujours une quand u_1' est analytique en la ou les variables autres que t. Naturellement, tout ceci pourrait se mettre sous d'autres formes plus générales en utilisant le sous-groupe ci-dessus mentionné du groupe de Lorentz.

CHAPITRE II

AUTRES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE DESCENTE

I. — Descente de m pair à m impair.

164. Nous avons obtenu la solution du problème à un nombre pair de variables indépendantes en la déduisant du résultat correspondant pour le cas de m impair, c'est-à-dire des formules données au Livre III. Pourrait-on faire l'inverse? Les formules présentes peuvent-elles mener (par descente) aux solutions relatives au cas de m impair? On va voir maintenant que ceci est possible, et même que la solution ainsi obtenue est plus avantageuse, sous certains rapports, que la première.

Nous appliquerons la méthode de descente de la même manière que précédemment, en partant de la figure 23, p. 292, et de l'étude comparative des équations (E) et (E'), avec la seule différence que m sera maintenant un nombre impair, qu'on peut encore écrire $m = 2m_1 + 1$, si, dans les formules ci-dessus, on change m_1 en $m_1 + 1$. De même, la relation

$$\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2$$

(dans laquelle on supposera encore c nul) subsistera. Mais, au lieu de la formule (39) donnée au Livre III, on partira maintenant de la formule (29) ou (29 *bis*) du Livre IV, qu'on appliquera à (E') : on introduira, par conséquent, les deux fonctions correspondant à $\mathcal{V}$ et à V. L'une d'entre elles sera une série entière en Γ' :

$$(59) \qquad \mathcal{V}' = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{V}'_{m_1+k}\, \Gamma'^k = \sum \mathrm{V}'_{m_1+k}\, (\Gamma - z^2)^k,$$

et l'autre sera un polynôme de degré $m_1 - 1$ (en raison de l'observation faite tout à l'heure concernant m_1) en la même quantité, soit :

$$\text{(60)} \qquad V' = \sum^{m_1-1} V_h' \Gamma'^h = \sum V_h' (\Gamma - z^2)^h,$$

les coefficients V_h' étant, dans les deux cas, des fonctions des variables x.

Prenons à présent une solution u de (E), que nous considèrerons encore comme une solution de (E') indépendante de z. Si elle est déterminée par les données de Cauchy sur S' — ou, ce qui revient au même, sur S — elle sera donnée par les formules (29) ou (29 *bis*) du précédent chapitre, dans lesquelles :

1° m_1 doit être changé en $m_1 + 1$;

2° Γ doit être remplacé par Γ'; V et $\mathcal{V}$ par les expressions V' et $\mathcal{V}'$ qui viennent d'être définies;

3° T, S, τ, σ doivent être remplacés par les variétés correspondantes T', S', τ', σ' relatives à l'espace E_{m+1};

4° $dx_1 \; dx_2 \; \ldots. \; dx_m$, dS, dS_ν doivent être multipliés par dz, tandis que $d\tau_\gamma'$, $d\sigma_\gamma'$ s'en déduisent ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus;

5° On doit écrire (¹) un signe $\int$ après chacun des **SSS** ou **SS** : ce signe représentera l'intégration par rapport à z.

Il suffit d'étudier l'influence de cette dernière opération. Le calcul des deux premiers termes est évident. La quantité **SSS** $\int$, par exemple, s'écrira

$$\text{(61)} \qquad \mathbf{SSS}\, f dx_1 dx_2 \ldots dx_m \int \mathcal{V}' \cdot dz$$
$$= \mathbf{SSS}\, f dx_1 dx_2 \ldots dx_m \int \left[\sum V'_{m_1+k} (\Gamma - z^2)^k \right] dz.$$

(1) Strictement parlant, un autre symbole serait nécessaire pour les intégrales qui sont différentiées par rapport à γ. Pour ne pas compliquer les notations, on les désignera simplement par **SSS** et **SS** (au lieu de **SS** et **S**) puisqu'elles seront finalement exprimées (voir le texte qui suit) par des intégrales respectivement d'espace et de surface.

Comme l'intégration sous le signe $\int$ doit être faite de $-\sqrt{\Gamma}$ à $+\sqrt{\Gamma}$, et que

$$\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} (\Gamma - z^2)^k \, dz = \Gamma^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{B}(k+1, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma^{k+\frac{1}{2}}}{(k+1)\mathrm{C}_{k+1}},$$

ceci introduit la quantité (indépendante de z)

$$(62) \qquad \mathfrak{l} v_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\mathrm{C}_{k+1}} \mathrm{V}'_{m^1+k} \Gamma^{k+\frac{1}{2}},$$

où le coefficient numérique arbitraire $\mathfrak{l}$ sera choisi un peu plus loin.

Ainsi, l'expression (61) devient $\mathfrak{l} \iiint f v_2 \, dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_m$, et, de même, on doit remplacer, dans le second terme de (29), $\mathcal{V}$ par [1] $\mathfrak{l} v_2$.

164 *bis*. Prenons maintenant les termes qui restent, et qu'on doit différentier par rapport à γ. Avant cette différentiation, τ', par exemple, appartiendra à une sorte d'hyperboloïde à deux nappes (Cf. p. 313, note 1), et le point $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ doit décrire le domaine T_1 compris entre $\Gamma = \gamma$ et S (comparer encore la note citée), chaque position de ce point donnant sur τ' deux valeurs de z :

$$z = \pm \sqrt{\Gamma - \gamma}.$$

Par définition, $d\tau_\gamma'$ est tel que son produit par $d\gamma$ représente le volume de la portion de l'espace à $(m+1)$ dimension comprise entre deux surfaces consécutives $\Gamma' = \text{const.}$ dans un cylindre élémentaire quelconque passant par l'élément en question (fig. 32). Si on prend le cylindre parallèle à l'axe des z, le volume sera égal à la section droite (c'est-à-dire à la projection sur E_m, soit $dx_1 \; dx_2 \; \ldots \; dx_m$)

---

(1) Aucune difficulté spéciale ne provient de la présence de la dérivée $\frac{d}{dv}$, car cette différentiation est évidemment permutable avec les intégrations.

multipliée par le segment dz intercepté sur la génératrice. Ainsi :

$$d\tau'_\gamma = dx_1 \dots\dots dx_m : \left|\frac{\partial\Gamma'}{\partial z}\right| = \frac{dx_1 \dots dx_m}{2|z|} = \frac{dx_1 \dots dx_m}{2\sqrt{\Gamma - \gamma}},$$

ce qui nous permet d'exprimer l'intégrale sujette à différentiation par rapport à γ. V' étant donné par l'expression (60), dans laquelle $\Gamma - z^2$ doit être remplacé par γ, cette intégrale devient (le dénominateur 2 disparaissant en

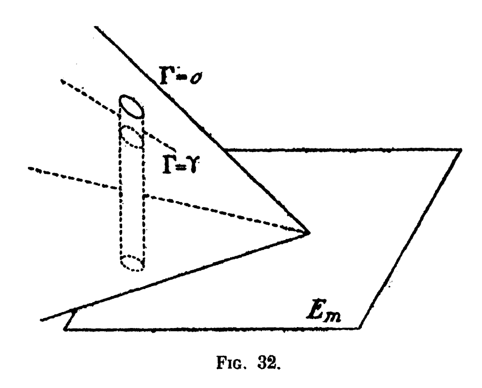


FIG. 32.

raison de la présence de deux éléments $d\tau'$ ayant même projection sur E_m) :

$$(63) \qquad \mathbf{SSS} \int V' \, d\tau'_\gamma = \mathbf{SSS}_{T_1} \int \frac{dx_1 \dots dx_m}{\sqrt{\Gamma - \gamma}} \sum_{h=0}^{m_1 - 1} V'_h \gamma^h,$$

où T_1 est encore la portion de T telle que $\Gamma \geqslant \gamma$.

Par un raisonnement tout à fait semblable, on doit prendre, dans les autres intégrales sujettes à différentiation,

$$d\sigma_\gamma' = \frac{dS}{2\sqrt{\Gamma - \gamma}}.$$

On peut également appliquer ceci, sans modifications essentielles, aux intégrales de la dernière ligne de la formule si on la prend sous sa forme (29 *bis*) (et si on note, de plus, que les symboles $\frac{d}{d\gamma}$ et $\frac{d}{d\nu}$ sont permutables)

Finalement, on a :

$$(64)\quad (-1)^{m_1+1}\frac{2\pi^{m_1}}{(m_1-1)!}u_a$$

$$= -1\left[\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}} f v_2\, dx_1 \ldots dx_m + \mathbf{SS}_{\mathrm{S}_0} v_2 (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S}\right]$$

$$+\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\left[\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}} f dx_1 \ldots dx_m \frac{\Sigma \mathrm{V}'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\right.$$

$$\left. + \mathbf{SS}_{\mathrm{S}} (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S}\frac{\Sigma \mathrm{V}'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\right]$$

$$-\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\frac{d}{d\nu}\mathbf{SS}_{\mathrm{S}_\nu} u_0\, d\mathrm{S}\frac{\Sigma \mathrm{V}'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}$$

$$+ 1\frac{d}{d\nu}\mathbf{SS}\; u_0 v_2\, d\mathrm{S}.$$

le calcul des deux derniers termes appelant les mêmes observations que celui du n° **143 *bis***.

Cette nouvelle formule est tout analogue à la formule connue de M. Volterra [à laquelle elle se réduit facilement quand on l'applique à (e_2)], et ne contient aucun symbole qui ne soit classique en Analyse. Mais elle combine cet avantage avec une généralité entière, puisqu'on sait qu'une telle formule existe pour toute équation (analytique, jusqu'à nouvel ordre).

165. On peut voir facilement comment cette même formule pourrait encore conduire à notre première solution. Il suffit d'opérer la différentiation par rapport à γ conformément aux principes du Livre III.

Comme la quantité à intégrer est d'ordre fractionnaire dans le voisinage de $\gamma = 0$, aucun terme aux limites n'est à introduire; mais, d'un autre côté, l'usage du symbole $\sqcap$ est nécessaire : à l'aide de celui-ci, on peut simplement différentier sous le signe **SSS** ou **SS** : en d'autres termes, remplacer $\frac{1}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\sum \mathrm{V}_h'\gamma^h$ par sa dérivée (1) $(m_1-1)^e$,

(1) Ceci, cependant, n'est pas valable dans le voisinage de a, pour lequel un passage à la limite convenable doit être employé (V. Livre II, n° **106**).

de sorte qu'on trouve, par exemple :

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\left[\mathbf{SSS}\frac{f}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\left(\sum V_h'\gamma^h\right)dx_1\ldots dx_m\right]$$

$$= 1\left|\overline{\mathbf{SSS}\ v_1 f dx_1 \ldots dx_m}\right.,$$

v_1 étant donné par

$$(65)\qquad l v_1 = \frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\sum V_h'\gamma^h\right)_{\gamma=0}$$

$$= \sum \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}{(m_1-h-1)!}\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{0}^{m_1-1} C_{m_1-h-1}\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}}.$$

Le même calcul s'appliquant à chaque terme de (64), on trouve évidemment la formule (39) du Livre III, n° **105**, avec

$$(65')\qquad l v = l(v_1 - v_2) = \sum_{h=0}^{m_1-1} C_{m_1-h-1}\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)C_{k+1}} V'_{m_1+k}\,\Gamma^{k+\frac{1}{2}}$$

v se déduit ainsi des fonctions V' et $\mathcal{V}'$ ainsi qu'on l'a déjà montré au Livre II, n° **70**, les rapports numériques des coefficients correspondants de (59), (60) et de (65') étant naturellement d'accord [1] avec les valeurs trouvées à l'endroit cité si, pour le coefficient numérique l, on prend la valeur

$$l = C_{m-1}.$$

Mais, comme on le voit, la relation entre v' et v peut aussi s'exprimer par les formules (62), (65), (65') ainsi que, dans le premier cas de m pair, elle l'était par (3) et (3').

(1) La vérification est immédiate à l'aide de la relation (n° 99) entre Ω_{2m_1} et Ω_{2m_1-1}.

II. — Propriétés des coefficients de la solution élémentaire.

166. L'importance de la solution élémentaire dans notre théorie est évidemment due à son rapport étroit avec l'équation elle-même, résultant manifestement du fait qu'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre donnée à un nombre impair de variables indépendantes admet une solution élémentaire parfaitement déterminée et que, de même, à une équation donnée à nombre pair de variables correspondent une fonction V et une fonction $\mathcal{V}$. Cette propriété nous montre immédiatement, par exemple, comment la solution en question se comporte vis-à-vis de quelques transformations simples, telles qu'un changement de variables.

A quel degré ce caractère appartient-il aussi aux opérations par lesquelles cette solution u a été construite précédemment, c'est-à-dire aux divers termes de son développement? Une telle question est intéressante pour la valeur de notre méthode de calcul de u : plus le lien entre ces termes pris individuellement et le problème lui-même sera étroit, plus la méthode sera naturelle.

Cette fois, ce lien est plus lâche qu'il ne l'était pour la valeur globale de la quantité u, quoique dans le développement en question (en prenant m impair, par exemple)

$$u = \frac{1}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} (U_0 + U_1\Gamma + \ldots . \; U_h\Gamma^h + \ldots .),$$

les coefficients U_h eux-mêmes soient parfaitement déterminés en fonction des x et des a quand on connaît les expressions des coefficients de l'équation. On peut prévoir aisément que u et même les U, garderont leurs valeurs à un facteur simple [1] près, tout au plus, quand on changera de variables indépendantes, puisque, dans une telle

---

(1) Ce facteur ne se présente qu'en raison de la présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$ dans la formule du nº **63**. Il *disparaît* donc, dans la théorie invariantive (qui conduit, nous l'avons dit, à prendre $U = 1$ en a); il n'interviendra pas dans les calculs qui vont suivre (nºˢ **168-170**).

transformation ponctuelle, les géodésiques, telles qu'elles sont introduites au Livre II, n° **55**, et par conséquent, Γ restent aussi inchangées. Mais le cas serait différent si on changeait d'inconnue en posant

$$u = K(x_1, x_2, \ldots, x_m) u_1,$$

ou même si on multipliait simplement le premier membre $\mathcal{F}(u)$ par une quantité donnée (savoir une fonction donnée des x). Une quelconque de ces deux opérations n'amène encore d'autre changement de la solution élémentaire que la multiplication par un facteur simple : mais le changement produit sur chaque U_h individuellement est beaucoup plus compliqué, car de telles opérations, qui altèrent la forme caractéristique **A**, modifient aussi profondément les géodésiques et, par conséquent, la quantité Γ.

On peut seulement voir ce qui arriverait par une combinaison convenable de ces deux opérations, savoir en substituant à $\mathcal{F}(u)$ le nouveau polynôme différentiel

$$\mathcal{F}_1(u) = \frac{1}{K} \mathcal{F}(Ku),$$

dont le polynôme adjoint [ainsi qu'on le voit immédiatement en le considérant comme défini par l'identité (5), n° **37**] est $\mathcal{G}_1(v) = K\,\mathcal{G}\left(\frac{v}{K}\right)$. Ceci conserve les valeurs des A_{ik} (et, par conséquent, Γ). Quant aux B, on trouvera facilement, si on pose

$$K = e^k, \qquad k_i = \frac{\partial k}{\partial x_i},$$

que chacun d'eux s'augmente de la valeur correspondante de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k_i}$ (le calcul explicite de C n'étant pas nécessaire pour notre but), de sorte que la nouvelle valeur de M devient :

$$\mathbf{M}_1 = M + \sum \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = M + 2 \sum k_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial P_i} = M + 4s \frac{dk}{ds}$$

(notation du Livre II). Par conséquent, U_0 sera multiplié par la quantité

$$e^{-\int_0^s \frac{dk}{ds} ds} = \frac{K_a}{K_x}$$

$\left(\text{dans laquelle on a tenu compte du facteur initial } \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\right)$, après quoi les équations successives (42'), (44') montrent que tel sera également le cas pour chaque U_h.

167. Mais une autre preuve du rapport intime dans lequel les divers coefficients U_h sont avec la question, réside dans le résultat obtenu au n° **114** et étendu (n° **146**) aux valeurs paires de m.

On a vu que la solution élémentaire admet la propriété d'échange, c'est-à-dire ne change pas de valeur numérique quand on échange simultanément les deux points x et a et les deux polynômes mutuellement adjoints $\mathcal{F}(u)$ et $\mathcal{G}(v)$.

Comme (pour m impair)

$$u = \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}},$$

et que Γ est symétrique par rapport à x et a, on peut en dire autant du numérateur U.

Peut-on affirmer la même conclusion concernant chaque coefficient U_h du développement

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \dots + U_h\Gamma^h + \dots ?$$

On le pourrait certainement si les variables $x_1, \dots, x_m$, $a_1, \dots, a_m$ (desquelles dépendent les U_h) et Γ étaient indépendantes. Mais tel n'est pas le cas, de sorte que la conclusion en question n'est aucunement évidente.

Elle le devient, au contraire, si on use encore de notre artifice de « descente ».

En d'autres termes, en même temps que le polynôme différentiel donné

$$\mathcal{F}(u) = \sum A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_m} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu,$$

dans lequel on supposera d'abord le nombre m de variables indépendantes pair, on considère le polynôme auxiliaire

$$\mathcal{F}'(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

où z est une $(m+1)^e$ variable supplémentaire, les deux polynômes adjoints étant respectivement

$$\mathcal{G}(v),\ \mathcal{G}'(v) = \mathcal{G}(v) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On sait que la nouvelle valeur de Γ relative à $\mathcal{F}'$ ou à $\mathcal{G}'$ sera

(66) $$\Gamma' = \Gamma - (z-c)^2,$$

de sorte que la nouvelle solution élémentaire sera :

(67) $$u' = \frac{U'}{[\Gamma - (z - c^2]^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1}{[\Gamma - (z - c^2]^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \sum U_h' [\Gamma - (z-c)^2]^h,$$

les coefficients U_h' ne différant des coefficients correspondants U_h que par des facteurs numériques et, en particulier, *ne dépendant que de*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m, \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,$$

à l'exclusion de z et de c.

Le nombre $(m+1)$ étant impair, la quantité (67) et, par conséquent, son numérateur U' admettent la propriété d'échange, de sorte que

(68) $$\Sigma U_h' \Gamma'^h = \Sigma V_h' \Gamma'^h,$$

les coefficients V'_h successifs du second membre étant calculés comme leurs correspondants en U, à l'échange près :

1° de x avec a, c'est-à-dire de x_1 avec a_1, x_2 avec a_2, etc... (de sorte que, dans les calculs du n° **62**, le point x doit d'abord être considéré comme fixe et les a seuls comme variables de sorte que, par exemple, les chemins d'intégration géodésiques partent tous du même x et aboutissent à des points a quelconques);

2° du polynôme $\mathcal{F}$ (dans lequel les variables indépendantes sont les x) avec $\mathcal{G}$ (dans lequel les variables indépendantes sont les a).

Or, dans (68), les $(2m+1)$ variables $x_1,\ \ldots,\ x_m$,

$a_1, \ldots, a_m, \Gamma^\nu$ *sont indépendantes*, parce que [en vertu de l'équation (66)] Γ^ν contient une variable $(z - c)$ qui est distincte de $x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_m$ et qui n'apparaît pas dans les coefficients.

Par conséquent, (68) doit être une identité par rapport à Γ^ν, et ceci donne la conclusion désirée concernant l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$, tout au moins pour m pair.

Mais une nouvelle « descente » l'étendrait évidemment aux valeurs impaires de m, car toute équation $\mathcal{F}(u) = 0$ à un nombre impair de variables peut être considérée comme déduite d'une autre équation $\mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (dans laquelle le nombre de variables indépendantes est pair) dont la solution élémentaire a les mêmes coefficients à des facteurs numériques près. On a donc démontré complètement la conclusion demandée.

168. Pourrait-on, pour l'obtenir, remplacer la méthode indirecte susdite par une autre plus directe, partant de l'expression explicite des U_h?

Cette question doit être considérée comme relevant de la théorie des lignes géodésiques. En effet, chaque équation (E) conduit, ainsi qu'on l'a vu, à la considération de lignes géodésiques relatives à la forme métrique **H**; réciproquement, toute forme métrique **H** correspond à un nombre infini d'équations linéaires aux dérivées partielles telles que (E).

Il conviendra d'ailleurs de présenter un calcul de cette espèce sous forme invariantive. Les notations seront donc provisoirement [1] (jusqu'au n° **171** inclus) celles dont il sera fait usage dans l'Appendice I à la fin du volume, sans qu'il soit d'ailleurs supposé, dans ce qui va suivre, aucune connaissance du Calcul tensoriel ou du Calcul différentiel absolu.

---

(1) Outre l'introduction de l'adjointe invariantive, ce changement de notation consiste en la désignation des quantités x, A, $\overline{\mathrm{B}}$ par des indices supérieurs et en la valeur 1 $\left(\text{au lieu de } \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}\right)$ attribuée à la quantité U_0 au sommet a du conoïde caractéristique auquel elle correspond.

En particulier, il y a avantage à introduire ici le paramètre différentiel $\Delta_2 u$ dont nous avons rappelé la définition au n° 59. On peut, en effet, avec M. Cotton [1], écrire l'équation sans second membre (E) la plus générale correspondant à un **H** donné, sous la forme

$$(\overline{\text{E}}) \qquad \Delta_2 u + \sum_i \overline{\text{B}}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \overline{\text{C}} u = 0,$$

où Δ_2 est le second paramètre différentiel de Lamé-Beltrami, dont l'expression est (n° 59) :

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \text{A}^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right)$$
$$= \sum \text{A}^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{\rho} \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial x^i} \sum \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho \text{A}^{ik}) \right]$$

Il est clair que le premier membre de $(\overline{\text{E}})$ est de la forme

$$\mathcal{F}(u) = \sum \text{A}^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum \text{B}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \text{C}u$$

et que, réciproquement, tout polynôme différentiel tel que $\mathcal{F}(u)$ peut être écrit sous la forme $(\overline{\text{E}})$, avec

$$(69) \qquad \overline{\text{B}}^i = \text{B}^i - \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho \text{A}^{ik}).$$

Par conséquent, toute question relative à une équation (E) arbitraire peut être considérée comme une question concernant un élément linéaire **H** et un système de $(m + 1)$ fonctions $\overline{\text{B}}^1, \ldots, \overline{\text{B}}^m, \overline{\text{C}}$ de $x^1, \ldots, x^m$.

169. La difficulté du problème posé plus haut croît évidemment avec l'ordre du terme considéré. Nous ne résoudrons ici la question que pour le premier terme U_0, pour lequel la conclusion demandée, ainsi qu'on va le voir, peut se déduire de la formule obtenue au n° 59

$$\Delta_2 \Gamma = 2 \left[1 + s \frac{d}{ds} \log (\rho \text{J}) \right]$$

(1) *Ann. Ec. Norm. Supér.*, t. XVII, 1900, p. 211-244, V. aussi Levi-Civita, *Atti Ist. Veneto*, t. LXXII, 1913, p. 1331-1357.

et de propriétés, aujourd'hui classiques, des lignes géodésiques.

L'adjointe sur laquelle nous raisonnerons sera, bien entendu, l'adjointe invariantive (**40** ***bis***).

Partons à nouveau des équations différentielles écrites au n° **55** pour les lignes géodésiques, soit :

$$(\mathrm{L})\qquad \frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x^i}.$$

On sait que leur intégrale générale dépend de $2m$ constantes arbitraires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2m}$.

Nous avons rappelé également (Note Additionnelle du Livre II) que, si on part d'une solution déterminée quelconque de (L) (qui correspond à un système déterminé de valeurs numériques des μ) et qu'on considère les quantités

$$(70)\qquad x'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \mu_j}, \qquad p'_i = \frac{\partial p_i}{\partial \mu_j}$$

(j étant un indice quelconque entre 1 et $2m$), celles-ci vérifieront le *système aux variations* :

$$(\mathrm{L}')\qquad \frac{dx'^i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial p'_i}, \qquad \frac{dp'_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x'^i}$$

qui est *linéaire* (rappelons que **A′** est quadratique en x' et p').

Chaque valeur de l'indice j dans (70) donne une solution de (L′), et comme le Jacobien

$$\mathcal{D} = \frac{\mathrm{D}(x^1, x^2, \dots, x^m, p_1, p_2, \dots, p_m)}{\mathrm{D}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2m})}$$

n'est pas nul [1], les $2m$ valeurs possibles de j donnent un système fondamental de solutions de (L′).

---

(1) Le théorème fondamental des équations différentielles montre que les μ peuvent être choisis de manière à donner à $x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$

Ces propriétés appartiennent à toutes les équations aux variations déduites d'un système différentiel. Mais les systèmes Hamiltoniens, comme (L), et leurs systèmes aux variations (L'), possèdent une autre propriété importante [1] qui est que *le dénominateur $\mathcal{D}$ est une constante le long de chaque ligne déterminée vérifiant* (L) (en d'autres termes, $\mathcal{D}$ dépend de μ_1, μ_2, ..., μ_{2m} seulement, et non de s).

Les géodésiques elles-mêmes ne dépendent que de $2m - 2$ paramètres; mais chaque solution de (L) contient deux paramètres de plus, savoir les deux quantités α et β mentionnées n° **56**, et qu'on doit, par conséquent, considérer comme étant deux des μ [de sorte que, ayant écrit l'équation générale des géodésiques à $(2m - 2)$ paramètres, on en déduira l'intégrale générale de (L) en changeant s en $\alpha s + \beta$].

Revenant à l'équation donnée sous la forme (69), commençons par rappeler que le polynôme différentiel $\Delta_2 u$ est identique à son polynôme adjoint (**59**, Rem.). Par conséquent, le polynôme adjoint de

$$\mathcal{F}(u) = \Delta_2 u + \sum_i \overline{\mathrm{B}}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \overline{\mathrm{C}} u$$

est (notation du n° **40 *bis***)

$$\overline{\mathcal{G}}(\bar{v}) = \Delta_2 \bar{v} - \sum_i \overline{\mathrm{B}}^i \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^i} + \overline{\mathrm{C}}_1 \bar{v} \quad \left(\overline{\mathrm{C}}_1 = \overline{\mathrm{C}} - \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial \overline{\mathrm{B}}^i}{\partial x^i}\right),$$

c'est-à-dire *se déduit du premier en changeant les signes de tous les* $\overline{\mathrm{B}}$ *et changeant convenablement* $\overline{\mathrm{C}}$.

Venons maintenant au calcul de U_0, que nous définirons bien entendu, non pas exactement comme nous l'avons fait

---

n'importe quelles valeurs données pour $s = 0$. Le déterminant $\mathcal{D}$ est ce que nous avons appelé, dans nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, le « déterminant général » des $(2m - 2)$ solutions de (L'), tandis que J est ce que nous avons appelé le « déterminant spécial ».

(1) V. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III, n° **254**.

au Livre II, mais comme conduit à le faire la théorie invariantive, c'est-à-dire (1) en lui donnant au sommet du conoïde, non pas la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, mais la valeur 1. Nous avons d'abord à former la quantité M d'après la formule (37), n° 56 :

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta_2\Gamma + \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\right) = 1 + \frac{s d \log(\rho J)}{ds} + s\sum \bar{B}^i p_i$$

J est donné par la formule (30 *bis*), n° 57 ***bis***

$$J = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, s)},$$

dans laquelle les géodésiques issues de a sont seules considérées (et non pas toutes les géodésiques, comme précédemment) et s'expriment en fonction de s et de $m - 1$ paramètres λ. La quantité

$$\bar{J} = \rho J,$$

est invariante par une transformation ponctuelle effectuée sur les x, sans changement des λ. Dans un changement des λ, elle serait multipliée par un facteur (le Jacobien des nouveaux λ par rapport aux anciens) en dépendant de s.

Introduisons m nouvelles fonctions $\mathcal{B}_i$ de $x^1, \ldots, x^m$, en écrivant (2)

$$\bar{B}^i = \sum_k A^{ik}\,\mathcal{B}_k = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \mathcal{B}_i} :$$

le dernier terme de l'expression de $\frac{M}{2}$ devient ainsi

$$\frac{s}{2}\sum p_i \frac{\partial A}{\partial \mathcal{B}_i} = \frac{s}{2}\sum \mathcal{B}_i \frac{\partial A}{\partial p_i} = s\sum \mathcal{B}_i \frac{dx^i}{ds}.$$

Si on se rappelle que

$$2p - 2 = -m,$$

(1) V. Appendice I.

(2) Dans la terminologie du Calcul tensoriel, les $\mathcal{B}_i$ sont des composantes covariantes.

on voit que

$$(71)\qquad \frac{M}{2} + 2p - 2 = \frac{M}{2} - m = -(m-1) + s\,\frac{d\log\rho J}{ds} + s\sum_i \mathcal{B}_i \frac{dx^i}{ds}$$

et, par conséquent, que le premier terme $\overline{U}_0$ (surligné pour rappeler qu'on est en notation invariante) est :

$$(72)\qquad \overline{U}_0 = e^{-\frac{1}{2}\int_0^s \left(\frac{M}{2} - m\right)\frac{ds}{s}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_0 : \left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)}\; e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \mathcal{B}_1 dx^1 + \mathcal{B}_2 dx^2 + \dots + \mathcal{B}_m dx^n}$$

$\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_0$ désignant la valeur limite de $\frac{\rho J}{s^{m-1}}$ quand le point x tend vers a le long d'une géodésique déterminée. Cette limite existe et est différente de zéro [1] : employant encore la notation $\dot{x}$ de Newton pour désigner une dérivée prise par rapport à s le long d'une géodésique déterminée quelconque, on trouve sans difficulté que

$$(73)\qquad \left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial \lambda_{m-1}} & \dot{x}^1 \\ \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \lambda_{m-1}} & \dot{x}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \lambda_{m-1}} & \dot{x}^m \end{vmatrix}_0$$

l'indice o à la suite du déterminant désignant le fait que les valeurs des x et de leurs dérivées par rapport aux λ sont prises pour $s = 0$. On écrira, en notation abrégée :

$$\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 = \left\| \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \lambda_1}\ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \lambda_1}\ \dots\ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \lambda_{m-1}}\ \dot{x}^i \right\|$$

---

(1) Ce fait est la condition même par laquelle on a choisi la valeur du nombre p au n° 61.

170. *Le facteur exponentiel de* (72), *savoir*

$$e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \mathcal{B}_1 dx^1 + \dots + \mathcal{B}_m dx^m},$$

possède la propriété d'échange ci-dessus mentionnée. Car, ainsi qu'on l'a vu, échanger les deux polynômes adjoints $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ revient à un changement de signes des B, donc des $\mathcal{B}$, et, d'un autre côté, la permutation de a et de x change le sens d'intégration dans l'intégrale curviligne

$$\int \mathcal{B}_1 dx^1 + \dots + \mathcal{B}_m dx^m$$

prise le long de la géodésique.

Pour démontrer la même conclusion quant au facteur restant

$$\sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_0 : \left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 : \left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)},$$

nous transformerons ce facteur à l'aide de principes connus relatifs aux géodésiques (1).

Si on remplace les paramètres $\mu_1, \dots, \mu_{2m}$ par $2m$ autres paramètres $\nu_1, \dots, \nu_{2m}$ (ces derniers étant fonctions des premiers, et réciproquement), le déterminant $\mathcal{D}$ est évidemment multiplié par le Jacobien

$$\frac{D(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2m})}{D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2m})}$$

[qui est évidemment constant le long de chaque solution de (L)].

Introduisons maintenant un autre déterminant important (1)

$$\mathcal{J} = \frac{D(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}, \dots x^m_{(0)}, x^1_{(1)}, x^2_{(1)}, \dots x^m_{(1)})}{D(\mu_1, \dots\dots\dots\dots, \mu_{2m})}$$

qui se rattache très étroitement, ainsi qu'on va le voir, au Jacobien J ci-dessus mentionné. Les quantités $x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^m$,

---

(1) V. nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, n° 283.

$x_{(1)}^1, \ldots, x_{(1)}^m$ sont les valeurs prises par les x en deux points de la même géodésique, correspondant à deux valeurs différentes s_0, s_1 de s (ces dernières étant considérées comme constantes dans les différentiations par rapport à $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$).

Nous prendrons $s_0 = 0$, s_1 étant la valeur de s qui correspond à x, de sorte que

$$(74) \qquad \mathcal{J} = \frac{D(a^1, a^2, \ldots a^m, x^1, \ldots, x^m)}{D(\mu_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_{2m})}.$$

$\mathcal{J}$ est multiplié par le même facteur que $\mathcal{D}$ lorsqu'on remplace $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$ par $\nu_1 \ldots, \nu_{2m}$, de sorte que *le rapport*

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{D}}$$

ne dépend pas du choix des constantes arbitraires en fonction desquelles l'intégrale générale de (L) *est exprimée.*

Supposons, en conséquence, que m des paramètres μ sont ceux que nous avions précédemment désignés par $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ et α, de sorte que les valeurs des x pour $s = 0$ n'en dépendent pas et restent respectivement égales à $a^1, \ldots, a^m$ tant que les m autres paramètres $\mu_1, \ldots, \mu_m$ demeurent constants. Dès lors, les quantités $\frac{\partial a^i}{\partial \lambda_l}$ $[i = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots (m-1)]$ et $\frac{\partial a^i}{\partial \alpha}$ étant nulles, on a $\left(\text{puisque, d'autre part, } \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} = s\dot{x}^i = s\,\frac{dx^i}{ds}\right)$:

$$\mathcal{J} = \left\| \begin{array}{cccc:cccc} \frac{\partial a^i}{\partial \mu_1} & \frac{\partial a^i}{\partial \mu_2} & \cdots & \frac{\partial a^i}{\partial \mu_m} & \frac{\partial x^i}{\partial \mu_1} & \frac{\partial x^i}{\partial \mu_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^i}{\partial \mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_2} \cdots & \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_{m-1}} & s\dot{x}^i \end{array} \right\|,$$

notation qui doit encore s'interpréter en convenant que chacune des lignes inscrites en représente m, celles que l'on obtiendrait en faisant successivement

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

de sorte qu'il s'agit d'un déterminant d'ordre $2m$ (où nous avons séparé, par des lignes de points, les m premières lignes des m dernières, et de même pour les colonnes). Comme m^2 éléments sont nuls, un tel déterminant se décompose en un produit de deux déterminants d'ordre m, dont le second est $s\mathbf{J}$; on obtient ainsi

$$(75) \qquad \mathcal{J} = \mathrm{Q} \cdot s\,\mathbf{J}, \quad \mathrm{Q} = \left\| \frac{\partial a^i}{\partial \mu_1} \; \frac{\partial a^i}{\partial \mu_2} \cdots\cdots \frac{\partial a^i}{\partial \mu_m} \right\|.$$

Par le même choix de paramètres, et en prenant $s = 0$, le déterminant constant $\mathcal{D}$ devient (même notation)

$$\mathcal{D} = \left\| \begin{array}{ccc:cccc} \frac{\partial a^i}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial a^i}{\partial \mu_m} & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \mu_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_{m-1}} & p_{i0} \end{array} \right\|$$

puisque

$$\left(\frac{\partial p_{i0}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha p_i \left(\frac{s}{\alpha} \right) \right]_{s=0} = p_{i0} \right)$$

ce qui est encore un produit de deux facteurs :

$$\mathcal{D} = \mathrm{Q} \cdot \left\| \frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_1} \cdots\cdots \frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_{m-1}} \; p_{i0} \right\|,$$

le facteur Q étant le même que dans (75). Dans le second facteur, on peut remplacer chaque p_{i0} par la quantité correspondante

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_{i0}} = \dot{x}_0^{\,i}$$

si, en même temps, on divise par le déterminant de cette substitution linéaire, c'est-à-dire par Δ_a. Mais ceci donne précisément le second membre de (73), c'est-à-dire la valeur de $\left(\frac{\mathbf{J}}{s^{m-1}} \right)_0$. Par conséquent,

$$\mathcal{D} = \mathrm{Q} \cdot \frac{1}{\Delta_a} \left(\frac{\mathbf{J}}{s^{m-1}} \right)_0$$

et, en raison de (75),

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\Delta_a|}\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 \frac{1}{sJ};$$

on transforme ainsi la valeur (72) de $\overline{U}_0$ en :

$$\overline{U}_0 = s^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_x \rho_a}} \sqrt{\left|\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{J}}\right|} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \sum \mathcal{B}_i dx^i}$$

$$= s^{\frac{m}{2}} \sqrt[4]{\Delta_x \Delta_a} \sqrt{\left|\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{J}}\right|}\, e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \sum \mathcal{B}_i dx^i}$$

Ceci complète la démonstration de la propriété ci-dessus énoncée en ce qui concerne $\overline{U}_0$, puisque $\mathcal{D}$ est une constante qui a par conséquent la même valeur en a et en x, et que $|\mathcal{J}|$ possède évidemment la symétrie en question [d'après (74)].

Le même résultat, en ce qui concerne les coefficients suivants $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, ..., semble se rattacher à des propriétés plus compliquées des géodésiques. Il se peut même, précisément pour cette raison, qu'il se montre intéressant au point de vue de la théorie de ces courbes, comme dépendant d'autres principes que ceux qui ont été employés jusqu'à présent.

III. — Étude des équations non analytiques.

171. Revenons à présent à la solution élémentaire dans son ensemble. Nous avions réussi à la construire (tout au moins pour deux points x et a suffisamment voisins) en supposant les coefficients analytiques. Il faut remarquer que, dans le premier exemple (en dehors des cas classiques) qui ait été donné d'une telle construction, — savoir le travail de M. Picard sur $\Delta u + Cu = o$ (cité au Livre II) — cette hypothèse n'était pas indispensable. On va voir maintenant comment on peut aussi s'en débarrasser dans le cas présent.

Le résultat correspondant pour l'équation générale du

type *elliptique*, a été obtenu indépendamment, par E. Elia Levi [1] — un des jeunes géomètres italiens qui donnaient les plus belles espérances (il a sacrifié sa vie dans la dernière guerre), — et, sous une forme finalement équivalente, par M. Hilbert [2]. Leur méthode à tous deux consiste à former une première approximation (la « parametrix » d'Hilbert), laquelle *ne satisfait pas* à l'équation donnée, mais, substituée dans cette équation, donne simplement un résultat qui, au point singulier, n'est que du premier ordre d'infinitude. Grâce à l'introduction de cette « parametrix », E. Elia Levi réussit à former la solution élémentaire; de son côté, M. Hilbert n'introduit pas cette dernière : il fait jouer à la « parametrix » le rôle qui appartient généralement à la solution élémentaire elle-même. Les deux questions n'en font réellement qu'une, et l'analyse de E. Elia Levi est, en somme, identique à celle de M. Hilbert. Dans les deux cas, le problème est réduit à une équation intégrale de Fredholm (ce qui est également le cas pour le procédé primitif de M. Picard).

Mais cette méthode demande à être modifiée pour s'appliquer au cas hyperbolique. La raison en est que, dans le cas d'E. E. Levi et d'Hilbert, il n'y a qu'un point singulier, et qu'on n'a pas besoin de s'occuper de voir comment la parametrix, ou le terme complémentaire, se comporte le long de la singularité imaginaire, qui est, en fait, différente suivant qu'on la considère en première approximation (« parametrix ») ou dans le résultat exact. Dans le cas actuel du problème, au contraire, on doit tenir immédiatement compte du conoïde caractéristique, qui est réel, et la première approximation elle-même ne peut admettre d'autre singularité que le conoïde en question.

D'autres difficultés semblent d'abord provenir de la nature des solutions ci-dessus : car, si m est pair, la solution

---

(1) *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, 1907, t. XXIV, p. 275-317.

(2) *Grundzüge einer allg. Theorie des linearen Integralgleichungen*, 6e Mémoire (1910). Une première allusion a été faite à la fin du 5e Mémoire (1906). V. aussi Fubini, *Rendic. Ac. Lincei*, 5e série, t. XVIII (1909), p. 423, travail auquel les remarques du texte s'appliquent également.

élémentaire est mal déterminée, et si m est impair, il faut compter avec les singularités spéciales rencontrées au Livre III, et qui demanderont des précautions particulières dans l'application de la méthode de Fredholm. Le fait est que, dans ce qui suit, nous n'arriverons à la solution qu'en traitant simultanément les deux cas, grâce à la « descente ».

172. ***Le domaine de validité dans le cas analytique.*** — Avant même d'en venir aux équations non-analytiques, il nous faut ici répondre à une première partie — et non la moins importante — de la question, laquelle concerne les équations analytiques.

On ne doit pas oublier — et ce défaut est commun à toutes les méthodes qui reposent sur les séries de Maclaurin — que les solutions ainsi obtenues, quoique complètes en apparence, sont, en réalité, insuffisantes et ne résolvent « pas assez » le problème.

Il a été résolu une première fois, mais « très peu », au Livre I, par le raisonnement de Cauchy-Kowalewsky. Le problème est très peu résolu, non seulement parce que l'expression de u est donnée sous une forme très indirecte et compliquée, mais aussi parce que la région de validité de ce calcul peut être (et est généralement) très petite et insuffisante pour nos besoins. On sait (voir Livre I, n° **8**) que ceci a toujours chance d'être le cas (en raison de la présence des singularités imaginaires) quand on emploie des expressions contenant des séries de puissances.

En particulier, le rayon de convergence de ces séries, dans la question actuelle, dépend, jusqu'à preuve du contraire, non seulement des séries qui développent les coefficients, mais de celles qui développent les données de Cauchy u_0 et u_1 (Cf. ci-après, **187**). Il faut connaître des majorantes des unes et des autres pour pouvoir énoncer une conclusion correspondante relativement au développement de u.

Comme on va le voir maintenant, les solutions que nous avons obtenues dans ce qui précède sont d'un meilleur usage, même à ce point de vue : elles existent et, comme

nous allons le montrer, sont analytiques du moment qu'il en est ainsi pour la solution élémentaire. A son tour, l'existence de celle-ci (et, par conséquent, la validité de notre formule) n'a été prouvée, comme résultat de la convergence de la série (43) (Livre II, n° 62), que pour un certain domaine autour du sommet du conoïde. Dans quel domaine permet-elle d'assurer l'existence de la fonction U, ou des fonctions U et $\mathfrak{U}$, c'est ce que l'on ne sait pas : le rayon de convergence de la série (43) peut être beaucoup plus grand que la limite inférieure déduite des considérations précédentes, et aussi les fonctions U et $\mathfrak{U}$ peuvent exister bien au delà du domaine où leurs développements suivant les puissances de Γ sont convergents.

Nous allons démontrer (les coefficients étant encore supposés analytiques) l'existence de la solution dans tout le domaine de régularité des coefficients eux-mêmes, et aussi (avec les mêmes hypothèses sur l'analyticité de f, u_0, u_1) son analyticité. La démonstration correspondante pour le cas elliptique a été, par exemple, donnée par E. E. Lévi dans l'ouvrage déjà cité. Nous aurons, cependant, à modifier la méthode employée dans ce cas pour l'appliquer à celui qui nous occupe [1], pour des raisons de la même nature que celles ci-dessus mentionnées (d'une manière précise, en raison du fait que le domaine d'intégration des seconds membres de nos formules dépend de a).

173. Pour fournir cette démonstration, prenons le cas de m pair (ce qui ne diminue pas la généralité, grâce à l'artifice de descente) et faisons, tout au moins pour commencer, une hypothèse géométrique que, strictement parlant, on ne devrait pas faire, mais qui est vérifiée dans tous les cas pratiques. On supposera qu'il existe un ensemble de surfaces à un paramètre qui sont orientées dans l'espace

(1) La méthode que nous allons développer ici est très différente de celle d'E. E. Levi et, en fait, comme elle repose sur des prolongements successifs, elle ne peut absolument pas s'appliquer au cas elliptique : nous indiquerons plus loin une méthode qui correspond à celle d'E. E. Levi.

(et ceci au sens *strict*, c'est-à-dire qu'il n'arrivera nulle part qu'une d'elle soit tangente au cône caractéristique, de sorte que l'angle entre l'une quelconque d'entre elles et une direction quelconque intérieure au cône issu d'un de ses points aura un minimum positif) : ces surfaces seront analytiques (de sorte que, à l'aide d'un changement analytique de variables, le paramètre correspondant t pourra être pris comme une des coordonnées, la m^e), et l'une d'elles, correspondant à $t = 0$, sera [1] la surface S, la région $\mathcal{R}$ étant du côté $t > 0$. Chaque bicaractéristique ou géodésique intérieure — c'est-à-dire chaque géodésique telle que $\mathbf{H} \geqslant 0$ — aura, sous ces hypothèses, un sens direct et un sens inverse, ce dernier correspondant à $\dfrac{dt}{d\sigma} < 0$ (où σ est l'arc, au sens ordinaire du mot), $\left|\dfrac{dt}{d\sigma}\right|$ ayant même un minimum positif. On suppose la forme de $\mathcal{R}$ telle qu'une géodésique inverse quelconque issue d'un point de $\mathcal{R}$ reste constamment à l'intérieur pour $t \geqslant 0$: alors une telle géodésique doit nécessairement atteindre S. On suppose encore que le choix de la variable s a été fait sur chacune de ces lignes d'une façon déterminée, et même d'une façon analytique : par exemple, on admet que $\dfrac{dt}{ds} = 1$ pour $t = 0$, de sorte que cette dérivée restera comprise entre deux limites fixes positives, dans $\mathcal{R}$.

Dans ce qui suit, nous emploierons la notation invariantive, laquelle sera (Cf. Appendice I) conforme à celle des nos 168-170. De plus, x^m sera synonyme de t, et, de même, a^m sera synonyme de c.

On admettra aussi (au moins jusqu'à nouvel ordre), en ce qui concerne $\mathcal{R}$, l'hypothèse générale que deux points quelconques x et a à l'intérieur de $\mathcal{R}$, peuvent être joints par une géodésique d'une manière parfaitement univoque et continue : en d'autres termes, le premier système d'équa-

---

(1) L'influence du fait qu'une des surfaces $t = c^{te}$ est la surface S donnée, est purement superficielle, comme on le verra plus bas, et nous l'utiliserons principalement pour simplifier les notations.

tions (29) du n° **57** admet une solution parfaitement déterminée pour les q en fonction des x et des a. Nous supposerons même que leur Jacobien ne s'annule jamais dans $\mathcal{R}$.

Nous pourrons, dans ces conditions, introduire des variables normales de Riemann-Lipschitz X relatives au point a et en fonction desquelles, comme nous le savons, les x s'expriment sous la forme

$$x^i = a^i + X^i + (\quad)_2 + (\quad)_3 + \dots \tag{76}$$

les parenthèses représentant des polynômes homogènes par rapport aux X, de degrés marqués par leurs indices et à coefficients généralement fonctions des a. Les équations différentielles des géodésiques étant de la forme

$$\ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = -\sum_{j,k}\left\{\begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix}\right\} \dot{x}^j\dot{x}^k \tag{77}$$

[où les coefficients $\left\{\begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix}\right\}$ (symboles de Christoffel) se calculent par une règle aujourd'hui classique en partant des coefficients de la forme métrique] les premiers termes de (76) ne sont autres que

$$x^i = a^i + X^i - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left\{\begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix}\right\} X^jX^k + \dots$$

expressions où les termes du second degré se déduisent des derniers membres de (77) en changeant les $\dot{x}$ en X et divisant par 2.

Sur ces variables normales, on pourra encore effectuer une substitution linéaire [1]

$$X^i = \Sigma l_{iK}\xi_K, \tag{78}$$

---

(1) Les variables ξ, choisies d'une façon particulière, n'ont aucun caractère invariant. Elles ne sont pas plus contrevariantes que covariantes. En particulier, lorsque les variables X sont amenées à la forme ξ, les variables (covariantes) p correspondantes ne sont autres, au signe près, que les ξ eux-mêmes, ainsi qu'il nous sera utile plus loin de le noter.

(à coefficients, en général, fonctions des a) qu'on peut même supposer être certainement déterminée et varier analytiquement [1] avec les a, de sorte que la forme quadratique $\Gamma = \mathbf{H}(\xi)$ se réduise à sa forme canonique

$$\Gamma_0 = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi^2_{m-1},$$

et que, de même, la surface $\xi_m =$ const. passant par a soit tangente, en ce point, à $t =$ const., avec $\frac{\partial \xi_m}{dt} < 0$. La substitution linéaire sur les variables normales ξ de Lipschitz ne concernera que les $(m - 1)$ premières, si on a choisi les variables x de manière à ce que les lignes $x^1 =$ const., $x^2 =$ const., ..., $x^{m-1} =$ const. soient partout transversales aux surfaces $t =$ const. On peut supposer que le choix des x possède cette propriété, et même (à l'aide d'une transformation convenable sur $x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ seuls) que, pour $t = 0$, le discriminant de $\mathbf{H}$ (ou de $\mathbf{A}$) est toujours égal à 1, de sorte que

$$\frac{d}{d\nu}\, d\overline{S} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot dx^1 \dots dx^{m-1}$$

et que les dérivées transversales ne sont autres que les dérivées par rapport à t : toutes ces transformations étant analytiques et régulières.

Nous pourrons même aller plus loin, au moins dans une certaine portion de $\mathcal{R}$ au voisinage de la surface donnée S. En chaque point de celle-ci, soit menée la géodésique transversale et soit porté sur cette géodésique, à partir de son pied, un arc dont la longueur (toujours mesurée avec la métrique $\mathbf{H}$) sera la quantité arbitraire t. Un point de l'espace sera alors défini par la connaissance de t et de

(1) Ces coefficients étant arbitraires, jusqu'à un certain point, l'exposé du texte est vrai en les supposant calculés d'une façon déterminée, par exemple en suivant strictement la règle classique de Lagrange (V. l'*Algèbre supérieure* de Serret, 4e édition, t. I, p. 430; Bôcher, *Higher Algebra*, ch. X, n° 45, p. 131). Pour l'application de cette règle, on sera toujours (avec l'hypothèse ultérieure du texte quant au choix des variables) dans le cas général où les coefficients des termes carrés sont différents de zéro, puisque, les termes en ξ^2_m étant mis à part, il reste une forme en $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ qui est définie (négative).

$m - 1$ autres coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}$ définissant le pied de la géodésique sur S. Les surfaces $t =$ const. seront alors, comme on sait, toutes transversales aux géodésiques précédentes, et la forme métrique sera :

$$dt^2 + \Sigma' \mathrm{H}_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{79}$$

le signe Σ' signifiant qu'on ne doit faire varier les indices i, k que de 1 à $m - 1$, de sorte que le second terme est une forme quadratique (définie négative) en $dx^1, dx^2, \ldots, dx^{m-1}$ seuls : ce qui donne, pour la dernière équation (77),

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{1}{2} \sum{}' \frac{\partial \mathrm{H}_{ik}}{\partial t} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{80}$$

Toutefois, l'emploi d'un tel système de coordonnées risque de nous restreindre à une portion de la région $\mathcal{R}$, celle dans laquelle sa définition est univoque. Nous ne supposerons pas, jusqu'à nouvel ordre, qu'on les ait adoptées, ni par conséquent que les lignes

$$x^1 = \text{const.},\ x^2 = \text{const.},\ \ldots,\ x^{m-1} = \text{const.},$$

(lesquelles continueront à être supposées transversales aux surfaces $t =$ const.) soient des géodésiques.

173 *bis*. ξ_m, changé de signe, sera aussi éventuellement désigné par la lettre synonyme θ.

Les ξ peuvent être exprimés en fonction de θ et des rapports

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\theta},\ \eta_2 = \frac{\xi_2}{\theta},\ \ldots,\ \eta_{m-1} = \frac{\xi_{m-1}}{\theta},$$

ces derniers vérifiant, pour l'intérieur du conoïde, la relation

$$\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \ldots + \eta^2{}_{m-1} \leqslant 1. \tag{81}$$

A tout système de telles valeurs constantes des η correspondra une géodésique déterminée (intérieure ou bicaractéristique) passant par a. Le long d'une telle géodésique, le

rapport $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ reste compris entre deux limites positives fixes, et, par conséquent, il en est de même pour le rapport $\frac{\theta}{c-t}$.

a étant un point déterminé quelconque de $\mathcal{R}$, on peut rapporter les points x qui sont intérieurs en même temps à $\mathcal{R}$ et au conoïde de sommet a aux variables normales ξ relatives à a, mais aussi à $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, \theta$, ou à $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, t$: ces deux derniers systèmes seront équivalents à notre point de vue, en ce sens que chacun d'eux peut s'exprimer en fonction de l'autre, les expressions étant holomorphes en raison de la remarque faite sur $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$.

174. Les choses étant ainsi, on va montrer que, si on a, d'une manière quelconque, construit les éléments $\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathcal{V}}$ de la solution élémentaire, pour toutes les positions possibles de x et de a dans $\mathcal{R}$ [plus exactement, pour toutes les positions de ces points vérifiant $\Gamma(x; a) \geqslant 0$], sachant de plus que les quantités sont holomorphes en x, a, on peut affirmer que la solution u du problème de Cauchy (à données holomorphes) relatif à $t = 0$ ou à $t = t_0 > 0$, est aussi holomorphe.

Nous commencerons par faire cette démonstration pour le premier terme (en **SSS**) de (29 *bis*). D'une manière générale, nous montrerons que l'intégrale m-uple

$$(82) \qquad \mathbf{SSS}\, F(x^1, x^2, \ldots) dx^1\, dx^2 \ldots dx^m,$$

(F étant holomorphe) étendue au domaine compris entre le demi-conoïde rétrograde de sommet a et la surface S, est holomorphe en les a. F peut même contenir, non seulement les x, mais aussi les a eux-mêmes et éventuellement d'autres paramètres : si elle est holomorphe en toutes ces quantités, il en sera de même pour (82) en fonction des a et des paramètres. On peut considérer ce fait comme pratiquement évident; mais sa déduction explicite est simple moyennant les hypothèses et les remarques précédentes.

Celles-ci montrent, en effet, que les x seront des fonctions holomorphes (dans $\mathcal{R}$) de $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, t$. Soit K leur Jacobien (pris de manière à être positif) de sorte que :

$$dx^1 \; dx^2 \; \ldots, dx^m = K \, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} \, dt.$$

La fonction demandée sera

$$\text{(82 } bis\text{)} \qquad \mathbf{SSS}\, F(x^1, x^2, \ldots, x^m)\, dx^1 \; dx^2 \ldots dx^m$$
$$= \mathbf{SS}\, d\eta_1 \; d\eta_2 \; \ldots, d\eta_{m-1} \int_0^c K\, F dt,$$

l'intégration étant exécutée par rapport aux η dans le domaine réel (81), et par rapport à t de l'origine à la valeur c qui correspond à a. Comme ceci peut s'écrire (en posant $t = \lambda c$)

$$\text{(82 } ter\text{)} \qquad c\, \mathbf{SS}\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} \int_0^1 K\, F d\lambda,$$

l'intégration par rapport à λ devant être faite de o à 1, il suffit de remarquer que la quantité à intégrer est holomorphe, et même l'est uniformément [1], quand elle est exprimée en fonction des η, λ et des a. Son développement suivant la formule de Taylor autour d'une position déterminée quelconque de a et d'un système quelconque de valeurs des η et de λ), convergeant uniformément par rapport aux η et à λ, peut dès lors s'intégrer terme à terme, ce qui donne la conclusion cherchée : l'intégrale est définie et holomorphe dans $\mathcal{R}$.

Si on prend $F = \overline{\mathcal{V}}f$, on voit ainsi que le premier terme $\mathbf{SSS}\, \overline{\mathcal{V}}f d\overline{T}$ de (29) ou de (29 *bis*) existe et est holomorphe dans la région $\mathcal{R}$. Cette conclusion n'est pas modifiée lorsqu'on remplace les formules dont il s'agit par celles qui leur correspondent dans notre notation invariantive

---

(1) Une fonction qui est holomorphe autour de chaque point d'un domaine continu (y compris les points de la frontière), y est uniformément holomorphe, c'est-à-dire que son développement suivant la formule de Taylor admet une majorante fixe dans ce domaine, comme on le voit par un raisonnement classique reposant sur le Lemme de Bolzano-Weierstrass.

et qui leur sont, bien entendu, équivalentes (1), formules que nous désignerons par $\overline{(29)}$, $\overline{(29\ bis)}$. Les termes

$$\mathbf{SS}\left[\overline{\mathcal{V}}(u_1+\overline{\mathrm{L}}u_0)-u_0\,\frac{d\overline{\mathcal{V}}}{d\nu}\right]\overline{d\mathrm{S}}$$

de $\overline{(29)}$ relatifs à S_0 se traiteront évidemment de la même manière sans difficulté, et il en serait encore de même du terme $\mathbf{S}_\sigma\, u_0\overline{\mathcal{V}}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\,\overline{d\sigma_\gamma}$ de la même formule.

175. Le calcul des termes restants (termes en $\overline{\mathrm{V}}$)

(83)

(A) $$\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\,\mathbf{SS}_\tau\, f\overline{\mathrm{V}}\overline{d\tau_\gamma},$$

(B) $$\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\,\mathbf{S}_\sigma\left[\overline{\mathrm{V}}(u_1+\overline{\mathrm{L}}u_0)-u_0\frac{d\overline{\mathrm{V}}}{d\nu}\right]\overline{d\sigma_\gamma},$$

(C) $$\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\,\mathbf{S}_\sigma\, u_0\overline{\mathrm{V}}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\,\overline{d\sigma_\gamma}$$

qui figurent dans la formule $\overline{(29)}$, ou des termes analogues :

(83*bis*) (A) ....,

(B′) $$\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\,\dot{\mathbf{S}}_\sigma\overline{\mathrm{V}}(u_1+\overline{\mathrm{L}}u_0)\,\overline{d\sigma_\gamma},$$

(C′) $$-\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}_{(\gamma=0)}\,\frac{d}{d\nu}\,\mathbf{S}_{\sigma\gamma\nu}\,\overline{\mathrm{V}}u_0\,\overline{d\sigma_\gamma}$$

---

(1) Cette équivalence, évidente *a priori* (puisque toutes ces formules doivent représenter une seule et même solution du problème de Cauchy), résulte en fait (V. Appendice I) : 1° de ce que, dans le passage de la première notation à la seconde, les éléments d'étendue $d\mathrm{T}$, $d\tau_\gamma$, $d\mathrm{S}$, $d\sigma_\gamma$ sont multipliés par $\rho=\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, tandis que V, $\mathcal{V}$ sont divisés par le même facteur, ν ne changeant pas de signification; 2° que le changement subi par les dérivées $\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}$, $\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}$ est compensé par un changement convenable apporté à la valeur de L. L'emploi de la notation invariantive et de la forme $\overline{(\mathrm{E})}$ donnée à l'équation au n° **168** présente, en particulier l'avantage que $\overline{\mathrm{L}}$ acquiert la valeur simple $\Sigma\,\overline{\mathrm{B}^i\pi_i}$.

si l'on part de $(\overline{29}\ bis)$, présente une difficulté semblable à celle que nous avons rencontrée au n° **141** et dont nous triompherons d'une manière analogue. Cette difficulté tient à ce que la quantité γ que nous allons avoir à introduire comme variable indépendante et suivant les puissances de laquelle nous développerons des expressions telles que l'intégrale I, du n° **140**, a toutes ses dérivées partielles nulles au sommet a du conoïde, de sorte que le changement de variables à l'aide duquel nous la ferons intervenir sera forcément irrégulier à cet endroit.

Comme au n° **141**, nous commencerons par considérer les x comme exprimés en fonction des a et des variables ξ du n° **172**, avec a comme origine. On appellera

$$J_1\, d\xi_1\, d\xi_2 \,\ldots\, d\xi_m = \rho_x\, dx^1\, dx^2 \,\ldots\, dx^m = \overline{dT},$$

l'élément d'espace (on a facilement

$$(84) \qquad J_1 = \frac{\rho_x}{\rho_a} J = \sqrt{\frac{\Delta_a}{\Delta_x}}\, J,$$

$J = \dfrac{D(x)}{D(X)}$ étant le Jacobien des x par rapport aux variables normales X).

Au lieu des variables ξ, on peut introduire (tout au moins au voisinage de $\Gamma = 0$ qui seul nous intéresse) les mêmes variables angulaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$, qu'au n° **141** et aussi, comme en cet endroit, la quantité

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2},$$

ou mieux, puisque nous aurons à nous placer au voisinage du conoïde, la différence

$$\theta - r = \mu,$$

en sorte que l'élément de volume $\overline{dT}$ s'écrira ($d\Omega_{m-2}$ étant, comme au n° **141**, l'élément de surface sphérique dans l'espace à $m - 1$ dimensions)

$$J_1 (\theta - \mu)^{m-2}\, d\Omega_{m-2} d\theta d\mu.$$

Les x, fonctions holomorphes des variables a, ξ, seront aussi des fonctions holomorphes des variables

$$(85)\qquad a^1, a^2, \ldots, a^m = c; \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-2}; \qquad \theta, \mu,$$

dont, en général, les $2m - 2$ premières seront sous-entendues dans ce qui va suivre [1]. Aux deux variables restantes, nous allons nous proposer de substituer, à titre de variables indépendantes, les quantités t et γ.

En fonction des variables (85), les ξ auront les valeurs

$$(86)\qquad \xi_i = (\theta - \mu) e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

$$(86')\qquad \xi_m = -\theta,$$

où les e_i, fonctions des seuls φ, représentent les coordonnées (rectangulaires) d'un point variable sur l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $m - 1$ dimensions. Comme nous avons déjà eu à le remarquer au n° **141**, chacune de ces quantités e_i donne lieu à la relation :

$$(87)\qquad \mathbf{S}\, e_i d\Omega_{m-2} = 0.$$

Ce sont ces valeurs des ξ_i que nous aurons à reporter dans les formules (76). Si l'on y fait tout d'abord $\mu = 0$, elles définissent une des bicaractéristiques issues de a; en particulier, la dernière d'entre elles donne alors :

$$c - t = \theta + (\quad)_2 + \qquad = T_0(\theta),$$

et, d'après les hypothèses géométriques faites au n° **172**, cette équation est résoluble en θ dans toute la région. Si

$$(88)\qquad \theta_0 = c - t + \ldots$$

est la fonction de t ainsi obtenue, les deux quantités θ_0 et

(1) Si l'on considère les variables normales ξ comme des coordonnées rectangulaires, le lieu des points qui correspondent à des valeurs constantes des a et des φ (donc à θ et μ seuls variables) est un demi-plan ou plutôt (car nous ne considérons que des points en onde ou sous onde l'un avec l'autre) l'intérieur d'un angle ordinaire. Dans notre espace (x, t), cet angle est de sommet a et ses côtés, en général curvilignes, sont une bicaractéristique et une géodésique transversale aux surfaces S, ce dernier côté restant fixe lorsque les φ varient.

$(c - t)$ sont, pour a et φ constants, et sur tout l'arc de bicaractéristique correspondant suivi à partir de a jusqu'à son intersection avec notre surface initiale S, des variables que l'on peut appeler « équivalentes », en ce sens que chacune d'elles est fonction holomorphe et croissante de l'autre, qu'elles s'annulent ensemble, savoir en a, et sont, au voisinage de ce point, des infiniment petits équivalents.

Prenons maintenant μ différent de zéro, mais très petit : les x seront développables suivant les puissances de μ; en particulier, on aura

(89) $$c - t = T_0 + \mu T_1 + \dots,$$

et inversement,

(90) $$\theta = \theta_0 + \mu\theta_1 + \dots,$$

avec cette circonstance, conséquence de la forme des équations (76), que le coefficient T_1 de la première puissance de μ s'annule en a et peut par conséquent s'écrire en mettant θ en facteur, et que, de même, le coefficient θ_1 de μ dans la formule (89) peut être considéré comme contenant $(c - t)$, ou, ce qui revient au même, θ_0 en facteur.

176. La variable γ a la valeur

(91) $$\gamma = 2\mu\theta - \mu^2 = 2\mu(\theta_0 + \mu\theta_1 + \dots) - \mu^2,$$

équation qui va nous servir à obtenir, inversement, μ suivant les puissances de γ. Mais — et c'est ici qu'apparaît l'irrégularité qui se présente nécessairement dans notre changement de variables — les coefficients du développement vont contenir en dénominateurs des puissances de θ_0. Si, tout d'abord, nous réduisons l'équation précédente à :

(92) $$\gamma = 2\mu\theta_0 - \mu^2,$$

nous voyons qu'elle peut être considérée comme une relation entre les quantités :

(93) $$\mathbf{m} = \frac{\mu}{\theta_0}, \qquad \mathfrak{g} = \frac{\gamma}{\theta_0^2}$$

et fournit pour $\mathbf{m}$ un développement à coefficients constants

ordonné suivant les puissances de $\mathbf{g}$ et que nous désignerons par $\mathbf{m}_0$, de sorte que, dans ce premier cas, on aurait :

$$\mu = \theta_0 \, \mathbf{m}_0 \, (\mathbf{g}) \qquad = \theta_0 \left(\frac{\mathbf{g}}{2} + \dots \right) \tag{93 bis}$$

Si maintenant nous effectuons dans l'équation (91), et non plus dans (92), le même changement de variables (93), soit :

$$\mu = \mathbf{m}\theta_0,$$

on voit que $\mathbf{m}$ sera encore développable suivant les puissances entières de $\mathbf{g}$: plus précisément, en posant :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}',$$

et remarquant que, par définition, la quantité $2\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_0^2$ est identiquement égale à $\mathbf{g}$, on voit que $\mathbf{m}'$ s'exprime par un développement :

$$\mathbf{m}' = -\mathbf{m}_0^2\theta_1 - \mathbf{m}_0^3\theta_0\theta_2 - \dots,$$

ordonné suivant les puissances de $\mathbf{m}_0$, donc de $\mathbf{g}$, et dans lequel tous les coefficients contiennent θ_0 en facteur puisqu'il en est ainsi pour θ_1.

μ sera ainsi développable suivant les puissances de γ, et ce développement, qui se déduit du développement suivant les puissances de $\mathbf{g}$ en remplaçant cette dernière quantité par sa valeur (93), sera valable pour toutes les valeurs suffisamment petites de γ tant que θ_0 sera différent de zéro, c'est-à-dire, en dehors du voisinage du sommet du conoïde. Il suffira de substituer le développement ainsi obtenu dans les quantités sous les signes $\mathbf{SS}$ ou $\mathbf{S}$ des formules (83) ou (83 *bis*) et de prendre le coefficient de γ^{m_1-2} (ou de γ^{m_1-1}) dans le développement final qui s'en déduit, pour trouver un résultat holomorphe. Cette conclusion ne demande plus qu'à être complétée par l'examen de ce qui se passe au voisinage de $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire du sommet du conoïde.

177. La relation (91) nous permet de substituer à la variable θ la variable t, avec

$$d\theta = |\theta_0' + \mu\theta_1' + \dots| \, dt.$$

Puis la relation (92) permettra d'introduire la variable γ à la place de μ avec

$$d\mu = \frac{d\gamma}{2\left(\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)} = \frac{d\gamma}{2(\theta_0 - \mu + 2\mu\theta_1 + 3\mu^2\theta_2 \ldots .)}$$

d'où, pour l'élément $d\xi_1 \; d\xi_2 \; \ldots . \; d\xi_m$,

$$d\xi_1 \; d\xi_2 \ldots . d\xi_m = \frac{(\theta - \mu)^{m-2}|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \cdots| d\Omega_{m-2} dt d\gamma}{2\left(\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}$$

L'élément $\overline{d\tau_\gamma}$ s'en déduira en effaçant simplement le facteur $d\gamma$ et tenant compte du facteur Jacobien J_1, défini par (84), de sorte que (en mettant ce dernier facteur à part) :

$$\text{(94)} \qquad \frac{1}{J_1} \overline{d\tau_\gamma} = \frac{(\theta - \mu)^{m-2}|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \cdots| d\Omega_{m-2} dt}{2\left(\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}.$$

Telle est la quantité que nous aurons à introduire dans le premier des termes (83). Elle sera multipliée par une fonction des x, savoir ici :

$$\text{(95)} \qquad F = J_1 f \sqrt{V},$$

fonction que nous développerons encore suivant les puissances de μ, soit :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots .,$$

les coefficients F_0, F_1, ..., étant fonctions de t (ainsi que des variables a et φ).

F_0 représente, en fonction de t, les valeurs de F le long de la bicaractéristique qui correspond à un système de valeurs constantes données des a et des φ.

Commençons par laisser les φ constants de sorte que dans le terme que nous calculons en ce moment — premier terme (83) — la seule variable d'intégration reste θ_0 ou, ce qui revient au même, $(c - t)$. Nous avons à prendre l'intégrale simple :

$$\text{(96)} \qquad \int \frac{F}{2} \frac{(\theta - \mu)^{m-2}|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \ldots .| dt}{\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}}$$

que nous aurons finalement à multiplier par $d\Omega_{m-2}$ et à intégrer par rapport aux φ. Auparavant, nous devrons (Cf. **141**) :

1° faire varier d'abord t depuis o jusqu'à $c - \varepsilon$, en désignant par ε une constante positive très petite;

2° développer cette intégrale (ou, si l'on veut, la quantité à intégrer) par rapport aux puissances de γ et prendre le coefficient de γ^{m_1-2} ou, ce qui revient au même, en prendre la dérivée d'ordre $m_1 - 2$, diviser par $(m_1 - 2)!$ et faire $\gamma = 0$;

3° faire tendre finalement [1] ε vers o.

En vue de cette dernière opération comme des autres calculs qui vont suivre, nous devrons considérer tous les termes qui figurent dans le développement de la quantité à intégrer au point de vue de leur degré global (degré d'homogénéité) par rapport aux deux variables θ_0 (ou encore $c - t$) et μ. Si, en effet, dans un terme qui contient en facteur

$$\mu^h \theta_0{}^k = \theta_0{}^{h+k} \mathbf{m}^h,$$

nous remplaçons μ par sa valeur (93 *bis*), nous voyons que $\theta_0{}^{h+k}$ sera multiplié par un développement suivant les puissances de $\mathbf{g}$ commençant par un terme en $\mathbf{g}^h$ et se composant par conséquent de termes en

$$\mathbf{g}^{h'} \theta_0{}^{h+k} = \gamma^{h'} \theta_0{}^{h+k-2h'}.$$

Il ne donnera donc aucun terme en $\gamma^{h'}$ si $h' < h$, et, dans le cas contraire, le coefficient de $\gamma^{h'}$ contiendra en facteur

$$\theta_0{}^{h+k-2h'},$$

cet exposant de θ_0 pouvant éventuellement s'élever si, dans le terme correspondant de développement de $\mathbf{m}^h$, le coefficient de $\mathbf{g}^{h'}$ contient lui-même θ_0 en facteur. Cette circonstance se présente nécessairement si, du développement de $\mathbf{m}^h$, nous défalquons celui de $\mathbf{m}_0{}^h$ et si nous considérons un terme de la partie restante.

---

(1) On voit que γ ou μ doivent, en toute hypothèse, être considérés comme des infiniment petits, même relativement à θ_0.

178. Considérons d'abord, à ce point de vue, l'élément de conoïde (94). L'inverse du dénominateur peut se développer suivant les puissances de $\frac{\mu}{\theta_0}$ ou, plus commodément ici, de $\frac{\mu}{\theta - \mu}$, soit :

$$(97) \quad \frac{1}{\theta - \mu + \mu \dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}}$$

$$= \frac{1}{\theta-\mu} - \frac{\mu}{(\theta-\mu)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\mu} + \frac{1}{(\theta-\mu)^3}\left(\mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\theta-\mu} + \mathrm{R},$$

expression où tout terme est de degré global au moins égal à -1 et, conformément à une remarque faite plus haut sur l'expression (90), toute la partie R, de degré au moins égal à zéro; quant au numérateur, il contient en facteur $(\theta - \mu)^{m-2}$ et la dérivée $|\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots|$, laquelle est égale à 1 en a et pour $\mu = 0$.

Le produit $\overline{f\mathrm{V}d\tau_\gamma}$ étant ainsi de la forme

$$\mathrm{F}\,|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots\,|\,\frac{d\Omega_{m-2}dt(\theta-\mu)^{m-2}}{2\left(\theta - \mu + \mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,d\Omega_{m-2}\,dt\left[\mathrm{F}_0\left(\theta - \mu\right)^{m-3} + \ldots\right]$$

où les termes représentés par des points sont de degré global au moins égal à $m - 2$, on aura, avec la même convention, pour le coefficient de dt dans l'intégrale simple (96), la valeur :

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}_0(\theta - \mu)^{m-3} + \ldots$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, le coefficient de $(-\gamma)^{m_1-2}$ contiendra au moins une fois θ_0 en facteur (puisque $h + k \geqslant m - 3 = 2m_1 - 3$, $h' = m_1 - 2$), le coefficient de la première puissance de θ_0 étant uniquement fourni

par les termes que nous avons explicitement écrits dans la formule précédente. Comme $\theta - \mu = \sqrt{\theta^2 - \gamma}$, quantité dans laquelle on peut, en ne négligeant encore que des termes de degré supérieur, remplacer θ par θ_0, ce coefficient est :

$$(98)\quad \frac{1}{2}\,\frac{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}}{(m_1-2)\,!}\,F_0 = (m_1-1)\,C_{m_1-1}F_0,$$

F_0 étant, ici, pour $\mu = o$, la valeur de la quantité (95). Le coefficient de γ^{m_1-2} s'en déduira en multipliant par $(-1)^{m_1-2}$, de sorte que le facteur de F_0 dans ce coefficient est (cf. **144**) le coefficient (28) et est, par conséquent, destiné à s'éliminer.

Ainsi, dans la quantité à intégrer de (96), les coefficients des puissances de γ, depuis o jusqu'à $m_1 - 2$, sont limités en valeur absolue et même infinitésimaux, de l'ordre de θ : par conséquent, dans l'intégrale prise depuis o jusqu'à ε, la totalité des termes correspondants sera au moins de l'ordre de ε^2, ce qui équivaut au résultat trouvé au n° **141**.

En raison de ce résultat, on voit qu'on obtient la valeur cherchée en prenant o comme limite supérieure. θ_0 étant remplacé par sa valeur (88) en fonction de t, on voit qu'une telle intégrale reste holomorphe même pour c très petit, et contient même c^2 en facteur.

179. Le calcul des termes de frontière va se faire d'après une marche toute semblable. L'élément $d\overline{S}$ se déduisant encore de l'élément de volume par suppression pure et simple du facteur dt, la valeur de $\overline{d\sigma_\gamma}$ s'en déduira par suppression du facteur $d\gamma$ ou, si l'on veut, se déduira de la valeur de $\overline{d\tau_\gamma}$, telle qu'elle résulte de (94), par suppression de dt. Le calcul sera donc exactement le même que tout à l'heure à cela près qu'on n'aura plus à intégrer par rapport à t, mais à faire $t = o$ et que la nouvelle valeur de F sera :

$$(99)\qquad F = J_1\left[\overline{V}u_1 + u_0\left(\overline{L}\,\overline{V} - \frac{d\overline{V}}{d\nu}\right)\right]$$

si l'on part de $\overline{(29)}$ et :

(99 *bis*) $$J_1 f\overline{V}(u_1 + \overline{L}u_0),$$

si l'on part de $\overline{(29\ bis)}$.

Ici encore, il ne s'introduit donc pas de dénominateur θ_0; le résultat est holomorphe [1] même pour $c = 0$ et contient encore c (mais non plus c^2) en facteur. Le coefficient du premier terme (c'est-à-dire de c) s'obtiendra comme tout à l'heure, c'est-à-dire est donné par la formule (98), avec la valeur (99) ou (99′) de F.

179 *bis*. Le calcul des termes contenant $\frac{d}{d\nu}$ est immédiat si on prend la formule sous la forme $\overline{(29\ bis)}$. Il suffit d'imaginer que le calcul est fait, non seulement en ce qui concerne S, mais aussi pour la surface auxiliaire S_ν : le résultat sera une fonction analytique, non seulement des variables ci-dessus mentionnées, mais aussi de ν, et la différentiation par rapport à ce dernier ne donne par conséquent aucune difficulté.

Avec les hypothèses particulières faites au n° **172** sur le choix des variables, la surface auxiliaire S_ν sera $t = $ const.

180. On peut vérifier le même fait directement et même calculer plus aisément le résultat, en partant, cette fois, de la formule $\overline{(29)}$. Le seul terme qui présente des circonstances nouvelles est évidemment le dernier terme (83), soit :

(C) $$\frac{1}{(m_1-2)\,!}\,\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}_{(\gamma=0)}\ \mathbf{S}_\sigma\ u_0\ \overline{V}\ \frac{d\Gamma}{d\nu}\ \overline{d\sigma_\gamma}\,.$$

La quantité à multiplier par l'élément $d\Omega_{m-2}$ est ici

$$\Phi\ \frac{(\theta-\mu)^{m-2}|\theta'_0+\mu\theta'_1+\mu^2\theta'_2+\dots|}{2\left(\theta-\mu+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}\ \frac{d\Gamma}{d\nu},$$

$$\Phi = J_1\ u_0\overline{V} = \Phi\ (x\,;a)\,.$$

---

(1) Fait évident *a priori*, sans quoi les termes (B) de (83) ou de (83 *bis*) seraient infinis au voisinage de S, et le problème de Cauchy n'aurait pas de solution en général.

Le facteur $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ a pour terme de moindre degré (toujours pour x voisin de a) la différence $-2(c-t)$, soit ici $-2c$, puisqu'on se place sur la surface S. Un nouveau facteur c apparaît donc de ce fait, portant le degré d'homogénéité minimum à $m-2=2m_1-2$; mais, par contre, on doit prendre $h'=m_1-1$. Nous voyons donc bien qu'il n'apparaîtra pas de puissance négative de c; mais, cette fois, il y aura un terme indépendant de c, savoir, au signe près [en tenant compte de ce que, dans (C), ne figure, en dénominateur de la dérivée $(m_1-1)^{\text{ième}}$, que la factorielle $(m_1-2)!$] :

$$\text{(98}'\text{)} \qquad \frac{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdot\frac{1}{2}}{(m_1-2)!}\Phi_0=(m_1-1)\,C_{m_1-1}\,\Phi_0$$

Il faudrait, ici, introduire le facteur $(-1)^{m_1-1}$, étant donnée la nouvelle valeur de h'. Mais comme l'expression qui vient d'être obtenue pour $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ comporte un signe $-$, nous retrouvons exactement la valeur (98′) si, comme plus haut, nous écartons le facteur $(-1)^{m_1}$.

Remarque. — Tous ces calculs subsistent si les diverses données (coefficients de l'équation et données de Cauchy), au lieu d'être analytiques, sont simplement supposées régulières. On pourra également en déduire (par différentiation sous les signes **SSS**, **SS** ou **S**) les valeurs des dérivées premières et secondes de u, pourvu que les coefficients de l'équation et les données de Cauchy admettent elles-mêmes des dérivées partielles jusqu'à un ordre suffisamment élevé.

De plus, il suffira de connaître ces dernières dérivées ou d'en avoir des valeurs approchées pour calculer les valeurs exactes ou approchées de u ou de ses dérivées premières ou secondes.

181. Une conséquence des calculs qui précèdent peut encore être notée : ils nous permettent de vérifier directement que la solution donnée par la formule $\overline{(29)}$ ou $\overline{(29\ bis)}$ remplit bien, à la frontière S, les conditions de Cauchy, fait que nous avons

établi d'une manière générale au n° **145**, mais sans pouvoir nous passer (Cf. **117**) d'une intervention du théorème de Cauchy-Kowalewsky.

Il n'y a d'ores et déjà aucune difficulté en ce qui regarde la première d'entre elles. Parmi les termes qui viennent d'être calculés, un seul ne s'annule pas avec c, à savoir (98′) (n° préc.), qui doit être réduit à sa valeur pour x confondu avec a et intégré par rapport aux φ, c'est-à-dire multiplié purement et simplement par Ω_{m-2}, soit :

$$(100) \qquad (m_1 - 1) C_{m_1-1} \Omega_{m-2} u_0,$$

puisque J_1 et $\overline{V}$ se réduisent à l'unité lorsque les points x et a coïncident.

Le coefficient numérique est précisément (28), au facteur $(-1)^{m_1}$ près dont il a déjà été tenu compte. On a donc, en chaque point de S, $u_a = u_0$ et la première condition de Cauchy est bien vérifiée.

Dans la dérivée $\frac{\partial u}{\partial c}$, le deuxième terme (83) fournit une première partie non nulle avec c, savoir le coefficient de c, donné par les formules (98), (99), avec multiplication par Ω_{m-2}, soit :

$$(100\ bis) \qquad (m_1 - 1)\ C_{m_1-1}\ \Omega_{m-2} \left(u_1 \overline{V} + u_0 \overline{L} - u_0 \frac{d\overline{V}}{dv}\right).$$

expression dans laquelle on doit encore supprimer le coefficient numérique détruit par (28). Le terme en u_1 donne bien la valeur voulue de la dérivée considérée. Il reste à s'assurer que les termes en u_0 sont détruits par ceux que nous allons trouver en dérivant (83 C).

La seule difficulté est — comme dans tous les problèmes analogues tels que les pose, par exemple, la théorie du potentiel — occasionnée par la dérivation de ce dernier terme. Il est nécessaire, à ce point de vue, de calculer, dans l'expression

$$(101) \qquad \Phi \frac{d\Gamma}{dv} \frac{|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \mu^2\theta'_2 + \dots| (\theta - \mu)^{m-2}}{2\left(\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}$$

$$= J_1 u_0 \overline{V} \frac{d\Gamma}{dv} \frac{|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \dots| (\theta - \mu)^{m-2}}{2\left(\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}$$

qui figure en facteur de $d\Omega_{m-2}$ sous le signe **S**, les termes de degré d'homogénéité égal à 1, et, à cet effet, de considérer, dans chacun des développements que cette expression contient, non

plus le premier terme qui est intervenu dans le calcul de (93 *bis*), mais celui ou ceux dont le degré (toujours degré global en θ_0, μ) est supérieur d'une unité à celui-là.

Le second terme Φ_1 du développement de la quantité :

$$\Phi = J_1 u_0 \overline{V} = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \ldots.$$

ne donne rien et on peut même faire d'emblée, dans la fonction Φ,

$$x^1 = a^1,\ x^2 = a^2,\ \ldots.\ x^{m-1} = a^{m-1}.$$

Remarquons, tout d'abord, en effet, que la variable t doit ici recevoir la valeur zéro. Les variables x^i, pour $i = 1, 2, \ldots, (m-1)$, pourront être remplacées par les expressions (76) où les a^i seront constants et c variable, développements que nous pourrons réduire à $a^i + X^i$, puisque nous pourrons encore négliger tout ce qui élève le degré d'homogénéité de plus d'une unité. Pour la même raison, le développement de Taylor de Φ suivant les puissances des $(x^i - a^i)$ pourra être borné à ses termes du premier ordre : il sera donc linéaire par rapport aux X^i, c'est-à-dire par rapport aux ξ_i, soit (en assimilant encore θ à $c - t = c$) :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, 0;\ a^1, a^2, \ldots\ a^{m-1}, c)\\ &= \Phi(a^1, \ldots, a^{m-1}, 0;\ a^1, \ldots\ a^{m-1}, c) + \sum{}' \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a \xi_i\\ &= \Phi_a + (\theta - \mu)\sum{}'\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a e_i\\ &= \Phi_a + (c - \mu)\sum{}'\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a e_i,\end{aligned}$$

le signe $\sum{}'$ désignant une sommation dans laquelle l'indice i prend les valeurs $1, 2, \ldots, m-1$ seulement.

Les coefficients des e_i pouvant ainsi être considérés comme indépendants des φ, l'intégration par rapport à ces dernières variables donnera un résultat nul, en vertu de (87). Le seul terme à inscrire de ce chef est donc celui qu'on obtient en différentiant directement Φ par rapport à la variable c, c'est-à-dire en remplaçant $J_1\overline{V}$ par $\frac{\partial}{\partial c}(J_1\overline{V})$, soit (puisque J_1 et $\overline{V}$ se réduisent à l'unité en a) :

$$(102)\qquad u_0\left(\frac{\partial J_1}{\partial c} + \frac{\partial\overline{V}}{\partial c}\right) = u_0\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log|\Delta|}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial\overline{V}}{\partial c}\right)$$

abstraction faite encore des facteurs numériques (28).

182. Pour traiter les autres éléments de la quantité (101), nous pourrons supposer les variables choisies de manière à donner à l'élément linéaire **H** la forme (79) du n° **172**, et cela sans avoir égard à l'objection formulée à cet endroit, puisque nous nous plaçons au voisinage immédiat de la surface initiale S. En vertu de la forme de l'équation (80), la valeur de t s'écrira :

$$c - t = \theta - \frac{1}{4}\, \mathbf{H}'\,(X^1, X^2, \dots X^{m-1}) + \dots$$

avec

$$(103) \qquad \mathbf{H}'(X) = \mathbf{H}'(X^1, \dots, X^{m-1}) = \sum_{i,\,k\,=\,1}^{m-1} \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} X^i X^k = \sum{}' \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} X^i X^k$$

(la somme $\sum'$ se rapportant, comme ci-dessus, aux valeurs 1, 2, ..., $m - 1$ des indices) ou, en passant aux variables ξ,

$$(104) \qquad c - t = \theta - \frac{1}{4}\, \mathcal{H}\left(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}\right) + \dots$$

les termes remplacés par des points étant tous de degré supérieur au second en θ, ξ et la forme

$$\sum{}' \mathcal{H}_{ik}\xi_i\xi_k = \mathcal{H}\,(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) = \mathbf{H}'\Big(l_{11}\,\xi_1 + l_{12}\,\xi_2 + \dots, + l_{1,m-1}\,\xi_{m-1}, \dots, l_{m-1,1}\,\xi_1 + \dots + l_{m-1,\,m-1}\,\xi_{m-1}\Big)$$

étant celle qu'on déduit de **H**' par la substitution (78).

Dans ces conditions, les développements (89), (90), (91) deviendront respectivement

$$(89') \qquad c - t = \theta - \frac{(\theta - \mu)^2}{4}\, \mathcal{H}\,(e_1, e_2, \dots e_{m-1}) + \dots = \theta - \frac{(\theta - \mu)^2}{4}\, \mathcal{H}\,(e) + \dots$$

$$(90') \qquad \theta = c - t + \frac{(c - t - \mu)^2}{4}\, \mathcal{H}\,(e) + \dots$$

de sorte que

$$\theta_0 = c - t + \frac{(c-t)^2}{4} \mathcal{H}(e) + \dots,$$
$$\theta_1 = -\frac{\theta_0}{2} \mathcal{H}(e) + \dots,$$
$$\theta_2 = \frac{1}{4} \mathcal{H}(e) + \dots$$

(91′) $$\gamma = 2\mu \left[\theta_0 + \left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu\theta_0}{2}\right) \mathcal{H}(e) + \dots\right] - \mu^2$$

les termes remplacés par des points étant du troisième ordre au moins dans (89′), (90′), du quatrième dans (91′).

Pour le facteur de $\frac{1}{2}\Phi \frac{d\Gamma}{d\nu}(\theta-\mu)^{m-2}$ dans (101), il vient

$$\frac{|\theta'_0 + \mu\theta'_1 + \mu^2\theta'_2 + \dots|}{\theta - \mu + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu}} = \frac{1 + \frac{\theta-\mu}{2}\mathcal{H}(e)}{(\theta-\mu)\left[1 - \frac{\mu}{2}\mathcal{H}(e)\right]}$$
$$= \frac{1}{\theta-\mu}\left[1 + \frac{\theta}{2}\mathcal{H}(e) + \dots\right]$$
$$= \frac{1}{\theta-\mu}\left[1 + \frac{\theta_0}{2}\mathcal{H}(e) + \dots\right]$$

183. La quantité $\frac{d\Gamma}{d\nu} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}$ s'évaluera par la relation (Cf. Liv. II, **58**)

(105) $$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = 2P_m = 2sp_m = 2s\left[p_{0m} + s\left(\frac{dp_m}{ds}\right)_0 + \dots\right]$$

dans laquelle p_{0m}, d'après la formule (27) du Liv. II, n° **55**, n'est autre que $\left(\frac{dt}{ds}\right)_0$ (de sorte que $sp_{0m} = -\theta$) pendant que $\frac{dp_m}{ds}$ est donné par la dernière équation (L_2) du même numéro, soit

(106) $$\left(\frac{dp_m}{ds}\right)_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{A}'(p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0,(m-1)}),$$

en désignant par **A′** la forme quadratique

$$\mathbf{A}'(p) = \sum' \frac{\partial A^{ik}}{\partial t} p_i p_k.$$

Il est tout indiqué de rechercher la relation qui existe entre cette forme **A′** et la forme **H′** précédemment écrite. Nous savons que, moyennant les relations

$$(107) \qquad p_i = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{x}^i},$$

on a :

$$(108) \qquad \sum{}' \mathrm{A}^{ik} p_i p_k = \sum{}' \mathrm{H}_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

Je dis que, dans les mêmes conditions, on a :

$$(109) \qquad \mathbf{A}'(p) = \mathbf{A}'(p_1, \ldots, p_{m-1}) = -\mathbf{H}'(\dot{x}).$$

Pour le voir, soit δt une différentielle, et différentions la formule (108) en laissant les $\dot{x}$ constants, les p étant, dès lors, en général, variables de par les formules (107). Le premier membre de (108) variera, dès lors, pour deux raisons, savoir à cause de la variation des p et à cause de la variation des coefficients A. Tenant compte séparément de ces deux causes de variation, il vient :

$$\delta \mathbf{H}(\dot{x}) = \mathbf{H}'(\dot{x})\delta t = \mathbf{A}'(p) + \sum{}' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_i} \delta p_i = \mathbf{A}'(p) + 2\Sigma' \dot{x}^i \delta p_i$$
$$= \mathbf{A}'(p)^{\bullet} + 2\delta \mathbf{H},$$

ce qui est bien la relation (109).

La valeur (105) de $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ devient ainsi, en tenant compte des formules (86) et de la signification des variables normales X :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -2(\theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \ldots) + \mathbf{H}'(\mathrm{X})$$
$$= -2(\theta_0 + \mu\,\theta_1 + \mu^2\theta_2) + (\theta - \mu)^2\, \mathcal{H}(e)$$

ou, d'après (91′),

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -2c + \frac{(c-\mu)^2}{2}\mathcal{H}(e) = -2c + \frac{(\theta-\mu)^2}{2}\mathcal{H}(e).$$

à l'ordre près qui nous intéresse actuellement, c'est-à-dire à des termes près du troisième ordre en c, μ.

184. Finalement, le coefficient de Φ dans la quantité (101) est (à l'ordre qui nous intéresse)

$$\left[-2c + \frac{(\theta - \mu)^2}{2} \mathcal{H}(e)\right] \frac{\left[1 + \frac{\theta_0}{2} \mathcal{H}(e)\right]}{2(\theta - \mu)} (\theta - \mu)^{m-2}$$

ou, plus simplement :

$$(110) \quad -\left[c + \frac{c^2}{2} \mathcal{H}(e)\right] (\theta - \mu)^{m-3} + \frac{(\theta - \mu)^{m-1}}{4} \mathcal{H}(e)$$

Cette quantité se traite évidemment comme les précédentes. Toutefois, dans l'expression

$$\theta - \mu = \sqrt{\theta^2 - \gamma},$$

nous ne devons plus, au second membre, remplacer θ par θ_0, mais bien par l'expression (90'), ce qui donne

$$\theta^2 - \gamma = \left[c + \frac{(c - \mu)^2}{4} \mathcal{H}(e)\right]^2 - \gamma$$

$$= c^2 - \gamma + \frac{c}{2} (c - \mu)^2 \mathcal{H}(e)$$

et [le facteur $(c - \mu)^2$ étant ici assimilable à $c^2 - \gamma$ à des termes d'ordre supérieur près] se réduit à :

$$(111) \qquad \theta^2 - \gamma = (c^2 - \gamma) \left[1 + \frac{c}{2} \mathcal{H}(e)\right]$$

C'est cette quantité qui est élevée à la puissance $\frac{m-3}{2}$ dans le premier terme de (110), tandis qu'il suffit d'élever $(c^2 - \gamma)$ à la puissance $\frac{m-1}{2}$ dans le second. Le coefficient de $(-\gamma)^{m_1-1}$ dans $(c^2 - \gamma)^{\frac{m-3}{2}}$ étant, comme nous l'avons dit, $\frac{C_{m_1-1}}{c}$ et dans $(c^2 - \gamma)^{\frac{m-1}{2}}$, $(m - 1) C_{m_1-1} \cdot c$, on voit, en remplaçant

$$\left[1 + \frac{c}{2} \mathcal{H}(e)\right]^{\frac{m-3}{2}} \text{ par } 1 + \frac{m-3}{4} c \mathcal{H}(e)$$

et

$$\left[1 + \frac{c}{2} \mathcal{H}(e)\right]^{\frac{m-1}{2}} \text{ par } 1 + \frac{m-1}{2} c \mathcal{H}(e),$$

que les termes en $\mathcal{H}(e)$ disparaissent et que, dans le facteur (110), le coefficient de $(-\gamma)^{m_1-1}$ est $-C_{m_1-1}$ [donc celui de γ^{m_1-1}, $(-1)^{m_1}C_{m_1-1}$] à des termes *second* ordre près en c, d'où résulte que ce facteur n'apporte aucun terme à la dérivée cherchée $\frac{\partial u}{\partial c}$.

La dérivée du dernier terme (83) se réduit donc à l'expression

$$\left[\frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial c} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log|\Delta|}{\partial c}\right] \tag{102}$$

obtenue plus haut par dérivation de la quantité Φ du n° **180.**

Ce calcul termine l'évaluation que nous avions en vue. Dans le terme (100 *bis*) qui provient de la différentiation du second terme (83), on peut (1), pour $c = o$, remplacer $\frac{d\overline{V}}{d\nu} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t}$ par $-\frac{\partial \overline{V}}{\partial c}$. On voit donc que les termes en u_0 disparaissent de la valeur de $\frac{\partial u}{\partial c}$ et que l'expression (29) du n° **144**, ou l'expression équivalente (29) que nous lui avons substituée aux n^{os} **174-175**, satisfait aux conditions de Cauchy, du moment que, les deux fonctions $\overline{V}$ et $\overline{\mathcal{V}}$ sont régulières, la première satisfaisant, pour x et a confondus en un même point de la surface S, aux deux relations

$$\overline{V} = 1\,, \qquad 2\frac{\partial \overline{V}}{\partial c} = -\frac{\partial J}{\partial c} + -\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c} + \overline{L}\,. \tag{112}$$

185. Que la fonction $\overline{V}$ possède effectivement cette double propriété, c'est ce qui est nécessaire pour que le problème de Cauchy puisse avoir une solution, et nous savons qu'il en a une dès que les données sont analytiques. Mais, ici encore, on peut rechercher, du même fait, une démonstration directe, indépendante du théorème de Cauchy-Kowalewski.

La première des relations (112), lorsque le point x se confond avec le sommet du conoïde, a lieu par définition.

Pour calculer, dans les mêmes conditions, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\overline{V}$, nous pourrons la

(1) L'égalité $\overline{V} = 1$ étant vérifiée identiquement (en $a^1, \ldots, a^{m-1}, c$) pour $x^i = a^i$, $t = c$, il en est de même de $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial c} = 0$.

réduire au premier terme $\overline{V}_0$ de son développement, puisque les autres contiennent tous en facteur Γ, lequel est du second ordre. Or, nous avons précédemment (**169**) trouvé [1] :

$$\overline{V}_0 = \sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_a : \left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathcal{B}_1 dx^1 + \dots + \mathcal{B}_m dx^m}$$

où J est le jacobien des x par rapport aux paramètres λ, s du Livre II.

Ceci peut encore s'écrire

$$\overline{V}_0 = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_x}}\, \frac{1}{\sqrt{\dfrac{D(x^1, x^2, \dots, x^m)}{D(X^1, X^2, \dots, X^m)}}}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathcal{B}_1 dx^1 + \dots + \mathcal{B}_m dx^m}$$

$$= \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_x}}\, \frac{1}{\sqrt{J}}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathcal{B}_1 dx^1 + \dots + \mathcal{B}_m dx^m},$$

comme on le voit en formant le Jacobien des $X^i = s\dot{x}_0{}^i$ par rapport aux variables λ, s, lequel se réduit au produit de s^{m-1} par le second membre de la relation (73) (n° **169**). Or, le produit $\overline{V}_0\sqrt{J}$ (équivalent à $\overline{V\sqrt{J}}$) qui intervient dans la relation précédente, a précisément, au sommet du conoïde (toujours en vertu de ce qu'alors $\overline{V}_0 = J = 1$), pour dérivée la moitié de la combinaison $2\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial c} + \dfrac{\partial J}{\partial c}$ qui figure dans la seconde relation (112); et, d'autre part, on a (sensiblement) :

$$\overline{V}\sqrt{J} = \overline{V}_0\sqrt{J} = 1 + \sum\left[\left(\frac{1}{2}\,\mathcal{B}_i + \frac{1}{4}\,\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^i}\right)(x^i - a^i)\right].$$

Le terme correspondant à $i = m$ est celui qui nous intéresse, et donne bien le résultat prévu, étant donné qu'on a ici $\mathcal{B}_m = \overline{B^m}$ et que (voir Appendice I, n° **211**) L a également cette valeur $\overline{B^m}$.

Remarque. — Ici encore, nos calculs ne supposent pas les données analytiques, mais seulement dérivables jusqu'à un certain ordre, que les raisonnements qui précèdent permettraient même de préciser.

---

(1) La formule ici écrite diffère de la formule (72) du n° **169** par le changement de signe de l'exposant de e, en raison de ce que nous raisonnons sur la fonction $\overline{V}_0$ (correspondant à l'équation adjointe) et non sur $\overline{U}_0$ (tout en ne permutant pas, cette fois, les variables a et x).

186. Nous avons prouvé, jusqu'ici, l'existence et l'analyticité de la solution u à l'intérieur d'une partie quelconque $\mathcal{R}'$ de $\overline{\mathcal{R}}$ limitée de manière que le demi-conoïde rétrograde [1] de sommet quelconque a compris dans $\mathcal{R}'$ soit, avec $t = 0$, la frontière d'un volume intérieur à la région de définition de $\mathcal{V}$, par exemple intérieur à la région de validité des opérations du n° **62**. On s'affranchit de cette restriction par le procédé habituel de prolongement analytique.

La conclusion est acquise, en raison des hypothèses faites sur les variables, si on introduit la limitation $|t| < T$, en désignant par T une constante positive convenablement choisie : cette dernière peut en fait être fixée — et ceci une fois pour toutes dans la région $\mathcal{R}$ toute entière, de telle manière que $|t - c| \leqslant T$ (avec $\Gamma > 0$) implique l'inégalité

$$\left|\Gamma\right| < \frac{1}{a}, \left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2$$

du n° **63**, et par conséquent, la convergence de la série qui donne $\mathcal{V}$.

Or, comme les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t = 0$, nous sont données, et qu'elle sont analytiques, on est assuré de pouvoir, à l'aide de ce qui précède, calculer les valeurs de ces mêmes quantités pour n'importe quel t compris entre o et T, les valeurs correspondant à $t = T$ étant de nouveau holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ autour d'un point quelconque (1) du plan $t = T$ compris dans $\mathcal{R}$. Mais de telles valeurs analytiques de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ permettent de poser un nouveau problème de Cauchy dont les données sont portées par le plan $t = T$: la solution sera définie par ce qui précède, et sera holomorphe au moins jusqu'à $t = 2T$ (du moins dans la partie comprise dans $\mathcal{R}$); en continuant de la même façon, on peut atteindre tout plan $t =$ const. (s'il contient des points de $\mathcal{R}$).

(1) La partie utile du demi-conoïde issu d'un tel point est, ainsi qu'on l'a dit il y a un instant, supposée entièrement à l'intérieur de $\mathcal{R}$.

187. Le résultat ci-dessus et la méthode employée pour le démontrer rappellent évidemment un raisonnement analogue de la théorie des équations différentielles ordinaires et la conclusion correspondante, savoir : *les solutions d'une équation analytique linéaire différentielle (linéaire) ne peuvent admettre d'autres singularités que celles des coefficients eux-mêmes.*

Une des démonstrations de ce dernier théorème [1] consiste précisément à observer que le rayon de convergence du développement d'une quelconque des solutions en question autour d'un point quelconque (ou, tout au moins, une limite inférieure de ce rayon) peut s'obtenir sans savoir *quelle* solution de l'équation on prend. De même, ici, on utilise le fait qu'on peut donner *a priori* un intervalle de valeurs de t auquel on peut étendre la définition de la solution.

Une telle analogie pourrait conduire à penser qu'on pourrait atteindre le même résultat à l'aide des méthodes primitives qui ont été généralement appliquées au problème de Cauchy, c'est-à-dire du raisonnement classique de Cauchy-Kowalewsky. Cependant, ceci serait une erreur : en d'autres termes, le rayon de convergence du développement de la solution du problème de Cauchy (relatif à $t =$ const.) par rapport à t, quand on l'obtient par le Calcul des limites, doit dépendre, non seulement des développements des coefficients, mais aussi des rayons de convergence des développements (par rapport aux autres variables x_1, x_2, ...) des données u_0 et u_1.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la conclusion serait commune aux équations hyperboliques et elliptiques (les premières étant même majorantes des dernières dans le mode classique de calcul qui sert à la démonstration du théorème fondamental de Cauchy). Mais tel n'est pas le cas, comme on le voit, pour l'équation de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(1) Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse* de Jordan, t. III, 1887, nº 92, p. 108.

si on considère les exemples les plus simples, tels que :

$$u = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \left(= \text{partie réelle de } \frac{1}{1-x-iy}\right),$$

dont la valeur, pour $x = 0$ $\left(\text{savoir } \frac{1}{1+y^2}\right)$, ainsi que la valeur de sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\left(\text{savoir } \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\right)$ est holomorphe pour tout y réel et qui, cependant, admet la singularité $x = 1$, $y = 0$.

C'est évidemment sous une autre forme, le paradoxe étudié au Livre I, chap. II qui reparaît.

189. Nous avons ainsi démontré que la solution du problème de Cauchy à données analytiques existe certainement et est holomorphe dans toute la région quelconque $\mathcal{R}$ satisfaisant aux conditions ci-dessus et dans laquelle la solution élémentaire existe elle-même et est analytique. Mais, que peut-on dire de cette dernière? Le numérateur de la solution élémentaire existe-t-il et est-il holomorphe tant que : 1° les coefficients de l'équation sont eux-mêmes holomorphes, le discriminant de **A** étant constamment différent de zéro; 2° les équations (29) du Livre II, n° **57** peuvent être résolues d'une façon univoque et continue, leur Jacobien étant différent de zéro, et que, par conséquent, les deux points a et x peuvent être joints par une géodésique parfaitement déterminée, située dans $\mathcal{R}$ et variant continûment en fonction des coordonnées de ces points?

En premier lieu, on peut observer que ces hypothèses sont suffisantes pour la construction de chacun des coefficients successifs U_h par les calculs du Livre II, n° **62**. De plus, il n'y a aucune difficulté à montrer que ces fonctions seront holomorphes dans la région $\mathcal{R}$ (ce qui, du reste, va apparaître plus loin).

U lui-même se déduit des U_h à l'aide du développement

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \dots + U_h\Gamma^h + \dots$$

Nous allons voir que ce développement converge non seulement autour de a, ainsi qu'on l'a vu au Livre II, mais aussi pour tout point de la région (γ) tel que Γ soit suffisamment petit, c'est-à-dire dans le voisinage du conoïde caractéristique (ou, plus exactement, de la partie de ce conoïde qui est contenue dans $\mathcal{R}$).

Dans ce but, c'est-à-dire pour obtenir des limites supérieures pour les $|U_h|$, nous reprendrons le « Calcul des limites » du n° **63** pour l'appliquer non seulement aux développements autour de a, mais aussi aux développements autour de n'importe quel point intérieur à $\mathcal{R}$.

Comme au n° **63**, on prendra les variables normales relatives à a (de sorte que les géodésiques de ce point sont représentées par des lignes droites), la somme des valeurs absolues de ces variables étant encore désignée par σ, et on changera d'inconnue de manière à ce que le premier terme U_0 de la série soit :

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}} \left(\text{ou } \overline{U_0} = 1\right)$$

De plus, et uniquement pour simplifier la notation [1], on peut admettre qu'on a fait un changement de coordonnées de manière à faire passer un des axes — soit l'axe des x_m — par un point x' autour duquel on peut étudier les développements de Taylor : la variable x_m sera remplacée par y, dont la valeur en x' sera désignée par y', et on a à considérer des développements suivant les puissances de

---

(1) Il serait facile de répéter le raisonnement du texte sans ce choix particulier d'axes. On développerait les fonctions autour de

$$(x_1', x_2', \ldots, x'_m)$$

en posant :

$$x_i = x_i' + X_i.$$

Les coefficients des seconds membres de (113) et de (114) (développés suivant les puissances de X) seraient alors fonctions des $x_1', \ldots, x'_m$, ces derniers étant remplacés par $sx_1', \ldots, sx'_m$ dans la quantité à intégrer de (115), et σ' serait :

$$|X_1| + |X_2| + \ldots\ldots + |X_m|.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et de $y - y' = Y$. Pour un coefficient quelconque A de l'équation, ce développement sera

$$(113) \qquad A = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} A_{k_1 \ldots k_m}(y')\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m}.$$

En supposant que toutes les quantités A sont holomorphes — et, par conséquent, uniformément holomorphes — dans $\mathcal{R}$, on peut admettre que toute les séries (121) admettent comme majorante commune celle du n° **63**

$$A << \frac{\alpha}{1 - \frac{\sigma'}{r}},$$

laquelle pourra être supposée indépendante de la position du point x, donc de y' (qui définit la position de x' sur l'axe des y) et aussi de notre rotation d'axes — à ceci près que σ sera remplacé par $\sigma' = |x_1| + \ldots + |x_{m-1}| + |Y|$. On en déduit comme au n° **63**, que si

$$\frac{K_h}{\left(1 - \frac{\sigma'}{r}\right)^{2h}}$$

est une majorante du développement de U_h autour de x' (cette majorante étant encore supposée indépendante de y'), le développement de $\mathcal{F}(U_h)$, — soit (les coefficients étant encore fonctions de y') :

$$(114) \qquad \mathcal{F}(U_h) = \Psi^{(h)} = \sum \psi^{(k)}_{k_1 k_2 \ldots k_m}(y')\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m},$$

admettra la majorante

$$(114\ bis) \qquad \frac{2h(2h+1)\alpha K_h}{\left(1 - \frac{\sigma'}{r}\right)^{2h+3}}.$$

On doit ensuite former les intégrales (44') du n° **62** (avec $U_0 = \text{const.}$). Le chemin d'intégration est la ligne

droite joignant l'origine au point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y' + Y)$ de sorte qu'on peut représenter les coordonnées d'un point arbitraire de ce chemin par $sx_1, sx_2, \ldots, s(y' + Y)$, où le paramètre s varie depuis zéro jusqu'à la valeur finale 1; s est précisément la variable d'intégration de cette équation (44'). Pour chaque valeur de s, la quantité (115) sera développée suivant la formule de Taylor depuis le point initial $(o, o, \ldots, o, sy')$, c'est-à-dire en remplaçant, dans (114), $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y', Y$ par $sx_1, sx_2, \ldots, sx_{m-1}, sy', sY$. En intégrant par rapport à s, on trouve le développement cherché de U_{h+1}, savoir

(115) $$U_{h+1} = \frac{\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} \int_0^1 s^{h+k_1+\ldots+k_m} \psi^{(h)}_{k_1 \ldots k_m}(sy') x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m} ds}{4(p+h+1)}$$

et on obtient une majorante pour cette expression si on remplace chaque $\Psi^{(h)}$ par la valeur (114 *bis*) correspondante. Comme cette dernière est indépendante de y' et peut sortir du signe $\int$, on obtient la même majorante finale qu'au n° **63** (au remplacement près de σ par σ'), et on voit que la série qui donne U converge quand on a

$$|\Gamma| < \frac{1}{a'}\left(1 - \frac{\sigma'}{r}\right)^2$$

inégalité qui prend une forme complètement indépendante de notre rotation d'axes [1]. Si l'on y remplace σ' par la quantité plus grande $\sqrt{m}D$, en désignant par D la distance entre x et x', on prendra le point x' sur le conoïde lui-même et on lui fera occuper successivement toutes les positions possibles sur ce conoïde : dans ces conditions, un point x qui lui est associé de telle manière que $\sqrt{m}D < \frac{1}{2} r$ peut prendre toute position telle que Γ soit inférieur à une

(1) On se limite ici au domaine réel.

constante positive γ' convenablement choisie (car tous les points réels compris entre les deux hyperquadriques $\Gamma = \gamma'$ et $\Gamma = -\gamma'$ dans la région finie $\mathcal{R}$, sont à une distance du conoïde plus petite que $\frac{1}{2} r$ si γ' est suffisamment petit).

Par conséquent, U existera certainement et sera holomorphe toutes les fois que Γ sera plus petit que γ, en appelant ainsi le plus petit des deux nombres γ' et $\frac{1}{4\alpha'}$. On remarquera que ce domaine d'existence n'est plus très petit en tous sens; le point x n'est pas assujetti à être très voisin de a, mais seulement à être très près d'être en onde avec lui.

190. Si on combine maintenant le résultat ci-dessus avec ceux de la méthode précédemment exposée, on pourra étendre la définition de U à toute la partie de la région $\mathcal{R}$ (cette dernière satisfaisant encore aux mêmes hypothèses) qui est à l'intérieur du conoïde, de sa nappe directe par exemple. Plus exactement, on atteindra tout point x tel que le plan $t =$ const. passant par ce point (t ayant la même signification que ci-dessus) délimite avec Γ un volume entièrement compris dans $\mathcal{R}$.

Pour cela, désignons par T un nombre positif tel que les calculs du n° **63** définissent U toutes les fois que, d'une part, $\Gamma(x; a) \geqslant 0$ et que, de l'autre, la différence $|t - c|$ des t relatifs à x et à a est plus petite que T. D'un autre côté, remarquons que si on trace le demi-conoïde rétrograde à partir d'un point quelconque x' intérieur à Γ et tel que $\Gamma > \frac{\gamma}{2}$ et si on le coupe par le plan $t = t' - T$, le volume ainsi compris sera tout entier à l'intérieur du conoïde si le nombre positif T est suffisamment petit [1]. Admettons qu'il en est ainsi et admettons aussi qu'il est plus petit que les nombres désignés par la même lettre au n° **186**.

---

(1) Si on suppose, comme il est permis, que Γ est égal à $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots$, la condition que l'on devra imposer à T sera $T < \gamma : 4 \max. (t + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x^2_{m-1}})$.

Pour $o \leqslant t \leqslant T$ (et $\Gamma \geqslant o$, ce qui est implicitement entendu dans tout le raisonnement ci-dessous), U est défini par le n° **63**, et est holomorphe.

Pour $T \leqslant t \leqslant 2T$, deux cas peuvent se présenter. Ou le demi-conoïde rétrograde issu de x coupe le plan $t = T$ entièrement à l'intérieur de Γ : alors u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont connus dans toute la portion S_0 du plan $t = T$ ainsi obtenue, et, par conséquent, la valeur de u_x est donnée par les formules générales résolvant le problème de Cauchy, et elle est holomorphe, comme on l'a déjà exposé (¹); ou les bicaractéristiques rétrogrades issues de x peuvent couper Γ avant de rencontrer $t = T$; mais, par définition de la quantité T, ceci ne peut se présenter que si, en x, on a $\Gamma < \frac{\gamma}{2}$ et alors la valeur de U_x est définie par les calculs du n° précédent, et est holomorphe. De plus, les définitions sont valables simultanément dans une certaine région $\left(\frac{\gamma}{2} < \Gamma < \gamma\right)$ et coïncident toutes deux avec le prolongement analytique des valeurs de u déjà trouvées. On a donc une fonction analytique unique pour tout le domaine correspondant $o \leqslant t \leqslant 2T$ dans Γ.

Il est évident qu'on peut appliquer les mêmes opérations à $2T \leqslant t \leqslant 3T$; et ainsi de suite. On a donc ainsi complètement démontré la conclusion. U est holomorphe par rapport aux x et (pour les mêmes raisons que ci-dessus) aux a, dans toute la région commune à $\mathcal{R}$ et à l'intérieur du conoïde (en y adjoignant même le voisinage de la surface de ce conoïde).

191. La méthode, tant pour la définition de u que pour celle de U, a consisté à calculer ces quantités pour des points, — ou des « événements », comme on peut les appeler — éloignés, à l'aide de points intermédiaires suffi-

(1) Nous avons écrit les inégalités de manière à ce que S_0 soit toujours *strictement* intérieur à Γ dans le premier cas, en vertu de quoi non seulement U, mais même u, sont nécessairement holomorphes dans S_0.

samment rapprochés. On peut donc dire que ceci est une illustration de ce que nous avons appelé la « majeure de Huygens ».

Une étude complète des conséquences d'un tel principe [laquelle nécessiterait, toutefois, des recherches de plus longue haleine (1)] nous donnerait de nouvelles extensions de nos résultats. On pourrait même, de cette manière, mettre en évidence le fait remarquable que la condition que deux points quelconques x et a de $\mathcal{R}$ ne puissent être joints que par une seule géodésique, laquelle semble fondamentale, n'est *pas* nécessaire.

Nous nous contenterons, pour l'instant, de noter un point. Sans que la région $\mathcal{R}$ soit supposé vérifier la condition en question, supposons néanmoins (pour m pair) que les fonctions V et $\mathcal{V}$ existent et qu'elles soient analytiques dans $\mathcal{R}$. Dans ce cas, même si le point a est choisi à une telle distance de S que, dans le domaine compris entre Γ et S, la solution du premier système d'équations (29), n° **57**, cesse d'être possible d'une manière univoque [le Jacobien (30) du même n° s'annulant, par exemple, dans ce domaine ou même sur S_0] *toutes les intégrales des seconds membres de* (29) *ou de* (29 *bis*), *n°* **145**, *peuvent encore être définies.* La seule condition nécessaire pour cela est que chaque géodésique issue de a intérieure au conoïde ou lui appartenant coupe toujours S en un point déterminé et sous un angle fini.

Il suffirait, en effet, pour définir les intégrales en question, de les exprimer toutes à l'aide des variables normales ξ correspondant à a. Il est clair que nos nouvelles hypothèses n'empêchent pas chacune des intégrales du n° **174** d'une part, des nos **177-180** de l'autre, d'avoir un sens (les x étant encore des fonctions holomorphes des ξ, sans examiner si la réciproque est vraie ou non), et d'être une fonction holomorphe des a.

---

(1) Nous sommes revenus sur ce sujet dans plusieurs Mémoires ultérieurs : *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome LII (1924), p. 241; *Acta Mathematica*, tome XLIX, p. 203; *Journal de Mathématiques*, tome VIII (1929), p. 197; Congrès des Mathématiciens Slaves, Varsovie, 1929; *Acta Mathematica*, t. LIV, p. 247. — (Note de la traduction.)

La quantité totale 29 ou (29 *bis*) que l'on en déduit est une fonction holomorphe des a. Dans la région partielle $\mathcal{R}_0$ où les ξ sont des fonctions uniformes des x et des a, on a démontré par les calculs précédents qu'elle vérifie (E). Mais les valeurs de la même quantité en dehors de $\mathcal{R}_0$ (quoique intérieures à $\mathcal{R}$) sont le prolongement analytique des valeurs intérieures à $\mathcal{R}_0$. Par conséquent, *elles satisferont aussi à* (E), et représentent la solution du problème.

192. *Le cas non analytique.* — Supposons maintenant que les coefficients ne sont plus analytiques; ils seront cependant supposés réguliers, c'est-à-dire qu'ils admettront des dérivées par rapport à x jusqu'à un certain ordre suffisamment élevé. En fait, on sait, grâce aux propriétés des solutions de M. Tedone (Livre III), qu'une telle hypothèse est dans la nature des choses. Comme nous l'avons dit au Livre I, nous n'entreprendrons pas la détermination précise de l'ordre de dérivabilité postulé : il nous suffira d'être sûr qu'un tel ordre existe pour toute valeur de m.

Prenons encore m pair $= 2m_1$; soient toujours

$$\text{(E)} \qquad \mathcal{F}(u) = \sum \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum \mathrm{B}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{C}u = f$$

l'équation donnée, et

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathcal{G}(v) = 0,$$

son équation adjointe. En même temps, comme précédemment, nous considèrerons l'équation à $2m_1 + 1$ variables

$$\text{(E')} \qquad \mathcal{F}'(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,$$

dont l'adjointe est

$$(\mathcal{E}') \qquad \mathcal{G}'(v) = \mathcal{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Les coefficients seront supposés admettre des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre, ce qui peut s'exprimer en disant que, jusqu'aux éléments infinitésimaux de cet

ordre, ils ressemblent à des fonctions analytiques. L'existence des dérivées jusqu'à un certain ordre nous suffit évidemment pour pouvoir exécuter la première partie des calculs, c'est-à-dire la construction de la quantité Γ; et l'existence, pour les coefficients, de dérivées partielles jusqu'à un ordre déterminé quelconque impliquerait l'existence, pour cette quantité Γ, de dérivées partielles jusqu'à un certain ordre correspondant (voir Note Additionnelle, Livre II).

Reprenons maintenant la construction des quantités successives V_h (ou V_h'), telle que nous l'avons exposée Livre II. Quoique nous ne puissions continuer indéfiniment ainsi, nous pouvons évidemment calculer un certain nombre de ces quantités V_h : nombre d'autant plus grand que l'on admettra l'existence de plus de dérivées des coefficients (et, par conséquent, de Γ).

Supposons que ce calcul soit possible jusqu'aux termes du $(m_1 - 1)^e$ ordre en Γ ou en $\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2$ (les opérations relatives aux deux cas étant les mêmes, comme on l'a noté Livre II, à des coefficients numériques près) de sorte qu'on a, pour l'équation $(\mathcal{E}')$, le développement

$$[v'] = \frac{1}{\Gamma^{\nu m_1 - 1}} \sum_{h=0}^{m_1-1} V_h' \, \Gamma^{\nu h},$$

qui est identique au développement de v' donné au Livre II, n° **62**, au fait près qu'il est limité. Les termes correspondants relatifs à $(\mathcal{E})$ consisteront en :

1° la quantité V, au sujet de laquelle les calculs précédents du Livre II (ou de ce Livre ci, n° **135**) ne demandent aucune modification, à savoir :

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}_{m_1-1} \sum_{h=0}^{m_1-2} \frac{1}{\mathrm{C}_{m_1-h+1}} \, V_h' \, \Gamma^h ;$$

2° le *premier* terme $\mathcal{V}_{(0)}$ du développement de la quantité que l'on a précédemment appelée $\mathcal{V}$.

$[v']$ ne sera *pas* une solution de l'équation adjointe ($\mathcal{E}'$) mais les calculs du Livre II montrent que l'on a

$$(116) \qquad \mathcal{G}'([v']) = (-1)^{m_1}\,\Omega_{m-2}\,\frac{\psi}{\sqrt{\Gamma^\nu}},$$

ψ étant une quantité [1] finie, continue et même (si on admet l'existence des dérivées suivantes des coefficients) différentiable. De plus, cette quantité ψ est indépendante de z. Le coefficient $(-1)^{m_1}\Omega_{m-2}$, introduit pour simplifier les calculs qui suivent, est le même que celui du premier membre de la formule (7) (n° **135**), au facteur π près.

193. Envisageons maintenant le problème sous le point de vue d'Hilbert : c'est-à-dire que l'on va chercher si on peut résoudre le problème de Cauchy en n'ayant plus à sa disposition la vraie solution élémentaire, mais seulement la quantité $[v']$, solution élémentaire incomplète ou « parametrix » au sens d'Hilbert. Par conséquent, nous considèrerons à nouveau le problème de Cauchy pour (E) et, en même temps, le problème équivalent correspondant pour (E'); pour ce dernier, nous récrirons la formule fondamentale, dans laquelle, cette fois, v' sera remplacé par la parametrix $[v']$ obtenue ci-dessus.

La modification à effectuer dans la formule est évidente : elle consiste à tenir compte des valeurs (116) par l'addition d'une intégrale d'espace supplémentaire :

$$\mathbf{SSS}\int \frac{u\mathcal{G}([v'])}{\sqrt{\Gamma}}\,dx_1\,dx_2\,\ldots.\,dx_m\,dz$$

$$= (-1)^{m_1}\,\Omega_{m-2}\,\mathbf{SSS}\int \frac{u\psi}{\sqrt{\Gamma^\nu}}\,dx_1\,\ldots.\,dx_m\,dz$$

(l'emploi du signe $\lceil$ n'étant pas nécessaire ici).

En employant le même processus que précédemment

---

(1) $(-1)^{m_1}\Omega_{m-2}\,\psi = 2\mathcal{G}(V'_{m_1-1})$.

pour descendre à l'espace à $2m_1$ dimensions, on obtient $\left(\text{puisque } \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{\sqrt{\Gamma^{\nu}}} = \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{\sqrt{\Gamma - z^2}} = \pi\right)$:

$$(117) \qquad u = \mathrm{H} + \mathbf{SSS}_{(a)} u\psi \, dx_1 \, dx_2 \ldots . dx_m,$$

où, pour plus de simplicité, on a représenté par H la quantité définie par

$$(118) \qquad \frac{2(-1)^{m_1}\pi^{m_1-1}}{(m_1-2)!} \mathrm{H}_a = - \mathbf{SSS}_{(a)} \mathcal{V}_{(0)} f \, dx_1 \ldots . dx_m$$
$$- \mathbf{SS}_{\mathrm{S}_0} \mathcal{V}_{(0)} (u_1 + \mathrm{L}u_0) d\mathrm{S}$$
$$+ \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \Big[\mathbf{SSS}_2 f\mathrm{V} dx_1 \ldots . dx_m$$
$$+ \mathbf{SS}_2 \mathrm{V} (u_1 + \mathrm{L}u_0) d\mathrm{S} \Big]$$
$$- \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d}{d\nu} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_2-1}} \mathbf{SS}_2 u_0 \mathrm{V} d\mathrm{S}$$
$$+ \frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{\mathrm{S}_\nu} u_0 \mathcal{V}_{(0)} d\mathrm{S},$$

c'est-à-dire par la formule (29 *ter*) [qui est, ici, préférable à (29)], sauf que $\mathcal{V}$ est remplacé par son premier terme $\mathcal{V}_{(0)}$.

Dans les deux formules ci-dessus, les points a, x sont supposés être du même côté de S, côté que nous appellerons le « côté positif »; et (a), par exemple, en indice des signes **SSS**, représente le domaine précédemment désigné par T, savoir le domaine enclos, du côté positif de S, par le demi-conoïde rétrograde issu de a.

194. Nous avons à déterminer u à l'aide de l'équation (117). Elle appartient évidemment au type bien connu des *équations intégrales de seconde espèce*. Le noyau — savoir ψ — est fini, de sorte que la solution est donnée sans aucune difficulté par les méthodes classiques [1]. Même,

(1) V. Bôcher, *Introduction to the Study of Integral Equations*, Cambridge University Press, 1909, § 5; Fréchet et Heywood, *L'équation*

dans ce cas, *on aura affaire au type de M. Volterra*, en raison de la façon dont le domaine d'intégration dépend de $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et tend vers zéro quand ce dernier point s'approche de S; on peut le résoudre par la méthode primitive de Liouville, sans avoir besoin de recourir à l'algorithme de Fredholm : la quantité cherchée u sera donnée par les approximations successives

$$(119)\quad \left\{\begin{aligned} u^{(0)} &= \mathrm{H} \\ u_a^{(1)} &= \mathrm{H}_a + \mathbf{SSS}_{(a)} u_x^{(0)} \psi(x;\, a)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \\ u_a^{(2)} &= \mathrm{H}_a + \mathbf{SSS}_{(a)} u_x^{(1)} \psi(x;\, a)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_a^{(n)} &= \mathrm{H}_a + \mathbf{SSS}_{(a)} u_x^{(n-1)} \psi(x;\, a)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \end{aligned}\right.$$

u étant égal à $\lim_{n=\infty} u^{(n)}$.

Pour la raison indiquée tout à l'heure, ces approximations vont converger de la même manière que dans le cas de M. Volterra, c'est-à-dire pour toutes les positions possibles des points a et x (en onde ou sous onde l'un avec l'autre) à l'intérieur de $\mathcal{R}$, sans aucune limitation de distance entre ces deux points (contrairement à ce qui arrive en général pour l'équation à limites fixes).

Prenons encore la coordonnée t, en considérant une famille de surfaces à un seul paramètre S_t, de manière à ce que S_0 coïncide avec la surface S donnée; que, de plus, chaque surface S_t soit surface d'espace et coupe chaque conoïde caractéristique suivant une arête fermée. Sur une telle surface S_t quelconque, prenons comme élément $d\mathrm{S}_t$ le quotient de l'élément d'espace à m dimensions par dt, de sorte que :

$$d\mathrm{S}_t dt = d\mathrm{T} = dx_1\, dx_2 \ldots dx_m.$$

De plus, désignons par K_1 un maximum de l'intégrale [$(m - 1)$ uple] $\mathbf{SS}\, |\psi(x;\, a)|\, d\mathrm{S}_t$, étendue à la section d'un

de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique, Paris, Hermann, 1912, p. 35-42; Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris, Hermann, 1912, chap. I.

demi-conoïde rétrograde (ayant comme sommet un point quelconque a intérieur à $\mathcal{R}$) par une surface quelconque S_t. Si la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ est alors donnée, et que sa valeur absolue soit, sur chaque S_t, inférieure à $\Phi(t)$, la valeur absolue de l'intégrale

$$\mathbf{SSS}_T \varphi(x)\psi(x; a)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

prise dans le demi-conoïde rétrograde de sommet a (limité à S) admettra la limite supérieure

$$(120) \qquad \left|\mathbf{SSS}_T \varphi(x)\psi(x; a)\, dx_1 \ldots dx_m\right| < K_1 \int_0^c \Phi(t)\, dt,$$

c désignant la valeur de t en a.

Cette inégalité fournit la convergence requise, exactement comme dans les recherches de M. Volterra et dans la méthode classique de M. Picard pour l'équation différentielle ordinaire. La différence $W^{(n)} = u^{(n)} - u^{(n-1)}$ entre deux approximations consécutives satisfaisant à la relation

$$(119\ bis) \qquad W_a^{(n)} = \mathbf{SSS}\, \psi(x, a) W_x^{(n-1)} dT_x$$

à partir de $n = 1$, avec

$$(119\ ter) \qquad W^{(0)} = u^{(0)} = H,$$

l'inégalité (120) montre que si l'on a

$$|u^{(0)}| = |H| < H_1,$$

H_1 étant une constante positive, alors

$$(120') \qquad |W_a^{(n)}| = |u_a^{(n)} - u_a^{(n-1)}| < H_1 \frac{(K_1 C)^n}{n!},$$

ce qui est le terme général d'une série convergente.

Comme il s'ensuit de la sommation de cette série $u_0 + \sum_1^{\infty} (u^{(n)} - u^{(n-1)})$ et comme il est bien connu d'après la théorie des équations intégrales, la solution u obtenue finalement est de la forme

$$(121) \qquad u_a = H_a - \mathbf{SSS}_{(a)}\, \Psi(x; a) H_x dT_x,$$

où dT_x est une abréviation pour $dx_1\, dx_2 \ldots\, dx_m$ et où

$$\Psi(x;\, a) = \Psi(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m),$$

est une fonction déterminée des x et des a, appelée « noyau résolvant » (1) de l'équation intégrale en question, dont la valeur ne dépend que de l'expression de ψ.

195. Voyons maintenant comment cette solution dépend, non de la forme de H, mais des données elles-mêmes. Commençons par les termes en f : dans l'expression de H, on a le premier terme

$$\mathbf{SSS}\, \mathcal{V}_{(0)}(x;\, a) f(x)\, dT_x,$$

dans lequel $\mathcal{V}_{(0)}$ est une fonction à la fois des x et des a. En substituant cette quantité dans (121) et remplaçant les x par les a' comme variables d'intégration là où besoin est, on obtient :

$$\mathbf{SSS}\, \mathcal{V}_{(0)} f(x)\, dT_x$$

$$-\, \mathbf{SSS}\, \Psi(a';\, a)\, \mathbf{SSS}\, \mathcal{V}_{(0)}(x;\, a')\, f(x)\, dT_x\, dT_{a'}.$$

---

(1) Le calcul de Ψ à l'aide de ψ se fait par la méthode ordinaire de la théorie des équations intégrales (V. les ouvrages cités, note précédente). Après avoir calculé les deux premières approximations $u^{(0)}$ et $u^{(1)}$, on trouve que la troisième $u^{(2)}$, s'exprime en fonction de $u^{(1)}$. Pour l'obtenir en fonction de $u^{(0)} = \mathrm{H}$, on remplace $u^{(1)}$ lui-même par son expression. En effectuant comme il a été expliqué dans le texte, on voit que

$$u_a^{(2)} = \mathrm{H}_a + \mathbf{SSS}_{(a)}\, [\psi_1(x;\, a) + \psi_2(x;\, a)]\, \mathrm{H}_x dT_x$$

où $\psi_1 = \psi$ et où ψ_2 est représenté par une intégrale étendue au domaine que nous appelons $(a)(x)$ (voir le texte ci-après), savoir :

$$\psi_2(x;\, a) = \mathbf{SSS}_{(a)(x)}\, \psi(x;\, a')\, \psi(a';\, a)\, dT_{a'}.$$

En poursuivant de la même manière, on voit que $u_a = \lim u_a^{(n)}$ est représenté par (121), avec

$$-\,\Psi(x;\, a) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n + \ldots,$$

les termes ψ_n étant des « noyaux itérés », de sorte que $\psi_1 = \psi$ et que

$$\psi_n(x;\, a) = \mathbf{SSS}_{(a)(x)}\, \psi_{n-1}(x;\, a')\, \psi(a';\, a) dT_{a'};$$

cette série qui donne $(-\,\Psi)$ correspond à la série (5) de Bôcher (*loc. cit.*, § 6), à la série (8), p. 38 de l'ouvrage de Fréchet et Heywood : elle converge pour les mêmes raisons que la série qui donne u.

Le second terme est une intégrale $2m = 4m_1$^{uple} qui se rapporte à tous les systèmes de positions des deux points a' et x tels que :

1° Le point a' soit entre S et le demi-conoïde rétrograde de sommet a;

2° Le point x soit, à son tour, entre S et le demi-conoïde rétrograde de sommet a'.

On peut intervertir les intégrations, c'est-à-dire qu'on peut intégrer en laissant fixe le point x et faisant varier a' : ce qui, f étant en facteur, donne, pour l'autre facteur, la quantité

$$(123) \qquad \mathcal{V}_{(1)}(x; a) = \mathbf{SSS}_{(a)(x)} \Psi(a'; a) \mathcal{V}_{(0)}(x; a') d\mathrm{T}_{a'},$$

le domaine de variabilité de a', qui est désigné par le symbole $(a)(x)$ (partie ombrée de la fig. 33) et auquel est étendue l'intégration de cette formule, étant compris entre le demi-conoïde rétrograde de sommet a que l'on a considéré et le demi-conoïde *direct* (nappe conoïdale non tournée vers S) de sommet x. Le terme en question est ainsi :

$$(122 \ bis) \qquad \mathbf{SSS}_{(a)} \mathcal{V}_{(1)}(x; a) f(x) d\mathrm{T}_x.$$

Prenons maintenant l'autre terme contenant f dans l'expression de H, savoir :

$$(124) \qquad \frac{1}{(m_1 - 2)!} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SSS}_{(a)_2} \mathrm{V} f d\mathrm{T}_x$$

l'intégration $\mathbf{SSS}$ étant étendue à tout l'espace $(a)_2$ compris du côté positif de S entre le demi-conoïde rétrograde de sommet a et la surface $\Gamma(x; a) = \gamma$. Il faut substituer ceci à H dans le second membre de (121), ce qui donne

$$(125) \qquad \frac{1}{(m_1 - 2)!} \left[\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SSS}_{(a)_2} \mathrm{V} f d\mathrm{T}_x \right.$$

$$\left. - \mathbf{SSS}_{(a)} \Psi(a', a) d\mathrm{T}_{a'} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SSS}_{(a')_2} \mathrm{V}(x, a') f(x) d\mathrm{T}_x \right].$$

Ceci, en raison des règles ordinaires [1] de différentiation sous le signe $\int$, peut se remplacer par

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\Big[\mathbf{SSS}_{(a)_2} Vf dT_x$$

$$-\mathbf{SSS}_{(a)}\Psi(a',a)\,dT_{a'}\,\mathbf{SSS}_{(a')_2} V(x,a')f(x)\,dT_x\Big].$$

Le double signe **SSS** — qui représente une intégrale $(4m_1)$uple — sera transformé, comme tout à l'heure, en

(125′) $$\mathbf{SSS}_{(a)}f(x)\,dT_x\,[\mathbf{SSS}_{(a)(x)_2}\Psi(a';a)\,V(x;a')\,dT_{a'}].$$

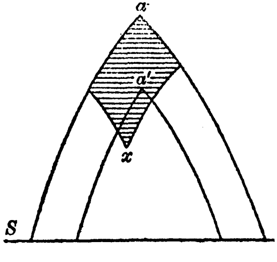


Fig. 33.

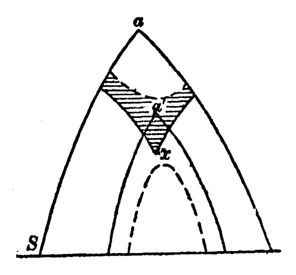


Fig. 33 *bis*.

Dans (125), le point a' occupe toutes les positions situées du côté positif de S et à l'intérieur du demi-conoïde de sommet a, et le point x est du côté positif de S, entre le demi-conoïde rétrograde $\Gamma(x|a') = 0$ et la surface $\Gamma(x|a') = \gamma$, région définie par $0 \leqslant \Gamma(x|a') \leqslant \gamma$ (voir fig. 33 *bis*) [2]. Par conséquent, dans (125′), le point x sera quelque part

(1) Strictement parlant, on devrait d'abord, comme on l'a dit ci-dessus, exclure, avant différentiation, les sommets des conoïdes par de petites surfaces Σ, par exemple en assujettissant x et a' à être distants l'un de l'autre, d'au moins ϵ. Pour des domaines ainsi restreints, les opérations de différentiation sous le signe **SSS** seraient valables. Il est facile de voir, grâce aux considérations précédentes (comprenant la note du n° 147) qu'elles sont également valables en prenant immédiatement pour ϵ la valeur zéro (la convergence des opérations du n° 141 ou du n° 178 étant uniforme).

(2) Les figures (schématiques) 33 et 33 *bis* sont des coupes à deux dimensions de figures de l'espace à $2m_1$ dimensions.

dans (a) et, pour chaque position donnée de x, le champ d'intégration relatif à a' sera limité par le demi-conoïde rétrograde de sommet a, le demi-conoïde direct de sommet x, et par la surface $\Gamma(x|a') = \gamma$ (fig. 33 *bis*). Ce champ est ce que nous désignons par $(a)(x)_2$.

La différentiation $(m_1 - 1)$ uple de (125') par rapport à γ peut être faite sous le signe **SSS** intérieur, c'est-à-dire sur la valeur des $\mathbf{SSS}_{(a)(x)_2}$; et l'on voit ainsi que le résultat de la substitution de (124) dans notre formule de résolution (semblable à celle de M. Volterra) est égal au terme (124) diminué de

(122 *ter*) $$\mathbf{SSS}_{(a)}\, f(x)\, \mathcal{V}_{(\mathrm{II})}\, (x;a)\, d\mathrm{T}_x$$

où

(123 *bis*) $$\mathcal{V}_{(\mathrm{II})}\,(x;a)$$

$$= \frac{1}{(m_1-2)\,!}\, \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\, \mathbf{SSS}_{(a)(x)_2}\, \Psi\,(a';a)\; \mathrm{V}\,(x';a')\; d\mathrm{T}_{a'}.$$

Finalement, nous avons ainsi tous les termes dépendant de f. Si on pose

(126) $$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{(0)} - \mathcal{V}_{(\mathrm{I})} + \mathcal{V}_{(\mathrm{II})},$$

$\mathcal{V}_{(\mathrm{I})}$, $\mathcal{V}_{(\mathrm{II})}$ étant définis respectivement par (123) et (123 *bis*), l'ensemble de ces termes sera :

$$- \mathbf{SSS}\; f(x)\; \mathcal{V}\; (x;a)\; d\mathrm{T}_x$$

$$+ \frac{1}{(m_1-2)\,!}\, \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\, \mathbf{SSS}\; f(x)\; \mathrm{V}\; (x;a)\, d\mathrm{T}_x.$$

196. Les explications données ci-dessus sur la manière de traiter les termes en f nous permettront d'être brefs en ce qui concerne les autres termes (contenant u et u_1) car les calculs sont rigoureusement semblables. L'intégrale par rapport à x sera un **SS** (au lieu d'un **SSS**), le point x décrivant S; mais la relation entre ce point et le point a', ainsi qu'entre a et a', restant la même pour tout point x de S, les champs d'intégration relatifs à a' se construiront

comme précédemment. On peut effectuer des opérations similaires quand le point x est assujetti à décrire la surface que nous avons appelé S_ν, de manière à obtenir un résultat que l'on pourra différentier par rapport à ν. Ceci nous montre, sans aucune difficulté nouvelle, ce que chaque terme de l'espèce en question figurant dans H donne quand il est substitué dans (121); ainsi :

le terme $\quad - \mathbf{SS}_{S_0} \mathcal{V}_{(0)} (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S}$ devient

$$- \mathbf{SS}_{S_0} \mathcal{V}_{(0)} (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S} + \mathbf{SS}_{S_0} \mathcal{V}_{(\mathrm{I})} (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S};$$

le terme $\quad \dfrac{1}{(m_1-2)!} \dfrac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SS}_2 \mathrm{V}(u + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S}$

devient

$$\frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SS}_2 \mathrm{V}(u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S}$$

$$- \mathbf{SS}_{S_0} \mathcal{V}_{(\mathrm{II})} (u_1 + \mathrm{L}u_0)\, d\mathrm{S};$$

le terme $\quad \dfrac{1}{(m_1-2)!} \dfrac{d}{d\nu} \dfrac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SS}_{2} u_0 \mathrm{V} d\mathrm{S}$ devient

$$- \frac{1}{(m_1-2)} \frac{d}{d\nu} \cdot \frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \mathbf{SS}_2 u_0 \mathrm{V} d\mathrm{S} + \frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu} u_0 \mathcal{V}_{(\mathrm{II})} d\mathrm{S};$$

enfin $\quad \dfrac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu} u_0 \mathcal{V}_{(0)} d\mathrm{S}$ devient

$$\frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu} u_0 \mathcal{V}_{(0)} d\mathrm{S} - \frac{d}{d\nu} \mathbf{SS}_{S_\nu} u_0 \mathcal{V}_{(\mathrm{I})} d\mathrm{S},$$

résultats dont la somme, ajoutée à (122), (122 *bis*) avec soustraction de (122 *ter*), donne finalement u lui-même sous la forme (29 *ter*), V étant calculé comme on l'a dit au n° **192**, et $\mathcal{V}$ étant donné par (126).

197. Nous venons de construire l'expression de la solution cherchée, si tant est qu'elle existe. Mais il reste à démontrer, réciproquement, que ce que nous avons calculé est une solution, vérifiant les conditions du problème.

Pour cela, nous nous servirons des résultats obtenus d'abord pour le cas analytique. Dans ce cas, nous avons montré que la solution existe et est analytique dans $\mathcal{R}$: cette solution ne peut être distincte de celle qu'on vient d'obtenir et qui est, par conséquent, analytique aussi.

De plus, nous avons construit la solution élémentaire et, en particulier, la fonction $\mathcal{V}$ (analytique aussi en x et en a), encore une telle quantité *ne peut être distincte* de la quantité définie par la formule (126) : car, en raison du Lemme fondamental du Calcul des variations, une même quantité u ne peut admettre deux expressions distinctes de la formule (29 *ter*), égales entre elles pour des choix arbitraires de u_0, u_1, f.

Par conséquent, la quantité $\mathcal{V}$ définie par (126) est, sous ces hypothèses, holomorphe en z et en a.

198. La méthode employée par E. E. Levi, pour démontrer directement l'analyticité des résultats des calculs précédents lorsqu'on part de données analytiques, est de principe tout différent et consiste à étendre au domaine imaginaire ou, du moins, à une portion de ce domaine suffisamment voisine du domaine réel, la définition des diverses quantités envisagées. Cette méthode peut être étendue, au moins partiellement [1], au cas hyperbolique, mais non, comme nous allons le voir, sans quelque difficulté d'ordre géométrique qui ne se présentaient pas dans l'analyse du géomètre italien.

L'analyticité de H (celle de $\mathcal{V}_0$ étant acquise) résulte des calculs du n° **174** et des n^{os} **177-180**, et cela dans toute la région $\mathcal{R}$.

Il s'agit maintenant de démontrer le même fait pour la solution de l'équation intégrale (117). Pour cela, nous reprendrons l'intégrale d'espace (82) du n° **174**, mais avec les modifications nécessaires pour l'étendre à un domaine complexe convenablement défini.

Nous partirons de la région réelle $\mathcal{R}$, sujette aux mêmes restrictions que ci-dessus (en particulier, il est entendu que

---

(1) La méthode donnée ci-dessous est celle qui correspond à celle d'E. E. Levi (*loc. cit.*); mais la démonstration d'E. E. Levi, pour le cas elliptique, est plus complète, car elle s'applique à la solution élémentaire elle-même, au lieu que, en raison des difficultés mentionnées dans le texte, nous nous bornerons à raisonner sur la solution u du problème de Cauchy.

toute géodésique intérieure ou bicaractéristique décrite dans le sens rétrograde à partir d'un point a de $\mathcal{R}$, reste dans $\mathcal{R}$ jusqu'à ce qu'elle rencontre S).

Soient x et a deux points de $\mathcal{R}$ qui, par conséquent, comme on l'a supposé, peuvent être joints par une géodésique déterminée; le Jacobien $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(q_1, \ldots, q_m)}$ étant aussi supposé toujours différent de zéro (pour les valeurs correspondantes des a et des q), les q (et par conséquent les ξ) *seront des fonctions analytiques*, et elles seront holomorphes quel que soit le système de valeurs réelles ou imaginaires $\overline{x}$, $\overline{a}$ de ces mêmes variables telles que :

$$|\overline{x}_i - x_i| < \delta, \quad |\overline{a}_i - a_i| < \delta \qquad (-\, i = 1, 2, \ldots, m),$$

δ étant une certaine quantité positive, qui, comme on le sait, a un minimum positif quand x et a prennent toutes les positions possibles dans $\mathcal{R}$. Si un des points de $\mathcal{R}$ est assujetti à décrire une surface $t =$ const., tandis que l'autre reste arbitraire, il y aura un autre minimum qui sera une fonction de t et que l'on désignera par δ_t. On peut ainsi déduire de $\mathcal{R}$ un certain domaine complexe (δ_t), savoir le domaine contenant tous les points de coordonnées (réelles ou imaginaires) $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$ correspondant avec au moins un point réel $(x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathcal{R}$ par la relation

$$(127) \qquad |\overline{x}_i - x_i| < \delta_t \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

(t représente toujours x_m).

De chaque point (en général imaginaire) de δ_t, on peut tracer des géodésiques dans différentes directions. On considèrera en particulier celles qui sont telles que

$$|\overline{\mu} - \mu| < k\delta_t \qquad (k = \text{const. positive})$$

$\overline{\mu}$ étant la valeur d'une quelconque des quantités

$$\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_{m-1}}{dt}, \frac{ds}{dt},$$

et μ la valeur correspondante pour une direction réelle et rétrograde (convenablement choisie) en un point réel avoisinant [le voisinage étant défini par (127)] appartenant à $\mathcal{R}$. De telles directions pourront aussi être appelées « directions rétrogrades dans $\overline{\mathcal{R}}$ ». Il est clair, grâce aux remarques précédentes sur $\frac{d\theta}{dt}$,

que, pour une telle direction, l'argument de $\left(\frac{-d\xi_m}{dt}\right)$ sera inférieur en valeur absolue à k' (k' étant une certaine constante positive). On voit aussi que si k est pris suffisamment grand, on obtiendra toujours une direction rétrograde [en un point quelconque de (δ_t)], si on prend pour les différentielles des variables normales ξ des valeurs réelles telles que

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi^2_{m-1} \leqslant d\xi^2_m, \qquad d\xi_m > 0.$$

Les géodésiques ayant une direction rétrograde (qu'elle soit réelle ou imaginaire) s'appelleront des « géodésiques rétrogrades »; de plus, on admettra alors que la variable indépendante [1] varie toujours de telle manière que l'argument de dt soit toujours compris entre $-k'$ et k'; naturellement, il en sera de même pour l'argument de la différence de deux valeurs quelconques de t sur un tel parcours, et l'on peut trouver une limite supérieure (constante) du rapport entre la longueur d'un arc quelconque d'un tel parcours dans le plan de la variable complexe t et la longueur de sa corde, ou de sa projection sur l'axe réel.

Tout point qui peut être atteint à partir de a par une géodésique rétrograde, avec la restriction précédente sur la variation de t, s'appellera *point subordonné à a.*

199. Il est essentiel de modifier la définition primitive de (δ_t) (en diminuant convenablement les valeurs de δ_t, ainsi qu'on en a le droit) de manière à ce qu'*en prenant pour a un point de* (δ_t), *tous les points subordonnés à a appartiennent aussi à* (δ_t).

C'est ce qu'on peut obtenir à l'aide des résultats connus en liaison avec le théorème fondamental de Cauchy sur les équations différentielles. On sait en effet que, $(y_1, y_2, \dots)$ et $(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots)$ étant deux solutions d'un seul et même système différentiel canonique à variable indépendante t et à N fonctions inconnues, si on a une limite supérieure ε_0 des valeurs absolues des différences $\overline{y_i} - y_i$ pour $t = \overline{t_0}$, on peut en déduire une semblable limite supérieure ε_1 relative à $t = t_1$ par

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0\, e^{\mathrm{NAT}},$$

(1) On prend t comme variable indépendante dans (L) en multipliant les deux membres de chaque équation par

$$\frac{ds}{dt} = 1 : \left(\frac{s}{2}\,\frac{\partial A}{\partial p_m}\right).$$

où T est la longueur du parcours suivi de t_0 à t_1, et A une constante positive que l'on peut trouver quand on connaît une région finie où sont toutes les inconnues et où les seconds membres des équations différentielles sont réguliers (1).

Par suite de ce théorème, on voit que le domaine (δ_t) vérifiera la condition cherchée si δ_t est pris en fonction de t de manière à ce que $\delta_t e^{2mAat}$ soit décroissant (en désignant par a la susdite limite supérieure pour le rapport entre la longueur du parcours d'intégration dans le plan des t et sa corde) : par exemple, soit δ_t' un premier choix de cette fonction, telle qu'elle a été considérée, on désigne par δ_t le minimum de $\delta_t' e^{-2mAa(t-t')}$ pour t' variant entre zéro et t'.

199 ***bis***. On apportera une dernière restriction au domaine (δ_t) en ne considérant que les valeurs de t dont les arguments sont compris entre $-k'$ et $+k'$ (la définition du domaine, en ce qui concerne les autres coordonnées, restant la même). Un « point subordonné » d'un point du domaine, avec cette nouvelle définition, restera dans le domaine si les deux valeurs de t sont sur le même rayon vecteur passant par l'origine dans le plan des t.

200. Ces considérations géométriques sont les seules difficultés du raisonnement. En introduisant une fonction quelconque F des x, ou des x et des a, holomorphe dans $\mathcal{R}$, on peut à présent former facilement une fonction analytique des a, holomorphe aussi dans (δ_t), qui coïncidera avec l'intégrale (77) pour les points réels (c'est-à-dire dans $\mathcal{R}$).

On voit qu'un tel prolongement sera donné par l'intégrale :

$$\text{(82 } ter\text{)} \qquad \mathrm{I} = c \mathbf{SS} d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} \int_0^1 \mathrm{KF} d\lambda,$$

formée au n° **174**, les η désignant encore le domaine réel (81) et la variable λ décrivant le segment réel (o, 1), de sorte que la variable t doit passer de c à l'origine par le parcours rectiligne. Les nos **199** et **199** ***bis*** montrent que si a est dans (δ_t), il en sera de même de tout point x correspondant à un tel système de valeurs des η et des λ. Donc, — ce qui est essentiel, — F étant défini dans le domaine (δ_t), (82 *ter*) est défini dans le *même* domaine et y est holomorphe, pour les mêmes raisons que précédemment.

---

(1) A est une limite supérieure de valeurs absolues des dérivées partielles premières des seconds membres (V. note de la Note additionnelle du Livre II).

De plus, si on désigne par $\varphi(|t|)$ un maximum de la valeur absolue de F quand t prend toutes les valeurs telles que $|t| =$ constante, et si on désigne par K′ le produit de $\frac{1}{m-1}\Omega_{m-2}$ par un maximum de K_1, on a :

$$|I| < K' \int_0^{|c|} \varphi\,|t|\,dt, \qquad (120\ bis)$$

c'est-à-dire l'inégalité correspondant à (120), n° **194**.

201. Ceci posé, il n'y a plus aucune difficulté à définir u dans tout le domaine (δ_t), par l'équation (127). D'abord, H lui-même, en raison des calculs du Livre II, est holomorphe dans le domaine susdit (convenablement restreint, s'il est nécessaire). Par conséquent, on verra successivement que chacune des intégrales (129) est définie et holomorphe dans (δ_t); de plus, par le même raisonnement qu'au § **194** [à l'aide de l'inégalité (130 *bis*)], que de telles approximations convergent; enfin, que cette convergence est uniforme et, par conséquent, grâce à un théorème connu, que la limite est encore une fonction analytique, ainsi qu'on voulait le démontrer.

Pour fournir l'équivalent de la démonstration de E. E. Levi, il faudrait montrer, par la même méthode, l'analyticité de $\mathcal{V}$ lui-même. Néanmoins, on ne l'entreprendra pas ici, car de nouvelles difficultés (qui n'existent pas pour le cas elliptique) proviennent évidemment de la forme du domaine que l'on a désigné par $(a)(x)$, si on essayait de l'étendre par adjonction de points complexes.

202. Ceci dit, cessons de nouveau de supposer les coefficients analytiques (leur régularité étant, bien entendu, toujours admise).

En raison de cette régularité supposée des coefficients et d'un théorème fondamental bien connu de Weierstrass, on peut approcher aussi près que l'on veut de chacun d'eux par un polynôme, et on peut même le faire d'une telle manière que l'approximation soit valable pour la différentiation jusqu'à l'ordre pour lequel l'existence de dérivées est requise [1].

---

(1) Ceci, qui a été obtenu sous des conditions plus générales dans un Mémoire de M. Tonelli dans les *Rendic. Circ. Mat. Palermo* (t. XXIX, 1910, p. 1-36), résulte des méthodes mêmes de démonstration du théorème

203. Nous arriverons à la conclusion cherchée, savoir que la solution construite §§ **193** à **196** vérifie bien les conditions données, en combinant le résultat ci-dessus avec ceux obtenus pour le cas analytique (§§ **174** à **180**) et en étudiant d'abord *l'ordre de continuité* (Livre I, §§ **19** et suiv.), de

---

de Weierstrass. Dans beaucoup d'entre elles, en fait, le polynôme approché pour une fonction continue des variables x_1, x_2, ..., x_m s'exprime par une intégrale de la forme

$$\Pi_n = \iiint F(z_1, z_2, ..., z_m) P_n(z_1 - x_1, z_2 - x_2, ..., z_m - x_m)\, dz_1\, dz_2 .... dz_m,$$

le polynôme P_n ($n = 1, 2, ...$) étant tel que : 1° pour tout système fixe de valeurs de $Z_1, Z_2, ..., Z_m$ autre que $Z_1 = Z_2 = ... = 0$, $P_n(Z_1, Z_2, ..., Z_m)$ tende vers o avec $1/n$ et cela uniformément tant que $Z_1^2 + Z_2^2 + ...$ reste supérieur à un nombre fixe positif h (aussi petit que l'on veut); 2° l'intégrale

$$\iiint P_n\, dZ_1 dZ_2 .... dZ_m,$$

étendue à un domaine fixe contenant l'origine (et dont la forme est indifférente en raison de 1°), tende vers 1.

Par exemple, P_n peut être le polynôme de MM. de La Vallée-Poussin et Landau, étendu par M. Tonelli à plusieurs variables :

$$P_n = \frac{1}{K_n} [1 - \lambda^2 \sum_i (z_i - x_i)^2]^n,$$

où λ est l'inverse de la plus grande dimension du domaine et où

$$K_n = \frac{\Omega_{m-1}}{\lambda^m} \int_0^1 (1 - \rho^2)^n \rho^{m-1}\, d\rho = \frac{\Omega_{m-1}}{\lambda^m} B\left(n + 1, \frac{m}{2}\right).$$

Si l'on veut maintenant prendre une dérivée quelconque d'ordre k, soit

$$D_{k_1 k_2} .... = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ....}$$

de telles expressions, on différentie P_n sous le signe $\iint$ par rapport aux x, ou — ce qui est équivalent — par rapport aux z en multipliant par $(-1)^k$. Mais, si la dérivée correspondante de F existe et est continue, une intégration par parties est possible et transforme le résultat en

$$\iiint D_{k_1 k_2} .... F \cdot P_n(z_1 - x_1, z_2 - x_2, ..., z_m - x_m)\, dz_1\, dz_2 .... dz_m,$$

avec addition de termes aux limites.

Si on suppose finalement (comme dans le cas du polynôme susdit de MM. La Vallée-Poussin et Landau) que la condition 1° précédente est vérifiée non seulement par P_n, mais aussi par ses dérivées de tout ordre inférieur à k, ces termes aux limites tendent vers zéro, et la limite de $D_{k_1 k_2 ....} \Pi_n$ peut s'obtenir en opérant sur $D_{k_1 k_2 ....} F$ comme on l'a fait sur F lui-même : ce qui est le résultat cherché.

nos expressions par rapport aux fonctions qui représentent les coefficients des équations [1] : question qui peut être intéressante dans plusieurs cas et pour laquelle, exactement comme au § **18**, Livre I, des expressions sous forme de séries entières ne donneraient aucun renseignement, tandis qu'on pourra la résoudre par les calculs des §§ **193** et suivants.

Nous allons voir que les quantités construites aux n^os cités sont continues d'un certain ordre fini par rapport aux coefficients en question. En d'autres termes, si on remplace les coefficients en question par d'autres ayant respectivement avec eux un voisinage de l'ordre en question, et si

$$(E_1) \qquad \mathcal{F}_1(u) = \sum A'_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i' \frac{\partial u}{\partial x_i} + C'u = f$$

est la nouvelle équation ainsi obtenue, les quantités susdites différeront très peu, qu'elles soient déduites de (E) ou de (E_1). Tel sera, par exemple, le cas si on remplace les coefficients par des polynômes approchés construits conformément à ce qui vient d'être dit au n° précédent.

La première question de cette espèce concerne la construction des géodésiques, et par conséquent de la quantité Γ. A cet égard, la réponse est donnée par ce que nous avons dit dans la Note Additionnelle du Livre II. On a vu que toute géodésique issue d'un point a et relative à la forme caractéristique $\mathbf{A}_1$ de (E_1) aura un parcours très proche de la géodésique correspondante relative à la forme **A**, en appelant ainsi, par exemple, la géodésique qui a la même tangente en $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. De plus, l'altération sera très petite en ce qui concerne les dérivées partielles des coordonnées x de tout point de cette géodésique, par rapport aux paramètres précédemment appelés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ et, par conséquent, en ce qui concerne le déterminant fonctionnel **J**. Ce déterminant fonctionnel étant différent de zéro et (du

(1) On a employé des méthodes analogues pour les équations elliptiques : V. Lichtenstein, ***Abhandl. Ak. Berlin*** **(1911), (*Anhang*).**

moins si un certain voisinage de a est exclus) supérieur en valeur absolue à un nombre positif fixe dans toute une certaine région $\mathcal{R}$, quand on le prend par rapport à l'équation (E), le restera par conséquent si on part d'une des équations approchées (E_1), dès que l'approximation sera suffisamment serrée. Ce fait est très important pour nous, puisque l'on sait ainsi que *les calculs peuvent être considérés comme ayant un même domaine de validité*, que l'on parte de (E) ou de (E_1).

Il est aussi évident, maintenant, que le changement produit sur Γ et M est également faible.

Le même résultat s'étend aux quantités V_h successives ($h = 1, 2, \ldots, m_1 - 2$), en raison de leurs formules de définition, ainsi qu'à $V_{m_1-1} = \mathcal{V}_{(0)}$, du moment que l'ordre de dérivabilité requis pour les coefficients est suffisamment élevé (les dérivées ainsi cherchées étant, ainsi qu'on l'a dit, approchées par les dérivées correspondantes de nos polynômes d'approximation).

Le changement sera aussi très petit sur la quantité que nous avons appelée H (et ses dérivées jusqu'à un certain ordre, en rapport avec l'ordre d'approximation demandé pour les coefficients). C'est ce qui apparaît à l'examen des expressions des différents termes de H, calculées comme il a été dit aux §§ **177-180**, et qui sont des intégrales contenant les données u_0, u_1, f, les fonctions V et $\mathcal{V}_{(0)}$ et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre fini.

Ceci s'applique encore au « noyau » ψ de l'équation intégrale (117), ainsi qu'il apparaît immédiatement d'après son expression (voir note du § **192**).

Nous pouvons maintenant établir, au même point de vue, la continuité de u. Une telle continuité, une fois acquise en ce qui concerne la première des approximations (119), savoir $u^{(0)} = H$, a en effet visiblement lieu pour chacune des suivantes (puisqu'elle a lieu pour ψ). Or, la convergence de ces approximations est uniforme quelle que soit (E_1) et aussi, d'ailleurs, quel que soit le point a.

Ceci démontre la conclusion visée : u sera approché par la solution correspondante u' de l'équation (E_1), cette

approximation étant uniforme [1] par rapport aux coordonnées de a; et, si les voisinages admis par hypothèse sont d'ordre assez élevé, les dérivées premières et secondes de u seront également approchées [2] par les dérivées correspondantes de u'.

---

(1) Cette uniformité résulte de la précédente. On peut d'ailleurs préciser. Nous avons déjà écrit des majorantes pour les quantités $|H|$, $\mathbf{SS}|\psi(x, a)|dS_t$, $|W_a^{(n)}|$, savoir, respectivement H_1, K_1, $H_1 \frac{(K_1 c)^n}{n!}$ Soient maintenant

$$H' = H + \delta H, \ \psi' = \psi + \delta\psi, \ W'^{(n)} = W^{(n)} + \delta W^{(n)}$$

les quantités analogues à H, ψ, W relatives à la nouvelle équation (E_1), avec les majorations

$$|\delta H| < h_1, \quad |\mathbf{SS}\, \delta\psi\,(x, a)\, dS_t| < k_1, \quad |\delta W_x^{(n)}| < w_1^{(n)}(t),$$

les seconds membres des deux premières inégalités étant des constantes, celui de la troisième une fonction de t seul. Les relations de récurrence (119 *bis*), jointes à (119 *ter*), donnent aisément cette troisième majorante, savoir :

$$w_1^{(n)}(c) = (H_1 + h_1)\frac{[(K_1 + k_1)\, c]^n}{n!} - H_1 \frac{(K_1 c)^n}{n!}$$

d'où, en sommant par rapport à n,

$$\sum_n w_1^{(n)}(c) = (H_1 + h_1)\, e^{(K_1 + k_1)c} - H_1 e^{K_1 c}$$

et cette quantité, borne supérieure de $|\delta \hat{u}|$, tend vers zéro avec h_1 et k_1, sans dépendre des a (si l'on remplace c par une borne supérieure).

(2) La dérivée par rapport à a_i du premier membre de (119 *bis*) comprend un terme $\mathbf{SSS}\, W_x^{(n-1)} \frac{\partial\psi}{\partial a_i} dT_x$ et un terme $\mathbf{SS}$ correspondant (V. les formules déjà rappelées de notre *Cours d'Analyse*, t. I, 354), à la variabilité du domaine (a) : l'un et l'autre sont limités en fonction d'une borne supérieure de $|W_x|$, celle-ci étant multipliée dans l'un par une borne supérieure de $\mathbf{SSS}_{(a)} \left|\frac{\partial\psi}{\partial a_i}\right| dT_x$, dans le second (intégrale étendue à la surface du conoïde de sommet a), par une borne supérieure de l'intégrale

$$\mathbf{SS}|\psi(x, a)|\, d\tau_\gamma,$$

intégrale où la quantité sous le signe $\mathbf{SS}$ reste bornée sur tout le conoïde, d'après l'expression de $d\tau_\gamma$ calculée au n° 177 (pour $\mu = 0$). Toutes les dérivées de cette forme sont donc en valeur absolue inférieures à $H_2 \frac{|K_1 c|^{n-1}}{n n!}$, où H_2 est une constante qu'on peut prendre la même pour (E) et (E_1).

Pour calculer une dérivée seconde $\frac{\partial^2 W_a^{(n)}}{\partial a_i\, \partial a_k}$, il y a avantage à intro-

204. La conclusion demandée s'ensuit maintenant sans difficulté. Commençons par opérer sur une équation déterminée (E_1) dont les coefficients A_{ik}', B_i', C' seront des polynômes approchés de A_{ik}, B_i, C respectivement. On obtiendra une quantité u' qui sera la solution du problème correspondant, c'est-à-dire qui vérifiera :

$$\mathcal{F}_1(u') = \sum A'_{ik} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i' \frac{\partial u'}{\partial x_i} + C'u = f$$

ainsi que la condition (C_3) de Cauchy. Mais si on fait varier les coefficients altérés A_{ik}', etc..., de telle manière que leur voisinage (d'un ordre convenablement choisi) avec les coefficients correspondants de (E) devienne infiniment étroit, u' tendra vers u et $\mathcal{F}_1(u')$ vers $\mathcal{F}(u)$: ce dernier est par conséquent nécessairement égal à f.

205. La même démonstration de continuité s'appliquera aux conditions de Cauchy, puisque celles-ci sont constamment vérifiées pour le problème analytique.

S'il ne s'agissait que de former la valeur de u, d'après la méthode des nos **193** et suivants, en prenant pour a un point situé sur S, le résultat apparaîtrait immédiatement. Pour une telle position du point a, toutes les intégrales **SSS** disparaissent et u est nécessairement égal à H. Cette valeur H, en ce qui concerne (E_1) et par conséquent aussi (par continuité) (E), ne peut être autre que la valeur correspondante de u_0, puisque nous savons que le problème Cauchy relatif à l'équation analytique (E_1) a une solution; et le fait a été vérifié directement au n° **181**.

---

duire dans $\dfrac{\partial W^{(n)}}{\partial a_i}$ les variables η, λ du n° **174** : par rapport à ces variables, le domaine d'intégration dans chacun des termes **SSS** ou **SS** qui viennent d'être considérés, est fixe, savoir $\eta_1^2 + \dots \eta^2_{m-1} \leqslant 1$ (ou $= 1$, pour l'intégrale $(m-1)^{\text{uple}}$), $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Les x étant, d'autre part, fonctions régulières des variables η, λ et a, on voit immédiatement que chacune des dérivées secondes de $W^{(n)}$ est limitée par $H_3 \dfrac{(K_1 c)^{n-2}}{(n-2)!}$, H_3 étant encore une constante indépendante, non seulement des x, mais des a et qui sera également la même quelle que soit l'équation (E_1) choisie.

Mais comme précédemment, le sens de la question est autre. Les conditions de Cauchy impliquent la continuité de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ au voisinage de S. La première d'entre elles, par exemple, signifie que, a s'approchant d'un point déterminé P qui appartient à S, la quantité u_a calculée par notre méthode, tend vers $(u_0)_P$. Or, u_a, construit à partir de (E), peut être, d'après ce qui précède, considéré comme résultant, par passage à la limite, de u_a', quantité analogue déduite de (E_1). Pour être sûr que la limite de u_a, pour a approchant de S, est la même que la valeur limite de u'_P quand (E_1) est infiniment peu différent de (E), — en d'autres termes, que les deux passages à la limite en question peuvent être intervertis — il suffit, ainsi qu'il est bien connu, de s'assurer que le premier d'entre eux (correspondant à la variation des coefficients) est uniformément convergent (en particulier dans le voisinage de S), et c'est ce que nous venons d'établir.

Les choses se comportent de même pour la seconde condition (C_2).

Donc, *il est démontré que le problème a une solution*, donnée par la même formule n° (29) ou (29 *bis*) que dans le cas analytique, $\mathcal{V}$ étant défini par la formule (126).

206. On peut partiellement étendre les considérations précédentes à la quantité $\mathcal{V}$. On peut montrer, comme ci-dessus :

1° que $\mathcal{V}$ est la limite de la quantité correspondante *relative à* (E_1), *tout au moins pour tout couple de points* x et a tels que $\Gamma(x; a)$ soit positif et non nul;

2° que (du moins avec la même restriction) cette quantité vérifie $\mathcal{G} = 0$ (comme fonction des x) et $\mathcal{F} = 0$ (comme fonction des a).

Il n'y a aucun doute à avoir quant au fait que ces conclusions sont également valables pour $\Gamma(x; a) = 0$, $\mathcal{V}$ étant régulier même dans ce cas et prenant les valeurs $\mathcal{V}_{(0)}$ (comme cela se passe dans le cas analytique, et comme il était nécessaire précédemment pour la solution élémen-

taire); en d'autres termes, que $\mathcal{V}_{(\mathrm{I})}$ et $\mathcal{V}_{(\mathrm{II})}$ sont nuls avec Γ. La démonstration rigoureuse pourrait cependant être difficile en ce qui concerne $\mathcal{V}_{(\mathrm{II})}$, pour les raisons géométriques auxquelles nous avons déjà fait allusion : le domaine que nous avons appelé $(a)(x)$ présenterait de nouvelles singularités pour Γ $(x;\, a)$ très petit, par la raison que certaines bicaractéristiques issues de x passeraient très près de a et que d'autres rencontrent le conoïde caractéristique issu de a sous de très petits angles.

207. Le résultat obtenu pour m pair donne immédiatement un résultat correspondant pour m impair, en vertu du procédé de descente : V et $\mathcal{V}$ — appelés à présent V′ et $\mathcal{V}'$ — ayant été construits pour $m = 2m_1 + 2$ comme il a été exposé ci-dessus, la valeur de v, pour $m = 2m_1 + 1$, résulte des formules (62), (65), (§§ **164, 165**).

NOTE ADDITIONNELLE

Dans le calcul des n[os] **182-184**, nous avons vu que la quantité $\mathcal{H}(e)$ s'élimine, de sorte que nous avons pu nous dispenser de former l'intégrale

$$\mathbf{S}\ \mathcal{H}(e)\, d\Omega_{m-2},$$

Il peut être cependant intéressant d'en déterminer la valeur.

Or, on a, ainsi qu'il est bien connu (et par des raisons évidentes d'isotropie) :

$$\mathbf{S}\ e_i e_k\ d\Omega_{m-2} = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$\mathbf{S}\ e_1{}^2 d\Omega_{m-2} = \mathbf{S}\ e_2{}^2 d\Omega_{m-2} = \dots = \mathbf{S}\ e^2{}_{m-1} d\Omega_{m-2}$$
$$= \frac{1}{m-1}\ \Omega_{m-2};$$

donc l'intégrale en question a la valeur

$$(1) \qquad \frac{1}{m-1}\ \Omega_{m-2}\ (\mathcal{H}_{11} + \mathcal{H}_{22} + \dots + \mathcal{H}_{m-1,\,m-1})$$

qu'il reste à exprimer à l'aide des coefficients des formes **H**, **H'**, en tenant compte de la substitution (78), n° **172**.

Il n'y a, pour cela, qu'à introduire la quantité :

$$(2) \qquad \Sigma'\ \mathrm{A}^{ik}\mathrm{H}_{ik}',$$

formée avec les coefficients A^{ik} d'une forme quadratique par rapport à des coordonnées tangentielles et les coefficients H'_{ik} d'une forme quadratique par rapport à des coordonnées ponctuelles [1]. On sait que cette expression est invariante par toute

(1) En langage du Calcul différentiel absolu, la première forme est à variables covariantes, la seconde à variantes contrevariantes; les A^{ik} forment un tenseur doublement contrevariant; les H'_{ik} un tenseur doublement covariant et (2) est le produit contracté (produit scalaire) de ces deux tenseurs.

substitution linéaire telle que (78). Lorsqu'une telle substitution est choisie (comme nous le supposons) de manière à réduire la forme $\Sigma' H_{ik} x^i x^k$, à une somme de carrés négatifs

$$-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi^2_{m-1},$$

la forme tangentielle correspondante $\Sigma' A^{ik} p_i p_k$ est, de même, réduite à la somme, changée de signe, des carrés des variables et l'invariant (2) n'est autre, au signe près, que le facteur entre parenthèses dans (1). Chacun des A^{ik} étant un mineur du discriminant de **H**, divisé par la valeur $D = \frac{1}{\Delta}$ de ce discriminant, on a :

$$\mathcal{H}_{11} + \mathcal{H}_{22} + \dots + \mathcal{H}_{m-1,\,m-1} = -\sum{}' A^{ik} \frac{\partial H_{ik}}{\partial t}$$
$$= -\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

Une autre quantité qui se trouvait s'éliminer dans le calcul du n° **185**, le Jacobien J des coordonnées x par rapport aux variables normales X ou, du moins, l'ensemble des termes du premier ordre de son développement, se déduit aisément de la considération du discriminant D de la forme métrique **H**. Par rapport aux variables normales, la forme métrique est à coefficients constants à des termes du second ordre près, ainsi qu'il est connu depuis Riemann même [1] : son discriminant D′ doit donc être, au second ordre près, considéré comme constant au voisinage de a, de sorte que J est égal sensiblement à

$$\sqrt{\frac{D'}{D}} = \sqrt{\frac{D_a}{D_x}} = \frac{\rho_a}{\rho_x} = \sqrt{\frac{\Delta_x}{\Delta_a}}$$

(1) V. son Mémoire classique *sur les Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, § II (p. 289 de la traduction Laugel).

APPENDICE I

FORME INVARIANTIVE DONNÉE A LA SOLUTION

Les formules invariantives que nous allons écrire seront, dans une certaine mesure, en relation avec les principes du cacul tensoriel contemporain. Nous ne supposerons d'ailleurs pas, même dans le présent appendice, la connaissance de ce calcul, et nous nous contenterons de donner quelques indications à l'usage du lecteur familiarisé avec les principes en question. Toutefois, comme on y est conduit par la notation admise en calcul tensoriel, nous désignerons par des indices supérieurs un certain nombre de quantités désignées dans le corps de l'ouvrage par les indices inférieurs correspondants. Il en sera ainsi pour les variables indépendantes $x^1, x^2, \ldots, x^m$ elles-mêmes, leurs différentielles dx^i, ainsi que les coefficients de l'équation (Cf. nos **168-171**), laquelle s'écrira, en conséquence,

$$\text{(E)} \qquad \sum_{i,k} A^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum_i B^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + Cu = f \qquad (i, k = 1, \ldots, m)$$

208. Nous avons, dans le corps de l'ouvrage, développé les calculs en partant, dans toutes les intégrations, de l'élément de volume euclidien $dT = dx^1 \; dx^2 \; \ldots \; dx^m$. Mais, comme nous l'avons dit (n° **40** *bis*), il peut être essentiel, pour beaucoup d'applications, de donner à ces calculs une forme entièrement *invariante* vis-à-vis d'une transformation ponctuelle *quelconque*

$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, \ldots, x'^m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

effectuée sur les variables indépendantes x^i.

Rappelons, pour plus de clarté, les conditions dans lesquelles il sera sous-entendu qu'une telle transformation (véritable transformation ponctuelle, c'est-à-dire à jacobien non nul) devra être opérée. Par hypothèse, la fonction u est un *invariant*, c'est-à-dire que sa valeur n'est pas altérée par cette transformation; on aura, par hypothèse,

$$u = u'.$$

Les différentielles dx^i et les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ sont liées à leurs transformées dx'^i et $\frac{\partial u}{\partial x'^i}$ par les relations bien connues

$$\text{(A)} \qquad dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\, dx^j;$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x^j}\, \frac{\partial x^j}{\partial x'^i},$$

Par définition, tout système de m quantités qui se transforment conformément à la loi (A) est un *vecteur contrevariant*, tandis que tout système de m quantités qui se transforment conformément à la loi (B) est *un vecteur covariant*. En particulier $(dx^1, \ldots, dx^m)$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant, tandis que $\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^m}\right)$ sont les composantes d'un vecteur covariant. Remarquons que les transformations opérées sur les différentielles dx^i et sur les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ sont liées par la condition que la quantité

$$\text{(1)} \qquad \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\, dx^i$$

soit un *invariant*. D'autre part, la transformation est également opérée sur la forme métrique $\mathbf{H}(dx, x)$, les nouveaux coefficients en étant calculés de manière à ce que cette expression reste *invariante*, de sorte qu'on passe de

l'ancienne forme à la nouvelle en substituant aux valeurs primitives des x^i et des dx^i leurs expressions en fonction des nouvelles. Donc, par définition, la longueur d'un arc quelconque, mesurée avec la métrique **H**, est un *invariant*. Dans ces conditions, nous savons que les paramètres différentiels de Lamé-Beltrami (n° **59**) sont aussi des invariants [1]. Il en est donc ainsi pour la forme caractéristique **A**, qui, nous l'avons vu, lorsqu'on y prend pour arguments les dérivées partielles de u, n'est autre que $\Delta_1 u$, et pour la condition de transversalité, laquelle, entre deux directions de plans, s'exprime par

$$\Delta_1(u, v) = 0,$$

en désignant par $u = 0$, $v = 0$ les équations de ces plans ou de deux surfaces qui leur sont respectivement tangentes.

La principale et même à peu près unique modification à apporter au calcul pour lui donner ce caractère invariantif est celle que nous avons déjà indiquée au n° **40** *bis* et qui consiste à introduire non plus l'élément de volume euclidien $d\mathrm{T}$, mais l'élément de volume riemannien $\overline{d\mathrm{T}} = \rho d\mathrm{T}$ défini à l'aide de la forme métrique **H** qui convient au problème donné.

Montrons que $\overline{d\mathrm{T}}$ *est un invariant*. En effet, dans la terminologie du calcul tensoriel ou absolu, ρ a la variance d'un *multiplicateur*, c'est-à-dire que

$$\rho = \rho' \frac{\mathrm{D}(x'^1, \ldots, x'^m)}{\mathrm{D}(x^1, \ldots, x^m)}.$$

Or, on a évidemment

$$d\mathrm{T} = \frac{\mathrm{D}(x^1, \ldots, x^m)}{\mathrm{D}(x'^1, \ldots, x'^m)}\, d\mathrm{T}',$$

d'où

$$\overline{d\mathrm{T}} = \rho d\mathrm{T} = \rho' d\mathrm{T}' = \overline{d\mathrm{T}'}.$$

---

(1) Voir Th. de Donder, *Théorie des invariants intégraux*. (Paris, Gauthier-Villars, 1927), en particulier pages 113 et 114, formules 421 et 428.

209. Mais il faut noter que, pour développer les calculs d'une manière complètement invariantive, il convient plutôt [1], comme nous l'avons fait aux nos **168-171**, d'introduire le paramètre différentiel Δ_2 de Lamé-Beltrami et d'écrire l'équation sous la forme

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad \overline{\mathcal{F}}(u) = \Delta_2 u + \sum_i \overline{\mathrm{B}}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \overline{\mathrm{C}}u = f.$$

On se rappelle que ce paramètre différentiel

$$(2) \qquad \Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \mathrm{A}^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right)$$

déduit de la forme métrique **H**, réciproque de **A**, est par lui-même un *invariant* (du moment que, effectuant sur les x une transformation ponctuelle arbitraire, on transforme la forme métrique comme il a été dit au n° **208**). Comme le terme non différentié $\overline{\mathrm{C}}u$ garde aussi sa valeur dans ces conditions, l'on voit qu'il en sera de même de la partie du premier ordre

$$(3) \qquad \sum_i \overline{\mathrm{B}}^i \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Ceci entraîne $\left[\right.$puisque les $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ sont les composantes d'un vecteur covariant (n° **208**)$\left.\right]$ que, dans une transformation ponctuelle exécutée sur les x^i, les coefficients $\overline{\mathrm{B}}^i$ doivent se transformer conformément à la loi (A) du n° **208.** Les $\overline{\mathrm{B}}^i$ sont donc les composantes d'un vecteur contrevariant. Au contraire, lorsqu'on écrit l'équation sous la forme (E), les coefficients que nous avons appelés B^i ne présentent aucune propriété d'invariance et ne se transforment pas de façon simple [2].

---

(1) Th. de Donder, *sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque.* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9e Série, t. VII, fasc. 2, 1928.)

(2) Comme me l'a fait remarquer M. De Donder, la forme $(\overline{\mathrm{E}})$ donnée à l'équation permet de donner une forme particulièrement élégante aux calculs du n° **49** et du n° **62**, c'est-à-dire au résultat de substitution de

210. Que l'on parte de l'une ou de l'autre des deux formes (d'ailleurs équivalentes) précédentes, l'inconnue qu'il conviendra de faire figurer dans l'*équation adjointe* sera l'inconnue invariante $\overline{v}$ du n° **40** *bis*, liée à v par la relation

$$(4) \qquad \rho\overline{v} = v,$$

moyennant quoi le polynome adjoint $\overline{\mathcal{G}}(\overline{v})$ sera, comme au n° **40** *bis* ou au n° **169**,

$$(\overline{\mathcal{G}}) \qquad \overline{\mathcal{G}}(\overline{v}) = \frac{1}{\rho}\sum_{i,k}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}(\rho A^{ik}\overline{v}) - \frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho B^i \overline{v}) + C\overline{v}$$

ou bien encore :

$$(\overline{\mathcal{G}}) \qquad \overline{\mathcal{G}}(\overline{v}) = \frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_k \rho \overline{A}^{ik}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x^k}\right) - \frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\overline{B}^i\overline{v}) + \overline{C}\overline{v},$$

où

$$\overline{A}^{ik} = A^{ik} \qquad \text{et} \qquad \overline{C} = C.$$

Pour l'inconnue $\overline{v}$, nous savons que nous devons prendre, en vue des calculs des Livres III et IV, *la solution élémentaire de l'équation adjointe*. Il en résulte que cette solution élémentaire devra être liée à la solution v introduite dans les calculs dont il s'agit, par la relation (4). Son numérateur $\overline{V}$ devra, d'une part, satisfaire à l'équation qui se déduit de (39) (n° **62**) en y remplaçant le polynome $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{G}}$ (et non par $\mathcal{G}$); de l'autre, *prendre au sommet a du conoïde lui-même, une valeur égale à l'unité*

$u = UG^p$ ou de $u = U\Gamma^p$. Il suffit, en effet, de recourir à la formule (34) Darboux (*Leçons*, t. III, n° **679**), en la combinant avec les valeurs de $\Delta_1\Gamma$, $\Delta_1(\Gamma, U)$ et $\Delta_2\Gamma$ obtenues dans notre Livre II, formules (32′), (34), (37), pour écrire immédiatement la valeur de $\mathcal{F}(u)$ et, par conséquent, nos équations (13), (14), (39) et (39′) (Liv. II).

[le facteur $\rho_a = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}$ qui figure dans l'équation du n° **62** *bis* étant détruit par celui qu'introduit la relation (4) ci-dessus]. Nous avons déjà tenu compte de ce changement aux n^{os} **169-170.**

C'est donc la quantité $\overline{v}$ ainsi définie, que nous introduirons dans les calculs des Livres III et IV. D'autre part, dans toutes les formules intégrales de ces deux livres (n^{os} **104** et suivants du Livre III; n^{os} **135** et suivants du Livre IV) et, tout d'abord, dans la formule fondamentale (F) (n° **40**) dont elles dérivent, on devra, par contre, multiplier l'élément d'intégration, dans chacune des intégrales de volume **SSS**, par ρ. En remplaçant, dans l'intégrale **SSS** de la formule (F), les quantités v, $\mathcal{G}$ et dT respectivement par $\overline{v}$, $\overline{\mathcal{G}}$ et $\overline{dT}$, on multiplie et on divise l'élément différentiel de cette intégrale par ρ, puisqu'on a à la fois :

$$\overline{v} = \frac{v}{\rho}, \qquad \overline{\mathcal{G}}(\overline{v}) = \frac{1}{\rho}\,\mathcal{G}(v), \qquad \overline{dT} = \rho dx^1 \ldots\ldots dx^m.$$

Il en résulte que les intégrales de cette espèce qui figurent dans les formules (F) du Livre II (39) du Livre III et (14') du Livre IV ne changent donc pas de valeur, ainsi qu'il devait en être évidemment.

D'autre part, la modification ainsi apportée à la forme des intégrales m^{uples} conduit à en opérer une toute parallèle dans les intégrales de frontière **SS** des formules en question. Au lieu des symboles $\pi_i d$S du n° **38,** on introduira leurs produits par la quantité ρ. L'opportunité de cette multiplication devient d'ailleurs particulièrement évidente si l'on se reporte à ce qui a été dit au n° **39** et si, comme à cet endroit, on suppose l'équation de la frontière S écrite sous une forme déterminée G $=$ o, les π_i étant les dérivées partielles de G. Il est clair en effet, dans ces conditions, que le symbole $dS_G = \frac{dT}{dG}$ devra, dans notre nouvelle notation, être remplacé par le symbole analogue $\overline{dS_G} = \frac{\overline{dT}}{dG}$ qui en diffère précisément par ce facteur ρ.

Montrons que *les quantités* $\rho\pi_i dS$ *sont les composantes d'un vecteur covariant*. On a évidemment :

$$\rho\pi_i dS = (-1)^i \rho dx^1 dx^2 \ldots\ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots\ldots dx^m;$$

Or, $\xi^{(i)} = dx^1 \ldots\ldots dx^{i-1}\, dx^{i+1} \ldots\ldots dx^m$ sont les composantes d'un *tenseur symétrique gauche* $(m - 1)$ *fois contrevariant*. On sait (1) qu'en multipliant $\xi^{(i)}$ par $(-1)^i$ et par un multiplicateur, ici par ρ, on obtient les composantes d'un vecteur covariant.

Mais les π_i, étant les dérivées partielles de la fonction invariante G par rapport aux variables x^i, sont les composantes d'un vecteur covariant (n° **208**). Il en résulte que ρdS est *un invariant*, tout comme ρdT (n° **208**).

Rappelons que

$$\frac{du}{d\nu} = \sum_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \pi_\beta$$

est aussi *un invariant*, puisqu'il est égal à $\Delta_1(u, G)$.

Posons

$$\pi^\beta = \sum_\alpha A^{\alpha\beta}\pi_\alpha.$$

d'où

$$\frac{du}{d\nu} = \sum_\beta \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \pi^\beta.$$

Les π_α sont les composantes *covariantes*, tandis que les π^α sont les composantes *contrevariantes* du vecteur normal à la surface S d'équation $G = o$ (2). En langage de calcul tensoriel, la quantité scalaire ou invariante $\rho \dfrac{du}{d\nu} dS$ ou

$$\sum_{\alpha\beta} \rho A^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \pi_\beta dS$$

---

(1) G. Kœnigs, *Comptes-rendus*, 9 déc. 1895 et 6 janvier 1896. — Th. de Donder (*Théorie des invariants intégraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1927); voir p. 88, avant-dernière des formules (301).

(2) Th. de Donder, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9e série, t. VII, fasc. 2, 1928); voir pages 181 et 182, formules (45) et (46).

s'obtient comme « produit contracté » du vecteur covariant de composantes $\rho\pi_\beta d\mathrm{S}$ par le vecteur covariant de composantes $\dfrac{\partial u}{\partial x^\alpha}$ et par le tenseur deux fois contrevariant de composantes $\mathrm{A}^{\alpha\beta}$, ou comme le produit contracté du vecteur contrevariant de composantes π^α par le vecteur covariant de composantes $\dfrac{\partial u}{\partial x^\alpha}$.

Retournons à la formule fondamentale (F) du Livre II. En remplaçant, dans l'intégrale de frontière **SS** de cette formule, les quantités v et L par $\bar{v}$ et $\bar{\mathrm{L}}$, on ajoute, puis on soustrait $\dfrac{uv}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{d\nu}$ du coefficient de l'élément différentiel de cette intégrale; ensuite en substituant $\rho d\mathrm{S}$ à $d\mathrm{S}$ on a multiplié et on a divisé en même temps cet élément différentiel par ρ. Il en résulte que les intégrales de cette espèce qui figurent dans les formules (F) du Livre II, (39) du Livre III et (14′) du Livre IV ne changent pas de valeur.

On voit donc qu'en modifiant l'écriture de la formule fondamentale (F) du Livre II comme il est indiqué dans ce paragraphe, *on la rend invariantive tout en n'altérant pas la valeur commune des deux membres.*

Rappelons que (nos **40** et **40** *bis*) :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} &= \sum_i \pi_i \left(\mathrm{B}^i - \sum_k \frac{\partial \mathrm{A}^{ik}}{\partial x^k}\right) \\ \bar{\mathrm{L}} &= \sum_i \pi_i \left(\mathrm{B}^i - \sum_k \frac{\partial \mathrm{A}^{ik}}{\partial x^k}\right) - \frac{d \log \rho}{d\nu} \end{aligned}\right.$$

211. La formule fondamentale a déjà été écrite en partant du calcul invariantif au n° **40** *bis*. Mais le résultat est notablement plus simple, surtout son caractère invariantif plus évident si l'on prend l'équation sous la forme $(\bar{\mathrm{E}})$. C'est ce qui va résulter de la manière même dont a été défini le symbole Δ_2, c'est-à-dire de la forme de l'équation (35) du n° **59**. Dans celle-ci, qui est une

application de l'identité de Green, les quantités Δ_1 et Δ_2 ont la forme

$$\Delta_1(u, \bar{v}) = \sum_{i,k} A^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^k},$$

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_k \rho A^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right),$$

$$\Delta_2 \bar{v} = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_k \rho A^{ik} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^k} \right)$$

ne contenant aucun terme en u, $\bar{v}$ non différentié, et donnent l'équation

$$\mathbf{SSS}\, \rho \Delta_1 (u, \bar{v})\, dx^1 \ldots dx^m + \mathbf{SSS}\, \rho\, \bar{v}\, \Delta_2 u\, dx^1 \ldots dx^m = - \mathbf{SS}\, \rho\, \bar{v} \frac{du}{d\nu}\, dS$$

correspondant à celle de Darboux [Leçons, t. III, n° **674**, équation (18)], sauf que la dérivée ainsi introduite est notre dérivée transversale $\frac{du}{d\nu}$. L'équation qui s'en déduit (**59**, Remarque), grâce à la symétrie du symbole Δ_1, est

$$\mathbf{SSS}\, [\bar{v}\Delta_2 u - u \Delta_2 \bar{v}] \rho dT = - \mathbf{SS} \left(\bar{v} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\bar{v}}{d\nu} \right) \rho dS.$$

Le terme en $u\bar{v}$, dans l'intégrale de frontière, n'est donc fourni que par la partie du premier ordre (3); la formule complète est encore de la forme du n° **40** *bis*

$$\mathbf{SSS} \left[\bar{v} \left(\Delta_2 u + \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) - u \left(\Delta_2 \bar{v} - \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \rho \bar{B}^i \bar{v} \right) \right] \rho dT$$
$$= - \mathbf{SS} \left(\bar{v} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\bar{v}}{d\nu} + \bar{L} u \bar{v} \right) \rho dS$$

ou :

$$\mathbf{SSS}\, [\bar{v} \mathcal{F}(u) - u \mathcal{G}(\bar{v})]\, \rho dT = - \mathbf{SS} \left(\bar{v} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\bar{v}}{d\nu} + \bar{L} u \bar{v} \right) \rho dS$$

Mais cette fois, $\overline{L}$ a l'expression simple

$$(6) \qquad \overline{L} = \sum_i \pi_i \overline{B^i},$$

dont le caractère invariant apparaît immédiatement, puisque les $\overline{B^i}$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant. On retrouve d'ailleurs bien ainsi, pour l'équation écrite sous sa forme primitive (E), la valeur $\overline{L}$ calculée au n° **40** *bis*. En effet, en comparant les équations (E) et $(\overline{E})$, on remarque que

$$\overline{B^i} = B^i - \frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial \rho A^{ik}}{\partial x^k},$$

d'où

$$(6') \quad \overline{L} = \sum_i \pi_i \overline{B^i} = \sum_i \pi_i \left(B^i - \sum_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} \right) - \frac{d \log \rho}{d\nu},$$

ce qui est bien la valeur trouvée précédemment pour $\overline{L}$, au n° **40** *bis* (p. 91).

Les opérations étant ainsi rendues complètement invariantives par rapport à toute transformation ponctuelle opérée sur les x^i, il n'y a plus, dans des raisonnements comme ceux des n^{os} **141** ou **174** et suivants, à s'arrêter au fait qu'une telle transformation a été effectuée : les résultats obtenus dans les numéros en question moyennant une forme spéciale donnée à l'équation, se transportent d'eux-mêmes à l'équation donnée sous sa forme primitive.

212. En résumé, pour rendre invariantifs les calculs développés dans le corps de l'ouvrage, on devra :

introduire sous les signes **SSS** l'élément de volume riemannien $\overline{dT} = \rho dT$ $\left(\text{avec } \rho = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\right)$ au lieu de l'élément euclidien $dT = dx_1\, dx_2 \ldots\, dx_m$; sous tous les signes **SS**, l'élément de surface $\overline{dS} = \rho dS$ au lieu de l'élément dS défini dans ce qui précède;

laisser aux lettres u et ν leurs significations premières;

changer la valeur de L conformément à la relation (6′) ci-dessus;

remplacer la solution élémentaire v de l'équation adjointe par la solution élémentaire $\bar{v}$, proportionnelle à la première, mais égale à l'unité au sommet du conoïde.

La formule (39) du Livre III deviendra ainsi [1] :

$$u_a = \overline{\left| - \mathbf{SSS}\ \rho f \bar{v}\, dx^1 \ldots dx^m \right.}$$
$$+ \overline{\left| \mathbf{SS} \left(u \frac{d\bar{v}}{d\nu} - \bar{v} \frac{du}{d\nu} - \bar{L} u \bar{v} \right) \overline{dS} \right.}.$$

Dans les formules (29), (29 *bis*) et (29 *ter*) du Livre IV, seront également multipliés par le facteur ρ non seulement les éléments de volume et de surface dT, dS, mais aussi les éléments $d\tau_\gamma$, $d\sigma_\gamma$ qui en dérivent, pendant qu'on mettra pour V et $\mathcal{V}$ leurs nouvelles valeurs empruntées à l'expression $\bar{v}$ et différant des premières par le facteur $\frac{1}{\rho}$.

---

(1) Si, outre les composantes contrevariantes $\pi^\alpha d$S introduites ci-dessus, nous introduisons les composantes covariantes $\mathcal{B}_i$ définies au n° **169**, p. 372, la quantité sous le signe **SS**, dans la formule du texte est le produit contracté ou produit scalaire du vecteur $\pi^\alpha \overline{dS}$ par le vecteur covariant

$$u\ \overrightarrow{\text{grad}}\ v - v\ \overrightarrow{\text{grad}}\ u - \overrightarrow{\mathcal{B}} uv.$$

(Observation de M. Noaillon.)

APPENDICE II

NOTIONS SUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME MIXTE

---

213. Nous avons, au Livre I, mis en évidence les circonstances dans lesquelles l'intégration d'une équation du type hyperbolique normal conduit, non pas au problème de Cauchy, mais à ce que nous avons appelé un *problème mixte*. Il en est ainsi toutes les fois que le phénomène physique régi par l'équation aux dérivées partielles est étudié dans un milieu limité par des frontières quelconques.

Bien entendu, dans des cas de cette espèce, on ne saurait se donner, ou du moins se donner arbitrairement, les données de Cauchy. Le problème ainsi posé serait, en général, impossible par surabondance des données. C'est ce fait qui a été constaté le premier, dans un article de M. Picard inséré au *Bulletin des Sciences Mathématiques* (1) en 1899 et relatif au cas de l'équation de Laplace (ε) (Liv. II). Supposons que nous intégrions une telle équation par la méthode de Riemann en menant, par le point donné quelconque a, les parallèles $a\alpha$, $a\beta$ aux axes coordonnés, jusqu'à rencontre avec la ligne S qui est supposée porter les données $u, \frac{du}{dv}$ (fig. 6 et 6 *bis* du n° **42**). Si, comme nous l'avons supposé au n° **42**, chacune des deux coordonnées est monotone le long de S, la formule fournie par la méthode de Riemann répond, comme cela résulte de nos théories générales et comme on le vérifie directe-

---

(1) Tome XXIII, page 180.

ment, à toutes les conditions du problème et, en particulier, si le point a tend vers un point déterminé m_0 de S, la quantité ainsi calculée tend précisément vers la valeur donnée de u au point m_0, grâce au fait que, dans ces conditions, le triangle $a\alpha\beta$ devient infiniment petit.

Mais supposons, au contraire, que S ait la forme indiquée sur la figure 34, c'est-à-dire se compose d'un arc S′ le long duquel x est une fonction décroissante de y, suivi, à partir d'un point o (1), d'un arc S″ le long duquel x devient croissant (y continuant à croître). Il est alors clair que la construction de Riemann est, pour tout point a situé à droite de S, possible de deux façons différentes. Chacun des deux triangles $a\alpha\beta'$, $a\alpha\beta''$ (fig. 34) ainsi construits permettrait, si l'on se donnait les données de Cauchy tant sur S′ que sur S″, d'écrire la formule de Riemann et d'obtenir ainsi une valeur de u_a. Or, il n'y a évidemment aucune raison, en thèse générale, pour que ces deux valeurs concordent.

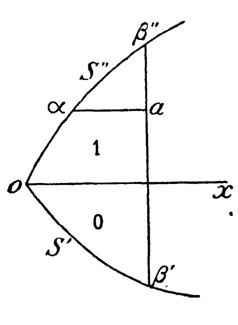


Fig. 34.

214. Nous avons dit comment, en réalité, doivent être choisies les données pour que le problème soit correctement posé : on doit prendre les données de Cauchy sur l'un des arcs, S′ par exemple, et *une seule* donnée, soit la valeur de u, en chaque point de l'autre arc S″. Il reste à montrer que nous aurons effectivement ainsi un problème possible et déterminé.

Tout d'abord, si nous menons, par le point o, la caractéristique ox suivant la direction de l'axe des x, de manière à décomposer la région $\mathcal{R}$ qui nous intéresse en deux parties, que nous noterons 0 et 1, respectivement attenantes

---

(1) Un tel maximum de x peut correspondre, soit à une tangente en o unique et, par conséquent, parallèle à l'axe des y, soit à un point anguleux. C'est toujours le second cas qui se présente dans les applications introduites par les problèmes physiques.

à S′ et à S″, rien ne sera changé à nos conclusions du Livre II dans la région 0, la connaissance des données de Cauchy relatives à S′ permettant alors l'application de la méthode de Riemann sans aucune modification. Notre solution sera donc ainsi connue dans toute une partie de son domaine d'existence et, en particulier, sur la ligne ox. Nous sommes, par conséquent, ramenés à trouver, dans la région 1, une solution u'' de notre équation, connaissant ses valeurs tant sur la demi-droite caractéristique ox que sur l'arc S″.

Inversement, u'' étant supposé ainsi déterminé, une fonction égale à u'' dans 1 et, d'autre part, dans 0, à la quantité u' calculée par la méthode de Riemann, sera solution de l'équation dans chacune de ces régions et sera continue le long de la ligne mitoyenne ox. Il y aura, par contre, lieu de se demander si cette continuité s'étendra à ses dérivées premières, comme nous avons été conduits à l'exiger, ou même, éventuellement, à des dérivées d'ordre supérieur. Il n'y a point de question à cet égard pour les dérivées par rapport à x, lesquelles s'obtiennent en différentiant les valeurs de u' ou de u'', égales chacune à chacune, par construction, tout le long de ox. Pour les valeurs de la dérivée q, une condition nécessaire est évidemment la concordance au premier ordre (Cf. nos **28, 156**) entre les données en o, c'est-à-dire l'égalité, en ce point, entre la dérivée de u'' suivant S″ et la valeur analogue que l'on déduirait, pour u', des données de Cauchy relatives à S′. Cette concordance est d'ailleurs suffisante pour la continuité de q en o, et d'autre part (**51** *bis*), celle-ci entraîne [1] la continuité tout le long de ox.

---

(1) L'équation donnée, étant supposée être l'équation (ϵ) du n° **46**, donne évidemment, en q considéré comme fonction de x (lorsqu'on s'est donné tout d'abord u tout le long de ox), l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \mathrm{B}q + \mathrm{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{C}u = f.$$

C'est celle-ci qui fournit, pour (ϵ), la même conclusion que la première équation (18) du n° **51** pour l'équation aux dérivées partielles prise sous la forme (15) du n° **50**.

Des remarques toutes semblables s'appliqueraient aux dérivées suivantes, moyennant autant de conditions de concordance au point o. Nous avons dit, au Livre II, pourquoi on doit considérer comme essentielle celle dont nous venons de traiter et qui est relative à q. Nous supposerons vérifiée la condition de concordance correspondante et, dans ces conditions, nous voyons que notre problème mixte se ramène complètement au suivant :

(P). — *Trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles, connaissant les valeurs qu'elle prend sur deux lignes issues d'un même point o, l'une S′ étant caractéristique et l'autre S″ située dans l'un des angles compris entre cette caractéristique et une caractéristique du système opposé* (avec la condition que, sur S″, y soit fonction monotone de x).

Comme cas limite, cette seconde ligne peut être également supposée caractéristique : dans ce cas, on retrouve un problème connu [1], qui se traite par la même méthode (celle de Riemann) que le problème de Cauchy.

215. Le problème (P) appartient à une catégorie dont nous avons traité au Livre II (n° **52**) d'après M. Goursat, dans le cas de m variables indépendantes. Mais, pour $m = 2$, M. Picard [2] a pu démontrer l'existence et l'unicité de la solution sans supposer les données analytiques, en en ramenant la recherche à la résolution d'une équation intégrale. A cet effet, $S'(y = o)$ et $S''[x = g(y)]$ étant les deux lignes données issues de l'origine o des coordonnées, on commence par remarquer qu'une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F(x,y) \tag{1}$$

(1) Darboux, *Leçons*, t. II, n°s 364-365 de la deuxième édition, 1915.
Ce que nous venons de constater et, particulièrement, l'équivalence du problème mixte avec le problème (P), est conforme à ce que nous avons vu au n° 113 (Cf. p. 243, note) sur le rôle des caractéristiques comme transition entre les variétés orientées dans l'espace et les variétés orientées dans le temps.

(2) *In* Darboux, *Leçons*, t. IV, note finale.

(F étant une fonction donnée de x, y) qui s'annule sur ces deux lignes est immédiatement fournie par l'intégrale double

$$\iint_R F(x, y)\,dxdy$$

étendue au rectangle R dont un sommet est au point $a(x, y)$, un côté $a\alpha$ parallèle à l'axe des x et terminé en α à S″ et le côté opposé $\beta\gamma$ sur S′ (fig. 35).

D'autre part, on a facilement la solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ (c'est-à-dire la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y) qui prend les valeurs $u' = \varphi(x)$ sur S′ et les valeurs $u'' = \psi(y)$ sur S″, savoir [moyennant la condition $\varphi(0) = \psi(0)$] la quantité

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi[g(y)]$$

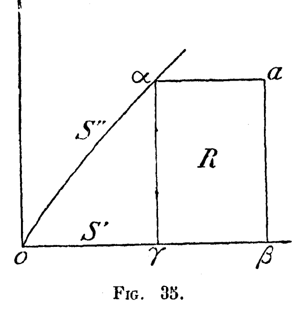


Fig. 35.

Dès lors, la solution de l'équation (1) qui prend les valeurs $u' = \varphi(x)$ sur S′ et les valeurs $u'' = \psi(y)$ sur S″ (les deux fonctions φ et ψ prenant toujours la même valeur en o) s'en déduit immédiatement, savoir

$$\iint_R F dxdy + \Phi,$$

quantité qui satisfait bien aux conditions posées et qui est seule à y satisfaire.

Si maintenant il s'agit d'intégrer, avec les mêmes conditions aux limites, l'équation de Laplace quelconque

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu\right) + f,$$

on y considérera provisoirement le second membre comme connu, ce qui, ramenant l'équation à la forme (1), conduira à écrire

$$u_a = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi[g(y)] + \iint_R \left(f - A\frac{\partial u}{\partial x} - B\frac{\partial u}{\partial y} - Cu\right) dxdy$$

ou, moyennant des intégrations par parties et l'application de la formule de Riemann,

$$(2)\quad u_a = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi\,[g(y)] + \iint_R f\,dxdy$$
$$+ \iint_R u\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - C\right) dxdy + \int_{\alpha x\gamma\beta} u(Bdx - Ady),$$

équation qui est équivalente à l'ensemble de l'équation aux dérivées partielles (ε) et des conditions définies sur S′ et S″.

Or, ceci est une équation intégrale, relevant des mêmes méthodes que l'équation de M. Volterra, c'est-à-dire se résolvant par une série partout convergente d'approximations successives, la méthode employée faisant ressortir à la fois l'existence et l'unicité de la solution.

Cette méthode s'applique également au cas limite ci-dessus mentionné où S″ est également une caractéristique : elle démontre alors l'existence de la fonction $\mathcal{V}$ de Riemann (laquelle est également définie par des conditions du type que nous venons d'examiner) sans supposer que les coefficients de l'équation soient des fonctions analytiques des variables indépendantes. C'est, pour $m = 2$, ce que nous avons fait, pour m quelconque, au Livre IV (n°s **192** et suivants).

216. Cette première solution du problème a évidemment l'inconvénient d'exiger un calcul entièrement nouveau pour chaque système particulier de données. A ce titre, elle doit être considérée plutôt comme une démonstration d'existence que comme une véritable méthode de calcul.

Nous allons chercher à échapper à cet inconvénient. Toutefois, nous ne pouvons pas espérer obtenir un résultat équivalent, sous ce point de vue, à celui que nous avons atteint en ce qui concerne le problème de Cauchy, c'est-à-dire ramener tout le calcul à la formation d'une seule expression — telle que la fonction de Riemann — constructible à l'aide de la seule équation donnée. Nous avons déjà dit, en effet, qu'on ne peut pas éviter, dans l'étude du

problème mixte, l'influence profonde de la forme de la ligne S″ : nous devrons nous être donné à l'avance cette ligne pour construire la quantité auxiliaire que nous aurons à introduire dans la formule fondamentale. Par contre, les données u et $\frac{du}{d\nu}$ pourront n'être introduites qu'après la construction de cette quantité.

Nous partirons de la figure 34, car nous pourrons raisonner indifféremment soit sur le problème (P), soit directement sur le problème mixte. Le point a étant supposé dans la région 1 (sans quoi nous avons vu que le problème serait déjà résolu), traçons la caractéristique $a\alpha$ parallèle à l'axe des x jusqu'à rencontre en α avec S″ puis, les deux caractéristiques $a\beta\beta'$, $\alpha\gamma\gamma'$ parallèles à l'axe des y (fig. 36) jusqu'à rencontre en β' et γ' avec S′. Nous étendrons l'intégration double analogue à celle qui intervient dans la méthode de Riemann à l'aire mixtiligne $a\alpha o\beta'$, mais en choisissant de manière différente la fonction auxiliaire dans les deux parties en lesquelles cette aire est divisée par $\alpha\gamma'$. Dans le quadrilatère $a\alpha\gamma'\beta'$, nous conserverons la fonction de Riemann sans modification; dans le triangle mixtiligne $\alpha o\gamma'$, au contraire, nous introduirons une fonction nouvelle ($\mathcal{V}$), toujours solution de l'équation adjointe, mais définie, d'autre part, par les conditions suivantes :

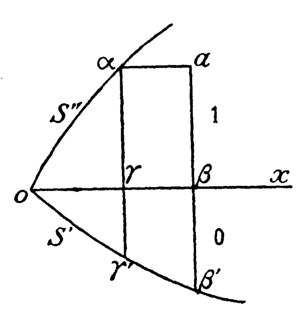


Fig. 36.

sur S″ (ou, plus exactement, sur l'arc αo de S″), elle sera nulle;

sur la caractéristique $\alpha\gamma'$, elle sera telle que la différence

$$(\mathcal{V}) - \mathcal{V} \tag{3}$$

varie suivant la même loi exponentielle qui se présentait dans la méthode de Riemann, soit (puisque cette différence

doit être égale à $-\mathcal{V}$ au point α) :

$$(3') \quad (\mathcal{V}) - \mathcal{V} = -\mathcal{V}_a e^{\int_{y_0}^{y} A(\xi,y)\,dy}$$

$$= -e^{\int_{x_0}^{\xi} B(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} A(\xi,y)\,dy},$$

relation dans laquelle ξ désigne l'abscisse de la caractéristique $\alpha\gamma$.

La fonction $(\mathcal{V})$ est, pour le problème actuel, l'analogue de la fonction de Green du problème de Dirichlet : elle est à la fonction de Riemann ce que la fonction de Green est au potentiel élémentaire. Sa recherche relève du problème traité au numéro précédent, et, par conséquent, nous pouvons affirmer son existence pour chaque forme de la ligne S″ (sous les conditions géométriques précédemment posées).

Appliquons maintenant la formule fondamentale à u et à $\mathcal{V}$ dans l'aire $a\alpha\gamma'\beta'$, à u et à $(\mathcal{V})$ dans l'aire $\varsigma o\gamma'$. Les intégrales curvilignes suivant $a\alpha$ et $a\beta'$ sont telles qu'on les rencontre dans la méthode de Riemann. La somme algébrique des intégrales suivant $\alpha\gamma'$ (en tenant compte des sens d'intégration qui sont contraires) introduira la différence (3), laquelle, en vertu de (3′), se traitera à son tour comme il arrive dans la méthode de Riemann. Au total, il vient :

$$\left\{\begin{aligned}
u_a &= \frac{1}{2}(u\mathcal{V})_\alpha + \frac{1}{2}(u\mathcal{V})_{\beta'} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_a u_{\gamma'} e^{\int_\alpha^{\gamma'} A\,dy} \\
&- \int_{\gamma'}^{\beta'} \frac{1}{2}\left(\mathcal{V}\frac{du}{d\nu} - u\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}\right) ds + u\mathcal{V}(B\,dx - A\,dy) \\
&- \int_{o}^{\gamma'} \frac{1}{2}\left[(\mathcal{V})\frac{du}{d\nu} - u\frac{d(\mathcal{V})}{d\nu}\right] ds + u(\mathcal{V})(B\,dx - A\,dy) \\
&- \frac{1}{2}\int_{o}^{\alpha} u\frac{d(\mathcal{V})}{d\nu}\,ds,
\end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule cherchée.

217. Dans les applications physiques, S′ représente généralement l'état initial d'un milieu linéaire, tandis que S″ représente, dans le temps, une frontière (fixe ou, comme au n° **24 *bis*,** mobile) de ce milieu. Si le point a du graphique espace-temps est dans la région **0**, cela signifie qu'il n'est influencé que par l'état initial. Si, au contraire, ce point vient à traverser la caractéristique ou onde de démarcation $\mathcal{C}$ (qui, sur la figure 36, est située suivant l'axe ox), de manière à passer dans la région **1**, le phénomène qu'on y constatera dépendra à la fois de l'état

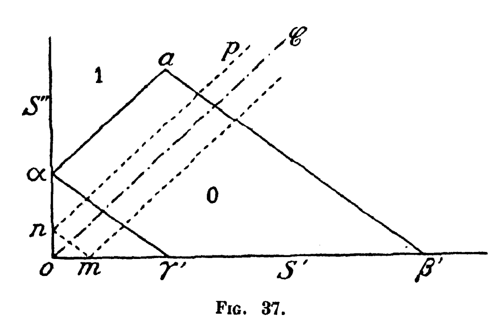


Fig. 37.

initial et des données à la frontière. Sur la figure 37, équivalente à la figure 36 à ceci près que S′ et S″ sont maintenant représentés par les axes coordonnés, le segment $o\beta'$ représente la partie de l'état initial qui est susceptible d'influencer le point en question; mais cette influence est de caractère différent pour les deux segments partiels $\beta'\gamma'$, $o\gamma'$.

Pour en comprendre plus aisément la nature, raisonnons en sens inverse et, partant d'un point m (fig. 37) pris sur S′, cherchons comment devra être placé le point a pour que m appartienne à l'un ou l'autre des segments dont il vient d'être question. Pour cela, on devra tout d'abord mener les deux caractéristiques issues de m, formant ainsi un angle hors duquel aucun point a ne saurait être influencé par l'état initial en m. L'une de ces lignes rencontre en n la ligne S″ et si, par n, on mène une seconde caractéristique np, il est visible, à simple inspection de la figure 37,

que m appartiendra à l'un ou à l'autre des deux segments $o\gamma'$, $\gamma'\beta'$ construits à l'aide du point a suivant que a sera dans l'une ou dans l'autre des deux régions que détermine, dans l'angle des points sous onde par rapport à m, cette caractéristique np. Il importe de noter le rôle parfaitement réciproque que jouent, dans cette construction, à l'échange près des deux caractéristiques et à l'inversion près du sens du temps, les deux points a et m. C'est, dans ce cas un peu plus compliqué, l'analogue exact de ce que nous avons noté au n° **32.**

Or, la signification de la caractéristique np apparaît immédiatement : ce n'est autre chose que l'onde réfléchie déduite de l'onde directe émanée de m. Le principe de réciprocité ou (Cf. n° **32**) de retour inverse permet dès lors d'interpréter de même la caractéristique $a\gamma'$; elle représente l'onde rétrograde issue de a et réfléchie sur S″

Enfin, cette même propriété de réciprocité s'étend, quantitativement, sous forme d'une propriété de la quantité ($\mathcal{V}$). La quantité ($\mathcal{V}$), qui, comme la fonction de Riemann, dépend des coordonnées des deux points a et m, *possède également la propriété d'échange* : en vertu d'une démonstration calquée sur celle qui convient à la fonction de Riemann [1], elle garde sa valeur lorsqu'on permute les deux points qui y figurent, en même temps qu'on échange l'équation aux dérivées partielles donnée avec son adjointe.

217 *bis.* Le cas d'un milieu rectiligne limité dans les deux sens se traite par applications répétées de la méthode précédente. Il conduit à un diagramme (fig. 38) limité par un segment S′ de la droite qui représente le milieu dans son état initial et deux frontières S''_1, S''_2 représentant les deux extrémités considérées dans le temps. Toutes les ondes seront cette fois susceptibles de se réfléchir tant à l'une qu'à l'autre de ces deux extrémités et, par conséquent, se réfléchiront chacune un nombre infini de fois. Il en sera ainsi, tout d'abord, pour l'onde que nous avons

(1) Voir notre article du *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. XXXI, p. 213-215.

appelée il y a un instant onde de démarcation, ou plutôt pour les deux ondes de cette espèce nées respectivement aux deux extrémités. Leurs réflexions délimiteront, à l'intérieur de notre diagramme d'espace-temps, une série de régions (fig. 38; cf. nos *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. IV, p. 148) dont la première, attenante à S′, contiendra les points influencés par l'état initial seul, tandis que les suivantes (numérotées en conséquence) seront

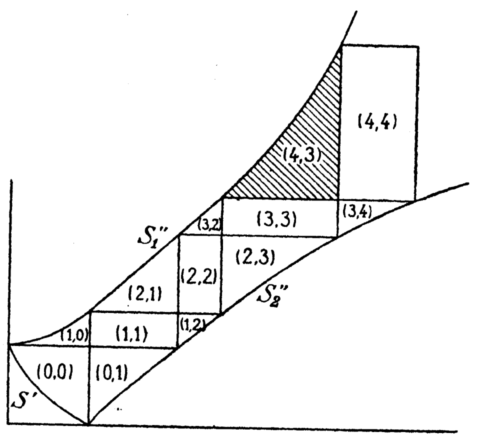


FIG. 38.

celles sur lesquelles l'état initial agira par l'intermédiaire d'une, deux, etc. réflexions successives tant à droite qu'à gauche (p réflexions d'un côté; $p - 1$, p ou $p + 1$ de l'autre). La figure 38 *bis* représente la série des ondes rétrogrades dérivées, par réflexions successives, de celle qui a pour origine un point déterminé a [pris, en l'espèce, dans la région numérotée (4,3) sur la figure 38] : le système de ces ondes détermine, sur S′, les divers segments qui sont sous onde par rapport à un nombre plus ou moins grand d'entre elles. (Inversement, d'ailleurs, pour juger à quel segment appartient un point déterminé quelconque m de S′, on pourrait construire, à partir de ce point, le système des ondes progressives, tant directes que réfléchies un nombre quelconque de fois, et examiner dans quelle

maille du tracé ainsi obtenu se trouve le point a.) A chacune des ondes rétrogrades (fig. 38 *bis*) issues de a avec ou sans réflexion correspondra un choix différent de la fonction auxiliaire à substituer dans la formule fondamentale : il en sera ainsi, par conséquent, dans chacun des

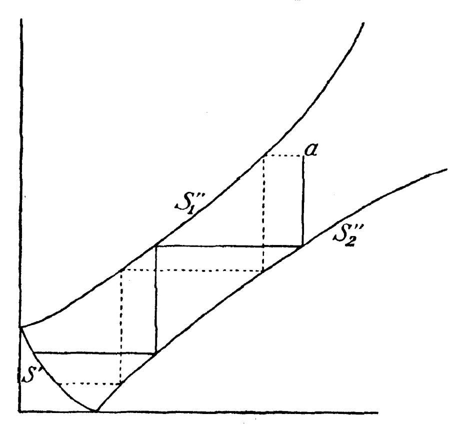


FIG. 38 *bis*.

segments déterminés sur S′, pendant qu'aux extrémités de ces segments correspondront des termes finis contenant en facteur les discontinuités de la fonction auxiliaire.

218. Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront dans les problèmes à un plus grand nombre de variables. Avant d'en venir à ces derniers, montrons comment les conditions précédentes éclairent la solution d'un problème relatif à l'équation (ε) de Laplace et traité par M. Goursat (1).

Soient menées, d'un même point o, deux arcs S′, S″ assez petits pour que, sur chacun d'entre eux, x et y soient monotones. Proposons-nous de déterminer, d'une manière générale, une solution de l'équation de Laplace (ε) par des

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. VI, 1904. La question a été reprise, principalement au point de vue de l'étude de cas limites non traités antérieurement, dans un récent travail de M. Sjöstrand (Thèse, Upsal, 1930).

données relatives à ces deux arcs. Il ressort d'ores et déjà de ce que nous savons que la réponse dépendra essentiellement des relations de S′ et de S″ avec les caratéristiques menées par *o;* trois cas sont évidemment à distinguer :

1° S′ *et* S″ *sont situés dans deux angles opposés formés par les caractéristiques.* Dans ce cas, x et y sont tous deux monotones sur l'arc total S′ + S″ : les données propres à déterminer la solution sont donc celles de Cauchy sur cet arc total;

2° S′ *et* S″ *sont dans deux angles adjacents formés par les caractéristiques.* C'est le cas qui vient d'être étudié, et qui conduit, nous l'avons vu, au problème mixte (données de Cauchy sur l'un des arcs, valeur de u seul sur l'autre).

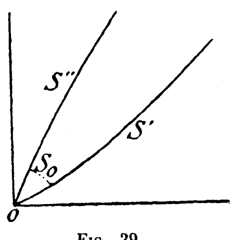


Fig. 39.

Dans ces deux hypothèses, en se donnant seulement les valeurs de u sur S′ et S″, on est conduit à un problème indéterminé; et c'est effectivement ce qu'a constaté M. Goursat. Le seul point nouveau pour nous est le suivant :

3° S′ *et* S″ *sont dans le même angle formé par les caractéristiques.* M. Goursat montre qu'alors le problème est possible et déterminé (¹).

Contrairement aux deux précédents, l'hypothèse dont il s'agit ne correspond à aucune application physique. Mais elle dérive, comme cas limite, de celle que nous venons d'examiner. Il suffit d'imaginer qu'on trace d'abord, entre S′ et S″, un arc S_0 (fig. 39) incliné, par rapport aux caractéristiques, en sens inverse des premiers, et sur lequel on se donnera les données de Cauchy, puis de passer à la limite en faisant tendre cet arc S_0 vers le point unique *o*.

(1) On peut, comme l'ont montré MM. Mason (*Math. Ann.*, t. LXV, 1908) et Myller (*ibid.*, t. LXVIII, 1909, et *Bull. Soc. Sc. Bucarest*, XVIIᵉ année, 1908), se donner les valeurs de u sur deux courbes qui se croisent en *o* (ce qui fait *quatre* arcs de courbes issus de *o*) : suivant la disposition des courbes en question par rapport aux caractéristiques, on constate que ce problème est équivalent à l'un ou à l'autre de ceux dont nous avons parlé.

On constate (1) que le passage à la limite est convergent et qu'on obtient ainsi une solution bien déterminée, calculable par un algorithme dérivé de celui qui précède et continue, y compris le voisinage du point o, du moment que les données concordent en ce point.

Cette condition de continuité en o est essentielle pour que le problème soit bien déterminé (2).

On remarquera que si, outre le point o, les deux arcs S′, S″ ont une extrémité commune ω (fig. 40), on ne peut pas s'imposer simultanément la continuité aux deux points o et ω : la condition de continuité en o suffit, à elle seule, à déterminer, lorsqu'on se donne en outre ses valeurs sur

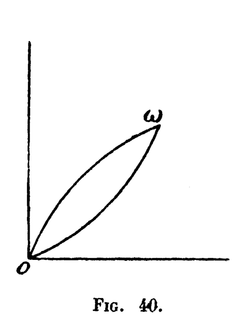


FIG. 40.

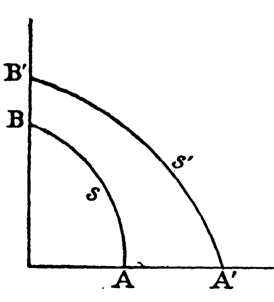


FIG. 40 *bis*.

S′ et sur S″, une solution u de l'équation, laquelle, en général, sera discontinue en ω et cela, bien entendu, même si les deux valeurs données en ω concordent. Il suffit, en effet, d'examiner la ligne polygonale représentée fig. 38 *bis* pour constater qu'elle varie d'une manière finie (entraînant, en général, une altération finie dans la valeur de u_a) pour un déplacement infiniment petit du point a si ce point a est infiniment près de ω (fait que l'on constatera d'ailleurs par un calcul simple si l'on admet, pour fixer les idées, que les deux branches qui aboutissent en ω sont rectilignes aux environs de ce point). D'une manière

(1) Voir notre Mémoire inséré au *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. XXXII, 1904, p. 242.

(2) Plusieurs auteurs ont étudié les solutions, en nombre infini, que l'on obtient en ne s'imposant plus cette condition.

analogue, si, avec M. Fubini (1), on forme un contour fermé (sans point double) avec deux segments AA′, BB′ (fig. 40 *bis*), pris respectivement sur les caractéristiques Ox, Oy et deux arcs AB, A′B′, une solution u de l'équation sera déterminée par ses valeurs sur AA′, AB, A′B′, de sorte que, une fois ces valeurs données, on ne pourra plus disposer de celles qui sont relatives à BB′.

218 *bis*. Dans un Cours professé à la Sorbonne en 1907, M. Picard a montré comment il convient de combiner les différents résultats précédents et de poser les problèmes

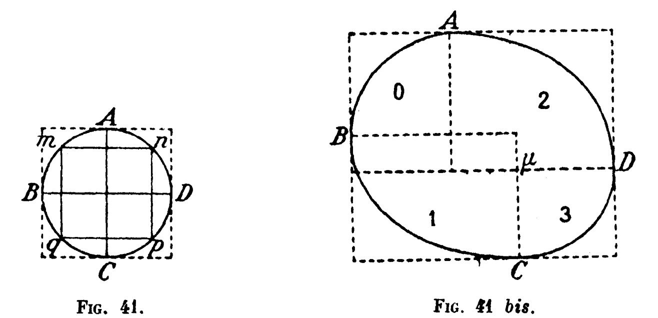


FIG. 41. FIG. 41 *bis*.

en conséquence, lorsque, sur le contour S que l'on destine à porter les données, x et y varient dans des sens quelconques. A cet égard, nous renverrons à son récent ouvrage (2). Un des exemples qu'il cite retiendra notre attention à un point de vue particulier : celui d'une courbe fermée, telle qu'une circonférence (fig. 41). Si, dans le plan d'une telle courbe S, on donne une équation aux dérivées partielles du type de Laplace (ε) et si l'on cherche à déterminer une solution u de cette équation à l'aide de données portées par S, nos conclusions générales conduiront à diviser celle-ci en plusieurs arcs — quatre dans le cas le plus simple d'une circonférence ou de toute autre courbe

(1) *Atti Acc. Torino*, t. XL (1904-05), p. 616.

(2) *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 141.

convexe (fig. 41 *bis*), — par les points de contact A, B, C, D de tangentes parallèles aux axes; ceci fait, on pourra se donner :

Les données de Cauchy sur l'un des arcs ainsi déterminés, AB, par exemple;

une seule donnée sur chacun des deux arcs adjacents AD, BC;

rien sur l'arc restant CD, le système des données précédentes portées sur les trois premiers arcs suffisant à déterminer u dans tout le rectangle de côtés parallèles aux axes circonscrit à la courbe (dans le cas de la figure 41 *bis*, les données de Cauchy portées par le premier arc détermineront u dans le premier rectangle partiel O, après quoi, les données relatives à BC, AD feront connaître cette inconnue dans les rectangles 1 et 2, ce qui permettra de la déterminer également dans la partie restante 3 par ses valeurs le long des deux côtés caractéristiques μC, μD).

Mais, dans le cas de figure actuel, la comparaison de l'équation (ε) avec les équations du type elliptique soulève une question qu'il est intéressant d'examiner [1]. S'il s'agissait de ce dernier type, — par exemple, de $\Delta u = 0$, nous savons que nous aurions le droit de nous donner les valeurs de u le long de la ligne S. *A-t-on le droit de choisir arbitrairement, le long de S, les valeurs d'une fonction* $u(x, y)$ si elle doit vérifier (ε)?

Les deux cas considérés à la fin du numéro précédent, et dont l'analogie avec celui que nous étudions en ce moment est évidente, nous portent à présumer que la réponse doit être *négative*. C'est, en effet, ce que nous allons montrer aisément à propos de l'équation (ε) la plus simple, savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{4}$$

Considérons donc une solution quelconque u de cette équation, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$u = F(x) + G(y), \tag{5}$$

(1) Nous avons étudié ce problème dans les *Proceedings of the Benares Mathematical Society*, tome III, 1921, p. 39.

et, en premier lieu, les valeurs d'une telle quantité sur une circonférence. Il est évident immédiatement que ces valeurs ne peuvent pas être choisies arbitrairement : car à tout rectangle inscrit *mnpq* (fig. 41) correspond une égalité de la forme

$$u_m + u_p = u_n + u_q, \tag{6}$$

la somme des valeurs de u en deux sommets opposés devant être égale à la somme des valeurs analogues relatives aux deux autres sommets. Comme on le voit d'après cette remarque, on ne peut disposer des valeurs de u que sur trois des arcs précédemment distingués : les valeurs sur le quatrième arc s'en déduiront. Il est à remarquer que, ceci fait, la fonction u ne sera pas complètement déterminée : nous savons qu'on pourra encore se donner arbitrairement les valeurs d'une dérivée de u sur l'un des quatre arcs [1].

Ce que nous venons de dire n'est d'ailleurs pas particulier au cas où cette courbe est une circonférence, mais vaut pour toute ligne fermée admettant deux axes de symétrie respectivement parallèles aux axes coordonnés : en effet, toute ligne de cette espèce admettra une infinité de rectangles inscrits.

Le cas d'une ellipse quelconque est intéressant. Si les axes de cette ellipse ne sont pas parallèles aux axes coordonnés, on ne pourra plus y inscrire de rectangles analogues à ceux dont nous venons de parler; mais il pourra arriver qu'on puisse y inscrire des lignes polygonales fermées ayant leurs côtés respectivement parallèles à nos axes, telles que *mnpqrs* (fig. 42), et pour une telle ligne, on aura :

$$u_m + u_p + u_r = u_n + u_q + u_s, \tag{6'}$$

---

(1) On obtient d'ailleurs immédiatement une quantité u' de la forme (5) qui s'annule le long de la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ et qui, par conséquent, peut être ajoutée à l'expression de u sans en changer les valeurs sur cette circonférence, en écrivant :

$$u' = \varphi(x^2) - \varphi(a^2 - y^2).$$

Pareille remarque s'applique évidemment à une ellipse ayant des axes parallèles aux axes coordonnées; etc.

la somme des valeurs de u aux sommets de rang pair devant être égale à la somme des valeurs aux sommets de rang impair. Dans le cas d'une ellipse, s'il existe une telle ligne polygonale, il en existe une infinité. Supposant les équations paramétriques de la courbe écrites, comme nous pouvons le faire, sous la forme

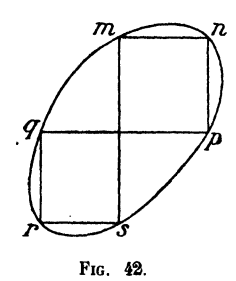


Fig. 42.

$$x = a \cos t, \qquad y = b \cos (t - h),$$

la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de lignes polygonales rectangulaires fermées de l'espèce voulue est que h soit commensurable avec π; et, s'il en est ainsi, nous aurons les conditions nécessaires de possibilité (6').

Sans faire, jusqu'à nouvel ordre, d'hypothèse particulière sur h, supposons les valeurs de u données, le long de l'ellipse S, par leur développement trigonométrique (¹) en fonction de t :

$$(7) \qquad u = \Sigma \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt,$$

et cherchons si une telle expression peut être représentée sous la forme (5). Pour cela, notons que le premier terme $f(x) = f(\cos t)$, étant nécessairement pair en t, aura nécessairement pour développement trigonométrique (¹) une série de cosinus,

$$(8) \qquad F(x) = \lambda_n \cos nt,$$

et que, pareillement, le second terme de (5), étant pair en $(t - h)$, aura un développement de la forme

$$(8') \qquad G(y) = \Sigma \mu_n (\cos nt \cos nh + \sin nt \sin nh).$$

(1) Le raisonnement du texte ne suppose qu'en apparence la possibilité de développer u, F, G en séries de Fourier. Dans le cas contraire, il suffirait de raisonner (avec quelques modifications simples) sur les « constantes de Fourier », lesquelles doivent exister du moment qu'il s'agit de fonctions continues. Elles devraient même tendre vers zéro comme $1/n$, et c'est ce qui peut toujours cesser d'avoir lieu pour G, en raison des petits diviseurs.

Identifiant la somme de ces deux développements avec (7), nous avons pour toute valeur de n, les égalités

$$\alpha_n = \lambda_n + \mu_n \cos nh,$$

et

$$\beta_n = \mu_n \sin nh.$$

Sur cette dernière, on voit bien que, pour $h = \frac{p}{q}\pi$, nous avons ainsi une infinité de conditions de possibilité, la valeur commune des deux membres devant être nulle toutes les fois que n est un multiple de q. C'est, sous une autre forme, le fait constaté il y a un instant.

Mais, dans le cas opposé de h incommensurable avec π, et bien que l'équation précédente fournisse toujours une valeur de μ_n, l'impossibilité apparaît sous une autre forme, à savoir la divergence du développement (8'). Cette divergence s'introduit, comme en Mécanique Céleste, par l'intervention des « petits diviseurs » $\sin nh$, correspondant à tout entier n dénominateur d'une valeur fractionnaire approchée de h/π. Pour certains choix du nombre h — lorsque h/π est, par exemple, un nombre transcendant « de Liouville » —, l'erreur commise en remplaçant h/π par des fractions de dénominateurs n convenables sera d'un ordre de grandeur très rapidement décroissant, aussi rapidement décroissant qu'on le voudra pour des h convenables; et dès lors, à une série (7) même très rapidement convergente correspondra, pour certaines valeurs de h, une série (8') [et même une série (8)] divergentes. Ainsi, on ne peut pas déterminer l'inconnue u d'une équation du type hyperbolique par des conditions de Dirichlet, pas plus qu'on ne pouvait déterminer l'inconnue d'une équation du type elliptique par des conditions de Cauchy.

219. Nous avons raisonné sur le probème mixte analogue au problème de Dirichlet, c'est-à-dire dans lequel ce sont les valeurs de l'inconnue u elles-mêmes qui sont données le long de S''. On peut avoir, bien entendu, à substituer à cette donnée celle, par exemple, de la dérivée transversale. La question peut se varier de plusieurs autres

façons [1], conformément à ce qui est bien connu pour les problèmes elliptiques, étant toujours bien entendu qu'elle doit comporter un nombre unique en chaque point de S″. Toutes ces questions relèveraient de méthodes analogues à celles qui précèdent.

Une série de problèmes plus complexes exigeant soit des combinaisons convenables des modes de calculs ci-dessus indiqués, soit même des méthodes nouvelles, ont été, dans ces dernières années, soulevés par les applications. Plusieurs opérations qui prennent une importance de jour en jour croissante dans la pratique télégraphique et téléphonique, se traduisent, en effet, par des discontinuités introduites dans la valeur de u ou dans celle de ses dérivées, en un plus ou moins grand nombre de points de la ligne.

Théoriquement, toutes ces circonstances sont prévues par la théorie précédente, qu'il suffirait d'appliquer autant de fois qu'il y a de points de discontinuité. Mais dans la pratique actuelle, le nombre de celles-ci est très grand, et des méthodes spéciales, dues surtout, en principe, à Heaviside [2], sont dès lors nécessaires pour faire en sorte que les calculs ne soient pas impraticables. Toutefois, les détails relatifs à cette question nous entraîneraient hors du cadre de la présente étude.

220. L'étude du cas de $m = 2$ nous permettra de comprendre sans difficulté ce qui se passera pour les problèmes à deux ou plusieurs dimensions, c'est-à-dire à $m \geqslant 3$ variables indépendantes. Soit, par exemple, un milieu plan, mais n'occupant qu'une partie S′ du plan, celle-ci étant limitée par une ou plusieurs courbes s. Nous aurons donc à intégrer l'équation aux dérivées partielles correspondante dans une région de l'espace-temps limitée par S′

---

(1) Voir, par exemple, Webster, *Bull. Amer. Math. Soc.*, série 2, t. XVIII, p. 244, 1912; Jonesco, *Comptes Rendus, Ac. Sc.*, t. CLXXXIV (1927), p. 866.

(2) *Electromagnetic Theory*, Londres, 1899; voir aussi les publications de M. Carson, notamment dans la revue américaine *The Bell System* (octobre 1923); les articles de MM. Kann (*Sitzber. der Berl. Math. Gesellsch.*, 26e année); Paul Lévy (*Bull. Sc. Math.*, 1926); Giorgi (*Rendic. Circ. Nat Palermo*, t. XLI, 1928).

d'une part, par des surfaces cylindriques (si les lignes s sont fixes) de l'autre. S′ seule portera les données de Cauchy, lesquelles permettront de déterminer la quantité cherchée u dans une première région $\mathcal{R}_0$ comprise entre S′ et les caractéristiques menées (dans l'espace-temps) par les lignes s : ces dernières serviront donc de démarcation entre $\mathcal{R}_0$ et des régions voisines qui subiront non plus seulement l'influence des ondes directes émanées de S′, mais aussi celle des ondes réfléchies une première fois, c'est-à-dire l'influence indirecte de S′ et celle d'une partie des surfaces cylindriques S″. A leur tour, les ondes de démarcation se réfléchiront sur S″ et, au delà de ces nouvelles ondes réfléchies, commenceront des régions susceptibles d'être influencées non seulement par une, mais par deux réflexions, etc.

Le problème mixte qui se pose dans ces conditions : — détermination d'une solution u de l'équation par ses valeurs sur S″ jointes à des données de Cauchy sur S′ — a fait l'objet de nombreux et importants travaux. On peut l'aborder, comme beaucoup de problèmes mathématiques, par deux catégories de méthodes différentes. Les unes, dérivées des principes exposés dans ce qui précède, expriment la solution par des intégrales définies portant directement sur les données. Les autres, inspirées des résultats acquis pour le cas elliptique, procèdent par développements en séries et reposent sur l'emploi des *fonctions fondamentales*, auxquelles elles ont d'ailleurs donné naissance, car la notion de « fonction fondamentale » est née des travaux de Schwarz, Picard et Poincaré sur les vibrations d'une membrane (1).

Ces deux sortes de méthodes (2) répondent, au fond, à des objets différents et chacune d'elles doit être ou non

(1) Schwarz, *Acta Soc. Fennicae*, 1885; Picard, *C. R. Ac. Sc.*, 16 octobre 1893; Poincaré, *American Journal*, t. XII, 1890; *C. R. Ac. Sc.*, t. CXVIII, 1894, p. 447; *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, t. VIII, 1894.

(2) Pour la comparaison entre elles, voir la Conférence de M. Volterra au Congrès International des Mathématiciens, à Strasbourg, sept. 1920. L'évolution récente de la Physique (*Mécanique ondulatoire*) montre cette dualité de méthodes comme beaucoup plus profondément liée à la nature des choses qu'on ne pouvait le supposer : elle correspond au double aspect corpusculaire et ondulatoire des radiations.

préférée suivant le but que l'on a en vue. Les méthodes qui introduisent les fonctions fondamentales ou « harmoniques » successifs sont aptes à représenter le régime permanent qui s'établit lorsque l'influence de l'état initial est suffisamment lointaine, en le décomposant en oscillations caractéristiques de la forme du milieu. Au contraire, ces méthodes qui, du double caractère du problème mixte, ne retiennent, en quelque sorte, que l'aspect elliptique, cessent de convenir lorsqu'il y a lieu de distinguer l'influence respective de l'état initial et des conditions aux frontières : les réflexions successives et la décomposition correspondante de l'espace-temps en régions de caractère différent y sont nécessairement masquées.

Nous nous attacherons exclusivement ici aux méthodes de la première forme, faisant intervenir séparément et d'une manière distincte les différentes données.

221. Comme la solution du problème de Dirichlet, celle de notre problème mixte n'admet d'expression simple et élémentaire que dans des catégories relativement peu nombreuses de cas, bien que, ainsi que nous le verrons en terminant (n° **229**), ces catégories soient notablement plus étendues pour le nouveau problème que pour le premier. Nous avons déjà noté, au Livre IV, le cas du plan. M. Volterra (1) est également parvenu à transporter à la théorie actuelle le résultat bien connu qui, dans la théorie du problème de Dirichlet, concerne la sphère. Le résultat correspondant pour le problème mixte relatif à l'équation (e_2), se rapportera au cas où la frontière S″ sera un hyperboloïde à une nappe H ayant pour cône asymptote un cône caractéristique. Le succès de cette extension tient évidemment à ce que l'équation (e_2) se déduit de l'équation des potentiels à trois dimensions par le changement de la variable indépendante z en iz, les sphères devenant, dans cette transformation, des hyperboloïdes tels que H. Il suffit, dès lors, de transformer de même l'inversion qui, comme il est bien connu, permet de résoudre le problème dans le cas

(1) *Congrès intern. des Mathématiciens*, Rome, 1909, t. II, p. 93.

classique; et cette transformation donne un résultat réel, qu'on peut appeler, avec M. Volterra, la *co-image* d'un point quelconque par rapport à un hyperboloïde H. On doit toutefois s'assurer (ce qui n'intervenait pas pour le problème de Dirichlet) que les cônes caractéristiques issus de deux points co-images l'un de l'autre se coupent sur la surface H elle-même [1].

Sa méthode s'étend manifestement à l'équation (e_3).

222. Revenons maintenant au cas général.

Si l'on veut s'inspirer de la marche suivie dans la théorie classique des fonctions harmoniques, il est naturel de se demander d'abord si le problème qui nous est posé peut avoir plus d'une solution. C'est, on le sait, la question à laquelle il est aisé de répondre lorsqu'il s'agit du problème de Dirichlet classique; et il est intéressant de comparer la méthode suivie à ce propos avec celle que nous allons employer.

Lorsque l'équation à intégrer est $\Delta u = 0$ et qu'on veut démontrer l'impossibilité d'une solution régulière nulle à la frontière d'un domaine D sans être identiquement nulle dans D, il suffit de multiplier le premier membre (nul, par hypothèse) de l'équation par u et d'intégrer dans D, intégrale qui se transforme, moyennant l'introduction de termes de frontière, en l'intégrale de Dirichlet, soit (dans le cas de deux variables, par exemple) :

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy. \tag{9}$$

La quantité sous le signe $\iint$ n'est autre que la forme caractéristique correspondant à l'équation donnée : en l'espèce, cette forme est définie, et c'est de là que provient le succès du raisonnement.

---

(1) La transformation considérée dans ce texte conserve l'équation aux dérivées partielles : elle en change donc les bicaractéristiques en bicaractéristiques (de même que l'inversion ordinaire change les droits isotropes en droites isotropes) : ce qui donne immédiatement la propriété énoncée des cônes caractéristiques.

On voit que pareille méthode ne pourrait réussir pour une équation hyperpolique, par exemple, pour l'équation (e_3) ou de même (e_2).

La signification concrète des problèmes traités suggère le moyen propre à tourner cette difficulté : il suffit d'employer le théorème des forces vives. Adressons-nous, par exemple, toujours pour la commodité de la figuration, à l'équation des ondes cylindriques

$$(9\ bis) \qquad \mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On peut la considérer comme régissant les vibrations transversales d'une membrane élastique homogène tendue sur une certaine aire S′ du plan xy. Si, le long de son contour s, cette membrane est maintenue fixe, u devra être nul à tout instant sur ce contour. Dans notre système habituel de diagrammes, où t est pris comme troisième coordonnée, s donnera un cylindre droit S″, ayant cette ligne pour section droite et sur toute la surface duquel u devra s'annuler. Si maintenant on donne, à l'instant initial $t = 0$, les dénivellations et les vitesses transversales de la membrane, c'est-à-dire les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$, donc les données de Cauchy, on aura, pour déterminer u aux instants ultérieurs, un problème mixte. Nous avons à démontrer que, lorsque les données de Cauchy en question sont nulles comme le sont d'autre part celles qui sont relatives à la surface cylindrique, ce problème mixte n'admet pas d'autre solution que u identiquement nul. Or, l'énergie mécanique (tant cinétique que potentielle) de la membrane est

$$(10) \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2}\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dy$$

et les principes de la Mécanique nous font prévoir que cette quantité doit demeurer constante quel que soit t. Pour vérifier analytiquement qu'il en est ainsi, nous serons conduits à multiplier le premier membre $\mathcal{F}(u)$ de l'équa-

tion aux dérivées partielles par $\frac{\partial u}{\partial t}$. Le produit ainsi obtenu donne lieu à l'identité

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

et, par conséquent, en intégrant par rapport à x et à y, à :

$$(11') \quad \iint \mathfrak{F}(u)\frac{\partial u}{\partial t}.dxdy = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} + \int_s \frac{\partial u}{\partial t}\frac{du}{dn}\,ds.$$

La donnée $u = 0$ au contour, jointe à l'équation aux dérivées partielles, entraîne donc $\mathfrak{J} = \text{const.}$ et, si les données de Cauchy initiales sont nulles, $\mathfrak{J} = 0$, ce qui équivaut à la proposition à démontrer.

Il reviendrait d'ailleurs au même d'intégrer la relation (11') par rapport à t, ce qui introduit comme on le voit, l'intégrale triple

$$\iiint \mathfrak{F}(u)\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdydt$$

prise dans le cylindre de base S' et de hauteur quelconque t_1, et exprime par elle la valeur de $\mathfrak{J}$.

Il est intéressant d'observer, avec M. Zaremba (1), qu'on peut employer au même but l'identité (11) d'une manière notablement différente, en limitant le domaine d'intégra-

(1) Zaremba, *Rendic. Acc. Lincei*, série 5, t. XXIV, p. 904; 1915. Le même fait a été retrouvé peu après par M. Rubinovicz (*Monatsh. für Math. und Phys.*, t. XXX, p. 65, 1920). La première forme donnée à la démonstration dans le texte a été indiquée dans notre travail *Sur l'intégrale résiduelle* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. XXVIII, 1900; n° 8).

Quant à l'intégrale analogue à (9), qu'on déduirait du produit $u\mathfrak{F}(u)$ et non plus de $\frac{\partial u}{\partial t}\mathfrak{F}(u)$, elle ne serait, comme l'a remarqué M. Moisil, autre chose que l'action hamiltonienne correspondant au problème de Mécanique envisagé.

tion triple, non plus par un plan $t = t_1$, mais par une caractéristique, par exemple, par le cône caractéristique de sommet arbitraire (x_0, y_0, t_0). On constate aisément que la quantité à intégrer le long de cette dernière surface se ramène, elle aussi à une somme de carrés, ce qui entraîne la constance de u le long de toute bicaractéristique, d'où encore $u = 0$ au sommet du cône.

Il y a lieu, en tout cas, de signaler à l'attention la variante ainsi apportée aux procédés classiques de la théorie du potentiel, le premier membre de l'équation étant multiplié non plus par l'inconnue u, mais par une combinaison linéaire de u et de ses dérivées : la portée de cette méthode ne semble pas épuisée par ce qui précède.

223. Le fait que la solution est unique apparaîtra également par l'application des méthodes développées dans le corps de l'ouvrage. Si le point a de l'espace-temps pour lequel on se propose de calculer la valeur de u est pris dans la région initiale $\mathcal{R}_0$, on n'a, en réalité, affaire qu'au problème de Cauchy et, par conséquent, aux méthodes posées dans les Livres III et IV. Plaçons-nous maintenant dans une région immédiatement mitoyenne à celle-là, en franchissant l'onde directe de démarcation $\mathcal{C}$, mais non les ondes réfléchies qu'elle engendre. Nous construirons, comme précédemment, la nappe rétrograde du conoïde caractéristique de sommet a, laquelle, par hypothèse, rencontrera S″. Par la ligne (ou l'arête) σ d'intersection, nous tracerons la seconde caractéristique G, qui est l'onde rétrograde engendrée par réflexion de Γ sur S″. Entre Γ et G, nous n'aurons à faire intervenir que les quantités précédemment formées, savoir v pour m impair; V et $\mathcal{V}$ pour m pair.

Entre G et S″, nous aurons à introduire des fonctions auxiliaires nouvelles. Mais on va voir que les méthodes qui doivent présider à leur formation et à leur emploi sont au fond calquées sur celles que nous avons appliquées au problème de Cauchy. Soit, d'abord, m impair. Nous définirons une solution $\mathbf{v}$ de $(\mathcal{E})$ par la double condition :

d'être infinie d'ordre $\frac{m-2}{2}$ suivant G et, d'une manière plus précise, égale à $\frac{(V)}{G^{\frac{m-2}{2}}}$, (V) étant régulier; de prendre, suivant S″ (ou plutôt, suivant la portion utile de S″), les mêmes valeurs que v.

Ces deux conditions concordent au voisinage de σ : car il est clair que G, premier membre de l'équation de l'onde réfléchie, est, à ce niveau (sur S″), égal au produit de Γ par une fonction holomorphe et différente de zéro, et peut même être pris égal à Γ sur S″.

La différence $(v) = v - \mathrm{v}$ s'annulant sur S″, l'application de la formule fondamentale à cette différence et à u n'y introduira plus $\frac{du}{dv}$. En combinant avec l'application de cette même formule à u et à (v), dans le volume τ compris entre S′, S″ et $\mathcal{C}$, on arrivera à la formule cherchée, exprimant u_a en fonction des seules données de la question.

Pour le cas de m pair, on peut employer la méthode de descente, laquelle va s'appliquer sans modification au problème mixte, la seule question étant de déduire de la caractéristique Γ de l'équation (Σ) l'onde réfléchie correspondante dans l'espace à $m + 1$ dimensions. Il suffira, pour cela, d'avoir défini le premier membre G de l'équation de cette caractéristique comme étant, pour l'équation (32) du n° 58

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = 4G,$$

la solution, distincte de Γ, qui prend des valeurs égales à celles de Γ en tous les points de la multiplicité S″; moyennant quoi, la fonction

$$G' = G - (z - c)^2$$

satisfera, comme Γ′, à l'équation

$$A'\left(\frac{\partial G'}{\partial x}, \frac{\partial G'}{\partial z}\right) = 4G'$$

(où $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathrm{R}^2$ est formé comme il a été dit aux nos **70**, **134**) et prendra la même valeur que Γ' en chaque point du cylindre construit dans l'espace à $m + 1$ dimensions avec S″ comme base. Soit ensuite $\mathbf{v}'$ la solution de ($\mathcal{E}'$) qui prend, sur ce cylindre, les mêmes valeurs que la solution élémentaire v' et qui est infinie suivant G′ : l'expression $\mathbf{v}$ déduite de $\mathbf{v}'$ par l'opération (4) du n° **134** pourra être considérée comme définie (à une quantité régulière près) par les conditions :

a) D'être solution de l'équation adjointe ($\mathcal{E}$) à m variables;

b) D'être une somme de deux termes, l'un en $\dfrac{1}{G^{\frac{m-2}{2}}}$, l'autre en log G, les coefficients étant des fonctions régulières;

c) De prendre, sur S″, les mêmes valeurs que v, ce qui implique des conditions correspondantes pour chacun des deux coefficients dont il vient d'être question [1].

En désignant encore par (v) la différence $v - \mathbf{v}$, cette quantité (v), également solution de l'équation ($\mathcal{E}$), sera encore de la même forme que v (au remplacement près de Γ par G) le long de G.

Elle sera régulière dans τ, sauf sur la surface de discontinuité G. Les deux coefficients (V) et ($\mathcal{V}$), fonctions régulières, s'annuleront le long de S″ : le second d'entre eux sera d'ailleurs, pour son compte, une solution de l'équation ($\mathcal{E}$).

Ces principes une fois posés, il est clair que la « descente » de $(v') = v' - \mathbf{v}'$ à (v) donnera lieu exactement aux mêmes calculs que celle de v' à v. La solution du problème mixte sera donc donnée par une formule identique à (14), à ceci près que $\mathcal{V}$ devra être remplacé par ($\mathcal{V}$) dans toute la région correspondante de S′, pendant que, d'autre part,

(1) Le premier **V** de ces deux coefficients n'est défini qu'à des termes de l'ordre de $G^{\frac{m-2}{2}} = G^{m_1-1}$ près, ses valeurs et celles de ses $m_1 - 2$ premières dérivées aux divers points de G ayant seules à intervenir. Les conditions que cette quantité doit remplir le long de G doivent donc s'entendre seulement à l'ordre $m_1 - 1$ près.

on devra rajouter des termes en (V) analogues aux termes déjà calculés en V (intégrales **SS** le long de G, intégrales **S** le long de σ et de l'intersection de G avec S').

La méthode de descente nous permet donc de résoudre le problème mixte à $2m_1$ variables, tout comme elle avait fourni précédemment la solution du problème de Cauchy.

224. Mais rien n'empêche d'appliquer également au problème mixte, pour m pair, la méthode des nos **147**, **147 *bis***, c'est-à-dire d'introduire successivement dans la formule fondamentale la quantité (v) et le coefficient $(\mathcal{V})$ de son terme logarithmique.

On voit combien le parallélisme est étroit, en réalité, entre les théories des deux problèmes, sans toutefois qu'ils doivent nous faire oublier l'élément nouveau qui s'introduit dans le problème mixte, à savoir l'influence de la forme de l'hypersurface S''.

Cette influence se manifeste, nous l'avons vu, dans la formation de la nouvelle fonction auxiliaire (v), laquelle reste la difficulté à surmonter. Cette question est résolue dans l'hypothèse des données analytiques, par les calculs du Livre II, les différents éléments de (v) étant développés suivant les puissances de G; et ceci constitue une différence importante entre la théorie actuelle et la théorie correspondante du problème de Dirichlet, à laquelle les méthodes par développements de Maclaurin ne sauraient convenir, la forme *globale* de la frontière intervenant d'une manière essentielle.

225. L'extension des résultats au cas non analytique a pu être entièrement ramenée aux équations intégrales pour $m = 2$. On peut [1], pour m impair, songer à représenter la quantité (v) par un potentiel (cf. **128**) analogue au potentiel de double couche ordinaire, et on est encore conduit à une équation intégrale plus ou moins analogue

---

(1) Voir notre article des *Proceedings of the Benares Mathematical Society*, t. III et notre communication sur le même sujet au Congrès International de Strasbourg (1920), p. 499 des Comptes Rendus du Congrès.

à celle qui se présente dans la méthode de Fredholm, mais qui est compliquée par la présence de notre symbole $\lceil$. En raison de cette circonstance, l'équation intégrale dont il s'agit cesse de se prêter, au moins immédiatement, aux méthodes classiques, et son traitement appellerait de nouvelles recherches.

Mais nous arriverons à ramener le problème à une équation intégrale régulière en nous inspirant de la méthode suivie aux nos **193-194**, dont le principe peut être aussi bien appliqué au calcul du n° **51** qu'à celui des nos **62 *bis*** et suivants. Dans un cas comme dans l'autre, on peut, en supposant seulement les données régulières et sans avoir besoin de les supposer analytiques, déterminer les premiers termes du ou des développements qui caractérisent la fonction cherchée, — soit qu'il s'agisse de v, soit qu'il s'agisse de (v) — suivant les puissances de Γ ou de G et obtenir, par conséquent, une expression dont le résultat de substitution dans l'équation aux dérivées partielles contienne en facteur une puissance plus ou moins élevée de Γ ou de G. En particulier, si l'ordre auquel les données sont régulièrement dérivables est suffisamment élevé, on obtiendra ainsi, dans notre problème actuel, une quantité (v_0) satisfaisant aux conditions aux limites tant sur S″ que sur G et capable, d'autre part, de jouer le rôle de « parametrix », c'est-à-dire telle que le résultat de substitution

$$\mathcal{F}[(v_0)] = \Phi$$

soit fini même dans le voisinage de la caractéristique G. Ce sera cette quantité (v_0) que l'on utilisera, à défaut de (v), dans le calcul du n° **223** ou **224**, et on aura ainsi, non plus l'expression directe de l'inconnue, mais une équation intégrale analogue à l'équation (117) du n° **193**, qui définira cette inconnue et se comportera également comme une équation de Volterra au point de vue de sa résolution par approximations successives.

Cette solution, qui permet de se passer du calcul de (v), peut également, comme aux nos **195-196**, se transformer de manière à conduire à la formation de (v).

Mais, d'ailleurs, cette dernière formation est elle-même un cas particulier du problème que nous venons de traiter et, par conséquent, se ramènera elle aussi (cf. n° **215**) à la résolution d'une équation intégrale du type qui vient d'être considéré.

226. Sans entrer plus avant dans le détail des opérations dont nous venons d'indiquer le principe, nous voyons qu'elles résolvent le problème toutes les fois que la caractéristique G, représentant l'onde rétrograde réfléchie, est dépourvue de singularités. Mais on est obligé ici d'envisager l'hypothèse contraire, où l'onde en question (de même que l'onde de démarcation $\mathcal{C}$) présenterait des lignes doubles et des arêtes de rebroussement ou « caustiques ». Cette considération s'impose même beaucoup plus impérieusement qu'au n° **190** : car si en fait et dans les conditions de l'expérience usuelle, les ondes directes ne présentent pas les singularités en question, il en est tout autrement des ondes réfléchies.

Cette difficulté se résoudra par les mêmes principes qu'au n° **190**, c'est-à-dire par application ou applications successives de la majeure de Huygens. Il conviendrait, ici encore, d'étudier de plus près le calcul total auquel on est ainsi conduit, en complétant à cet égard les résultats obtenus dans nos Mémoires cités (voir note du n° **191**).

227. Il restera enfin à tenir compte des ondes résultant de plusieurs réflexions. Il est clair que c'est ce qui se fera par une application répétée des mêmes principes, ainsi que le problème posé au n° **217** ***bis*** et traité dans notre travail du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome XXXII, en offre un premier exemple (1). Ici encore, il faudra évidemment compter avec les caustiques des ondes réfléchies successives.

---

(1) Le problème considéré au n° **218** a pour analogue celui dans lequel on se donnerait les valeurs de u le long d'une surface à point conique intérieure au conoïde qui a ce point pour sommet.

228. Signalons, en terminant, l'intérêt qu'il pourrait y avoir à serrer de plus près la comparaison entre les problèmes mixtes tels que nous venons de les étudier et les problèmes aux limites — par exemple le problème de Dirichlet — qui se rapportent au cas elliptique. Nous avons, chemin faisant, reconnu les analogies qui existent entre ces deux questions : connaissance d'une seule donnée sur une partie de la frontière (celle qui est orientée dans le temps) et, par voie de conséquence, nécessité d'introduire (en dehors de la solution élémentaire) une fonction dépendant essentiellement de la forme de cette frontière. Mais, en même temps, nous avons dû noter (**224**) une différence : la fonction ainsi introduite peut, pour notre problème mixte, être calculée (dans le cas analytique) par développement en série entière, ce développement pouvant, au voisinage de chaque point de l'arête appelée plus haut σ, être formé localement, c'est-à-dire déduit de ceux qui définissent les coefficients de l'équation et les formes géométriques des frontières et des ondes autour du même point. Il ne saurait être question, nous l'avons dit, d'opérer de même dans le cas elliptique : la solution du problème de Dirichlet, par exemple, considérée au voisinage si proche qu'il soit d'un point déterminé quelconque de la frontière, dépend de toute la forme de celle-ci et de toutes les données qu'elle porte.

Or on peut, cependant, imaginer aisément une transition entre ces deux sortes de problèmes : il est clair, par exemple, que l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

peut être considérée comme un cas limite de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{12'}$$

celui qu'on obtient en faisant $\omega = \infty$, et que d'une manière générale, toute équation du type elliptique

$$\mathcal{F}(u) = 0,$$

se déduira de même, pour $\omega = \infty$, de l'équation hyperbolique (normale)

$$\mathcal{F}'(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

Soit alors considérée une aire plane S′ limitée par un contour s que nous prendrons encore comme base d'un cylindre droit S″ dans l'espace xyt. Soit posé, dans l'aire S′, un problème de Dirichlet pour l'équation (12), la valeur de l'inconnue u étant donnée en chaque point de s. Rien ne nous empêchera de considérer ce système de données comme appartenant à un problème mixte relatif à l'équation (12′) : par exemple, nous pourrons assigner à u, sur S″, des valeurs indépendantes de t et égales, quelle que soit cette variable, aux valeurs données sur s; à u et à $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$, dans S′, des valeurs quelconques dont les premières concordent avec les données sur s et dont les secondes s'annulent sur ce contour. Comment se comportera le problème mixte ainsi posé lorsque ω sera très grand?

Conformément au principe posé dans ce qui précède, nous aurons à tracer, dans l'espace-temps E′, des caractéristiques figurant la propagation d'ondes; mais ces ondes seront ici de vitesse très grande, ce qui correspondra au fait que les nappes caractéristiques correspondantes feront des angles très petits avec les plans $t =$ const. Dès lors, pour atteindre par notre méthode un point déterminé a' de l'espace E′ projeté à l'intérieur de S′, il faudra introduire un nombre très grand de réflexions successives, si petite que soit la troisième coordonnée du point a' pourvu qu'elle ne soit pas nulle; ou, inversement, l'onde rétrograde issue de a' n'atteindra le plan $t = 0$ qu'après un très grand nombre de réflexions.

Il est à présumer que, pour $\omega = \infty$, la solution du problème mixte donnera, à la limite, la solution du problème de Dirichlet; et on conçoit comment pourront y intervenir, grâce au jeu des ondes successivement renvoyées par la paroi S″, toutes les parties du contour s et les données correspondantes.

Il est impossible de ne pas songer à rapprocher les

calculs auxquels on serait ainsi conduit des méthodes alternées d'ores et déjà classiques dans la théorie du problème de Dirichlet.

229. Soit, par exemple, une frontière S'' formée de deux parties S''_1, S''_2. S'il s'agit du problème de Dirichlet, on sait, depuis Schwarz, qu'on peut commencer par résoudre un problème de Dirichlet relatif à la seule partie S''_1 (ou à une variété fermée dont S''_1 fait partie); puis, en un second temps, opérer de même sur S''_2 seule; puis revenir à S''_1; et ainsi de suite. Dans des cas très généraux, cette série d'opérations convergera, et cela vers la solution cherchée (1).

On voit que, dans le problème mixte, les choses se passeront exactement de même, à ceci près que les opérations seront en nombre fini pour chaque position du point a (quoique non borné si a s'éloigne indéfiniment de S'), correspondant à un nombre égal d'ondes réfléchies successives et que, par conséquent, la question de convergence ne se posera plus. Le problème mixte relatif à la frontière $S''_1 + S''_2$ est ainsi ramené (2) aux problèmes analogues relatifs respectivement à S''_1 et à S''_2.

En particulier, nous avons appris, au Livre IV, à résoudre le problème, pour (e_2) ou pour (e_3), par la méthode des images, lorsque S'' est un plan : on voit donc, avec M. Volterra (3), que l'on pourra également le résoudre, à l'aide d'un nombre *fini* d'images, lorsque S'' est constitué par un nombre fini quelconque de faces planes.

De même, le cas de résolubilité obtenu par M. Volterra (voir ci-dessus, n° **221**) entraîne la résolution du problème toutes les fois que S'' est formé d'un nombre fini quelconque de portions de plans ou d'hyperboloïdes H ayant pour cônes asymptotes des cônes caractéristiques.

---

(1) La méthode de Neumann n'est, en somme, qu'un cas limite d'un pareil procédé alterné, la frontière étant considérée comme constituée par un nombre infini de segments de droites ou de facettes planes.

(2) Rubinovicz, *loc. cit.*, voir p. 477, note.

(3) *Proceedings London Math. Soc.*, série 2, t. II, 1904; *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, professées à Stockholm (Upsal, 1906), réimprimées à Paris, Hermann, 1912, et *loc. cit.* (note de la p. 474).

APPENDICE III

DÉTERMINATION DU PROBLÈME DANS LE CAS NON LINÉAIRE

Le fait que le problème de Cauchy, supposé possible, ne peut avoir plus d'une solution si la multiplicité qui porte les données n'est pas caractéristique, est acquis depuis le travail de M. Holmgren (voir Livre I) pour le cas des équations *linéaires* à coefficients *analytiques*. Un nouveau progrès essentiel dans ce sens est marqué par les récentes recherches de M. Hans Lewy (1), lesquelles étendent la conclusion aux équations non linéaires. Par contre, on est, cette fois, obligé d'étudier séparément le type hyperbolique et le type elliptique (2). On démontrera le théorème successivement :

1° Pour une équation quelconque du type hyperbolique;

2° Pour une équation *analytique* du type elliptique.

En même temps, pour ces dernières, le raisonnement fournira une démonstration très élégante du fait énoncé par M. Hilbert que la solution est nécessairement analytique dans tout l'intérieur de son domaine d'existence, théorème démontré jusqu'ici (3) par des voies toutes différentes et relativement pénibles.

---

(1) H. Lewy, *Gött. Nachr.*, 1927, p. 178; *Math. Ann.* Tome XCVII, 1927, p. 179; Tome CI, 1929, p. 609; Tome CIV, 1931, p. 325; K. Friedrichs et H. Lewy, *Math. Ann.* Tome XCIX, p. 200.

(2) Le cas parabolique serait également à traiter et pourrait même, comme nous l'a fait remarquer un de nos auditeurs du Collège de France, jouer un rôle particulièrement important dans les recherches actuelles en relation avec la Mécanique ondulatoire.

(3) Voir les travaux de MM. Serge Bernstein, Müntz, Rado.

I

230. M. H. Lewy commence par une recherche préliminaire des plus intéressante en elle-même par la souplesse et la portée nouvelles qu'elle confère à la méthode des approximations successives. On considère un système de p équations linéaires du premier ordre à p inconnues, lesquelles — et c'est là le caractère remarquable de cette première étude — se distribuent, *d'une manière quelconque*, en deux groupes, les k premières ne renfermant que des dérivées par rapport à la première variable indépendante x et les $p - k$ autres, que des dérivées par rapport à la deuxième variable indépendante y, soit, par exemple ($p = 3$, $k = 2$),

$$(1') \quad \begin{cases} L_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + M_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} + N_1 \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ L_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + M_2 \dfrac{\partial v}{\partial x} + N_2 \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$(1'') \quad L_3 \frac{\partial u}{\partial y} + M_3 \frac{\partial v}{\partial y} + N_3 \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

On va se proposer de définir une solution de ce système par la connaissance des valeurs des inconnues en chaque point d'une ligne S de même espèce que celles que nous avons introduites (Liv. II) pour l'application de la méthode de Riemann, c'est-à-dire le long de laquelle x et y seront partout monotones, la tangente n'étant jamais parallèle à l'un des axes. Toutefois, comme au Liv. II, la ligne S pourra se composer de deux demi-droites parallèles aux axes et issues d'un même point (de telles droites pouvant encore être appelées *caractéristiques* du système).

Les coefficients et les données initiales pourront d'ailleurs être réels ou complexes (les variables indépendantes ne devant, au contraire, recevoir que des valeurs réelles);

mais le déterminant des coefficients est supposé toujours différent de zéro. Plus précisément, on peut supposer :

soit que les coefficients L_i, M_i, N_i du système (1'), (1') sont des fonctions données des variables x et y;

soit que ces coefficients dépendent des fonctions inconnues [1].

Dans le premier cas, le déterminant :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ L_3 & M_3 & N_3 \end{vmatrix}$$

sera supposé différent de zéro dans toute une région R comprenant à son intérieur la ligne initiale S. Dans le second, les valeurs de u, v, w associées à chaque point de S étant considérées comme les coordonnées d'un point dans l'espace à trois dimensions, ce point décrira en général une ligne Σ et le déterminant (2) sera différent de zéro dans le voisinage de cette ligne.

230 *bis*. Tout d'abord, il est aisé de voir que, moyennant l'hypothèse faite sur le déterminant (2), les données de la question permettent de calculer les valeurs des dérivées premières des inconnues (et, s'il y a lieu, des dérivées suivantes) en chaque point de S. Si en effet, cette ligne admet une tangente continue dont la direction n'est jamais parallèle à l'un des axes, de sorte que les deux quantités inverses l'une de l'autre

$$(3) \qquad y' = \frac{dy}{dx} \quad , \quad x' = \frac{dx}{dy} \quad ,$$

dont la première est le coefficient angulaire de cette tangente, sont toujours finies et différentes de zéro, les relations

$$(3\ bis) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{du}{dy}\, dy \quad ,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, du + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy \quad , \quad dw = \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy$$

---

(1) Le cas où ces coefficients contiendraient à la fois u, v, w et x, y se traiterait sans plus de difficulté.

permettront d'exprimer $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$, en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$, et, par conséquent, de mettre l'équation $(4^{\backprime})$ sous la forme

$$\mathrm{L}_3 \left(\frac{du}{dy} - x' \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mathrm{M}_3 \left(\frac{dv}{dy} - x' \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ + \mathrm{N}_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - x' \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

laquelle, avec (1′), donne en $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$, un système du premier degré à déterminant non nul (puisque $x' \neq 0$).

Lorsqu'on prend pour S l'angle droit des directions positives des axes, on n'a directement que les dérivées par rapport à x le long de l'axe [1] des x, les dérivées par rapport à y le long de l'axe des y, donc les unes et les autres à l'origine; les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$, sur l'axe des x se déterminent ensuite par l'intégration d'un système différentiel linéaire ordinaire [2]; et de même les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$, sur l'axe des y.

231. Premier cas. — Supposons d'abord les coefficients fonctions données de x et de y. En vertu de l'hypothèse

---

(1) Les équations (1′) ne donnent alors rien de nouveau et doivent être vérifiées pour que le problème soit possible. De même, l'équation $(1^{\backprime})$ sur l'axe des y.

(2) On a d'abord, entre $\frac{\partial u}{\partial y} = u^{\backprime}, \frac{\partial v}{\partial y} = v^{\backprime}, \frac{\partial w}{\partial y} = w^{\backprime}$, l'équation en termes finis $(1^{\backprime})$. Puis la différentiation de chacune des équations (1′) par rapport à y donne, pour $y = 0$,

$$\mathrm{L}_i \frac{\partial u^{\backprime}}{\partial x} + \mathrm{M}_i \frac{\partial v^{\backprime}}{\partial x} + \mathrm{N}_i \frac{\partial w^{\backprime}}{\partial x} + \\ + \left(\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{M}_i}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}_i}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}\right) u^{\backprime} + \dots = 0. \qquad (i \equiv 1,2)$$

équations qui déterminent $u^{\backprime}, v^{\backprime}, w^{\backprime}$, en fonctions de x, puisque, d'autre part, ces quantités sont connues pour $x = 0$.

faite sur le déterminant (2), nous pourrons évidemment introduire, à la place de u, v, w, les nouvelles inconnues

$$L_i u + M_i v + N_i w; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le système transformé étant de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1 w,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2 w,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lambda_3 u + \mu_3 v + \nu_3 w$$

avec des coefficients λ_i, μ_i, ν_i qui contiendront les dérivées premières des L, M, N. L'ensemble de ces équations différentielles et des données initiales peut se remplacer par les trois équations intégrales

$$(4) \qquad \begin{aligned} u &= u_\alpha + \int_\alpha^a (\lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1 w)\, dx, \\ v &= v_\alpha + \int_\alpha^a (\lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2 w)\, dx, \\ w &= w_\beta + \int_\beta^a (\lambda_3 u + \mu_3 v + \nu_3 w)\, dy \end{aligned}$$

dans lesquelles, comme au Livre II, a est le point de coordonnées x, y; α, β, les points de rencontre de la ligne S avec les deux caractéristiques (c'est-à-dire avec les deux parallèles aux axes), menées par a.

Les dérivées premières des L, M, N et, par conséquent, les nouveaux coefficients λ, μ, ν étant supposés bornés, le système (4) admet sans aucune difficulté l'application de la méthode des approximations successives [chaque approximation obtenue étant substituée dans les seconds membres des équations (4), dont les premiers membres fournissent alors l'approximation suivante] telle qu'elle est employée par M. Picard [1] à la démonstration du

(1) M. H. Lewy, dans le Mémoire cité des *Math. Ann.* tome XCVIII indique seulement la possibilité d'opérer ainsi et emploie une méthode de différences inspirée de celle de Cauchy-Lipschitz.

théorème fondamental des équations différentielles; et cela, dans les conditions particulièrement simples où cette méthode se présente pour les équations différentielles linéaires. Le problème a donc une solution et une seule.

La marche des calculs précédents resterait évidemment la même si les équations données renfermaient des termes (linéaires en u, v, w) non différentiés, ou encore, en outre, des termes tout connus de la forme $f(x, y)$. Le problème serait encore possible et déterminé. En particulier, si le système était homogène, c'est-à-dire dépourvu de termes de la dernière forme, et si les données initiales étaient nulles, les inconnues seraient elles-mêmes identiquement nulles.

232. Deuxième cas. — Supposons maintenant les coefficients fonctions de u, v, w. Nous ferons encore, sur ces dernières quantités, une substitution linéaire, mais dont les coefficients seront cette fois des constantes, à savoir les valeurs des L_i, M_i, N_i en un point déterminé ω (u_0, v_0, w_0) de la ligne Σ, correspondant à un point déterminé O de S. Cela revient à supposer d'emblée (1) les éléments de la diagonale principale du déterminant (2) égaux à 1 et les autres éléments à o en ω. Le problème revient alors à résoudre les équations intégrales

$$(5)\quad \begin{aligned} u_a &= u_\alpha + \int_\alpha^a \left(l_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v}{\partial x} + n_1 \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \\ v_a &= v_\alpha + \int_\alpha^a \left(l_2 \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \\ w_a &= w_\beta + \int_\beta^a \left(l_3 \frac{\partial u}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy \end{aligned}$$

les l_i, m_i, n_i, fonctions de u, v, w, étant (2) nuls en ω et, par conséquent, inférieurs en valeur absolue à un nombre ε

(1) Lorsque la ligne S est constituée par l'angle des axes coordonnés, le point O sera l'origine, au voisinage de laquelle nous pourrons nous borner dans l'application qui nous intéressera.

(2) On pourrait aussi prendre pour coefficients de la substitution linéaire des fonctions de x, y, coïncidant avec les L, M, N le long de S, de sorte

que l'on peut prendre aussi petit que l'on veut si u, v, w sont supposés suffisamment voisins de u_0, v_0, w_0.

Conformément à la marche classique de la méthode des approximations successives, nous commencerons par choisir arbitrairement un système $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$ de fonctions satisfaisant aux conditions initiales, et nous en déduirons l'approximation suivante $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ par les relations

$$
(\mathrm{A})\quad \begin{cases}
u_a^{(1)} = u_a^{(0)} + \displaystyle\int_a^a \left(l_1 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_1 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} \right) dx, \\
v_a^{(1)} = v_a^{(0)} + \displaystyle\int_a^a \left(l_2 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} \right) dx, \\
w_a^{(1)} = w_\beta^{(0)} + \displaystyle\int_\beta^a \left(l_3 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} \right) dy;
\end{cases}
$$

puis de même pour $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$; et ainsi de suite.

Seulement, cette fois, il faudra écrire aussi des relations analogues donnant les dérivées partielles des inconnues. Pour les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, il suffira d'écrire

$$
(\mathrm{A}_1)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} &= l_1 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_1 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}, \\
\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} &= l_2 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}, \\
\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} &= l_3 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y},
\end{aligned}
$$

l_i, m_i, n_i (que nous aurions dû, plus exactement, écrire $l_i^{(0)}$, $m_i^{(0)}$, $n_i^{(0)}$) étant calculés en donnant à u, v, w les valeurs $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$. La dérivée $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}$, évaluée par la règle

---

que les l, m, n (fonctions, cette fois de u, v, w, x, y) seraient nuls sur toute la ligne initiale. On serait seulement conduit, dans ces conditions, à ajouter sous les signes $\int$, dans les équations intégrales (5), des termes en u, v, w non différentiés analogues à ceux qui figurent dans (4) : termes qui obligeraient à compléter en conséquence les formules (A_1), (A_2), mais sans introduire aucune difficulté dans le raisonnement.

classique, est (avec la même convention pour les l, m, n ainsi que pour leurs dérivées partielles en u, v, w)

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = \frac{du_\alpha}{dy} - x_\alpha' \left(l_1 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_1 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \int_\alpha^a \left[\left(\frac{\partial l_1}{\partial u^{(0)}} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial l_1}{\partial v^{(0)}} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial l_1}{\partial w^{(0)}} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}\right) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial m_1}{\partial u^{(0)}} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \dots\right) \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial n_1}{\partial u^{(0)}} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \dots\right) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} +$$

$$\left. + l_1 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x \partial y} + m_1 \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x \partial y} + n_1 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x \partial y}\right] dx,$$

la dérivée totale du/dy étant prise le long de S et x' désignant, comme au n° **230 *bis*,** l'inverse du coefficient angulaire de la tangente à S. Intégrons par parties les termes en $\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x \partial y}$ et opérons de même pour $\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}$, $\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}$; nous avons, en tenant compte, en α, β, des relations (3 *bis*), lesquelles introduisent les dérivées de u, v, w le long de S [dérivées données, ce qui nous dispense d'y inscrire les indices supérieurs (o)],

$$(\mathrm{A}_2) \begin{cases} \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = \left[(1 - l_1) \dfrac{du}{dy} - m_1 \dfrac{dv}{dy} - n_1 \dfrac{dw}{dy}\right]_\alpha + \\ \qquad + l_1 \dfrac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + m_1 \dfrac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + n_1 \dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_\alpha^a dx \sum \left[\mathrm{J}_1^{(0)} \left(\dfrac{\partial m_1}{\partial w^{(0)}} - \dfrac{\partial n_1}{\partial v^{(0)}}\right)\right] \\ \dfrac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = \left[- l_2 \dfrac{du}{dy} + (1 - m_2) \dfrac{dv}{dy} - n_2 \dfrac{dw}{dy}\right]_\alpha + \\ \qquad + l_2 \dfrac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + m_2 \dfrac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + n_2 \dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_\alpha^a dx \sum \left[\mathrm{J}_1^{(0)} \left(\dfrac{\partial m_2}{\partial w^{(0)}} - \dfrac{\partial n_2}{\partial v^{(0)}}\right)\right], \end{cases}$$

$$(A_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \left[-l_3\dfrac{du}{dx} - m_3\dfrac{dv}{dx} + (1-n_3)\dfrac{dw}{dx}\right]_\beta + \\ \qquad + l_3\dfrac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + m_3\dfrac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + n_3\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + \\ \qquad - \displaystyle\int_\beta^a dy \sum\left[J_1^{(0)}\left(\dfrac{\partial m_3}{\partial w^{(0)}} - \dfrac{\partial n_3}{\partial v^{(0)}}\right)\right], \end{cases}$$

où chaque somme Σ, sous les signes $\int$, comprend trois termes, dans lesquels figurent respectivement les premiers membres des conditions d'intégrabilité de la différentielle $l_i du + m_i dv + n_i dw$ correspondante et les trois jacobiens $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}$, $J_3^{(0)}$ de $v^{(0)}, w^{(0)}$; $w^{(0)}, u^{(0)}$; $u^{(0)}, v^{(0)}$ par rapport à x, y.

233. En raison de la présence des inconnues dans les coefficients et du fait que les polynomes sous les signes $\int$ de (A_2) sont quadratiques (1) (et non plus linéaires) par rapport aux dérivées, la méthode se rapprochera de celle qui convient au cas général (et non plus linéaire) du théorème fondamental des équations différentielles : le raisonnement comportera deux temps (2).

En premier lieu, nous aurons à limiter les domaines auxquels devront appartenir les valeurs de u, v, w ainsi que celles de leurs dérivées premières, et cela tant pour les fonctions choisies comme point de départ que pour les approximations qui s'en déduiront par les équations (A) — (A_2). Convenons de nous borner aux valeurs de u, v, w suffisamment voisines de u_0, v_0, w_0, soit

$$(6)\quad |u - u_0| \leqslant H, \qquad |v - v_0| \leqslant H, \qquad |w - w_0| \leqslant H.$$

(1) Ce fait n'est pas distinct de celui que nous rencontrerons plus loin (**238**).

(2) Cf. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. XI, nos 2, 14 et notre *Cours d'Analyse*, no **239 *bis***.

En ce qui concerne les fonctions l_i, m_i, n_i, ces inégalités entraîneront, par hypothèse, les conséquences suivantes :

1° D'après la manière dont a été effectuée la substitution linéaire définie au numéro précédent, on aura

$$(7) \qquad |l_i|,\ |m_i|,\ |n_i| < \varepsilon, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

ε étant une quantité qui dépend de H et que l'on pourra prendre aussi petite que l'on voudra en prenant H suffisamment petit;

2° Les fonctions l_i, m_i, n_i, devant être régulières dans le domaine considéré, celles de leurs dérivées qui interviennent sous les signes $\int$ dans les équations (A_2) devront satisfaire aux inégalités

$$(8) \left|\frac{\partial l_i}{\partial v} - \frac{\partial m_i}{\partial u}\right|,\ \left|\frac{\partial m_i}{\partial w} - \frac{\partial n_i}{\partial v}\right|,\ \left|\frac{\partial n_i}{\partial u} - \frac{\partial l_i}{\partial w}\right| < \Lambda \quad (i = 1, 2, 3)$$

(où Λ est un nombre positif fixe) et cela dès que les différences (6) seront inférieures en valeur absolue à un certain nombre H_0.

3° Chacune des quantités précédentes devra satisfaire à une condition de Lipschitz : si l'on remplace un premier système de valeurs de u, v, w par un autre

$$U = u + \Delta u, \qquad V = v + \Delta v, \qquad W = w + \Delta w,$$

tous deux satisfaisant aux inégalités (6), les différences

$$\Delta l_i = l_i(U, V, W) - l_i(u, v, w), \qquad \Delta m_i, \qquad \Delta n_i,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial l_i}{\partial v} - \frac{\partial m_i}{\partial u}\right), \quad \Delta\left(\frac{\partial m_i}{\partial w} - \frac{\partial n_i}{\partial v}\right), \quad \Delta\left(\frac{\partial n_i}{\partial u} - \frac{\partial l_i}{\partial w}\right)$$

correspondantes devront toutes satisfaire à l'inégalité commune

$$(9) \quad |\Delta l_i|,\ |\Delta m_i|,\ |\Delta n_i|,\ \left|\Delta\left(\frac{\partial l_i}{\partial v} - \frac{\partial m_i}{\partial u}\right)\right|,\ \left|\Delta\left(\frac{\partial m_i}{\partial w} - \frac{\partial n_i}{\partial v}\right)\right|,$$
$$\left|\Delta\left(\frac{\partial n_i}{\partial u} - \frac{\partial l_i}{\partial w}\right)\right| < A\left(|\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|\right)$$

A étant un nombre positif fixe.

Soit, d'autre part, H_1 une borne supérieure des valeurs absolues des dérivées partielles ou totales de u, v, w, le long de S. Nous nous astreindrons à ne considérer, pour ces dérivées, dans le voisinage de S, que des valeurs satisfaisant aux inégalités

$$(10) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| < 2H_1.$$

Soient H_1 choisi comme il vient d'être dit, les nombres A et Λ ayant été également choisis une fois pour toutes, H et η deux nombres que nous nous réservons de choisir ultérieurement, le premier devant être au plus égal à H_0. Limitons-nous aux points a tels que [1]

$$(11) \qquad \overline{a\alpha} \leqslant \eta, \qquad \overline{a\beta} \leqslant \eta, \qquad \overline{Oa} \leqslant \eta;$$

(α et β étant les points définis précédemment) et supposons qu'en tous ces points du plan des xy, les quantités $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$ satisfassent aux inégalités (6) et leurs dérivées aux inégalités (10). *Nous avons d'abord à nous assurer que ces mêmes conditions seront remplies par* $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$. En ce qui concerne (6), il suffira, d'après (A), (7), (10), que l'on ait

$$(12) \qquad 6\varepsilon\eta H_1 < \frac{H}{2}$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} |u_\alpha - u_O|, \ |v_\alpha - v_O|, \ |w_\alpha - w_O|, \\ |u_\beta - u_O|, \ |v_\beta - v_O|, \ |w_\beta - w_O| \end{array}\right\} < \frac{H}{2},$$

ces dernières résultant de la dernière inégalité (11) pour η suffisamment petit et, d'une manière précise, ayant certainement lieu dès que

$$(13) \qquad 2\eta H_1 < \frac{H}{2},$$

---

(1) Lorsque S est l'angle des axes, ceci astreint le point a à être dans un carré de diagonale η ayant un sommet à l'origine.

inégalité qui entraîne (12) si l'on a, en outre,

$$(14) \qquad 3\varepsilon \leqslant 1.$$

Pour (10), il suffira, en vertu de (A_1) et de (A_2), que l'on ait les inégalités (14) et

$$H_1(1 + 9\varepsilon) + 12\Lambda\eta H_1^2 < 2H_1;$$

ou

$$(14\ bis) \qquad 9\varepsilon + 12\Lambda\eta H_1 < 1,$$

dont la seconde dispense de la première.

Moyennant ces inégalités (13), (14 *bis*), les conditions (6), (10), remplies par $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$, entraîneront ces mêmes conditions en ce qui regarde $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$; puis, de même, pour l'approximation suivante $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$; et ainsi de suite. Toutes tomberont donc, en particulier, dans le domaine de régularité des coefficients.

234. Ce premier point acquis, imaginons que, comme tout à l'heure, au système de départ $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$, on en substitue un autre

$$(15) \qquad \begin{aligned} U^{(0)} &= u^{(0)} + \Delta u^{(0)}, \\ V^{(0)} &= v^{(0)} + \Delta v^{(0)} \\ W^{(0)} &= w^{(0)} + \Delta w^{(0)} \end{aligned}$$

satisfaisant également, aux conditions initiales données sur S et, dans toute la région (11), aux conditions (6), (10), de sorte que les valeurs $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $W^{(1)}$ qu'on en déduira pour remplacer $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ satisferont aussi à ces mêmes conditions. Donnons-nous une borne supérieure des dérivées de $\Delta u^{(0)}$, $\Delta v^{(0)}$, $\Delta w^{(0)}$, soit

$$(16) \qquad \left.\begin{matrix} \left|\dfrac{\partial \Delta v^{(0)}}{\partial x}\right|, & \left|\dfrac{\partial \Delta v^{(0)}}{\partial x}\right|, & \left|\dfrac{\partial \Delta w^{(0)}}{\partial x}\right|, \\ \left|\dfrac{\partial \Delta u^{(0)}}{\partial y}\right|, & \left|\dfrac{\partial \Delta v^{(0)}}{\partial y}\right|, & \left|\dfrac{\partial \Delta w^{(0)}}{\partial y}\right| \end{matrix}\right\} < h_0.$$

Comme $\Delta u^{(0)}$, $\Delta v^{(0)}$, $\Delta w^{(0)}$ sont nuls tout le long de S, on aura, ξ désignant la plus grande des deux longueurs $a\alpha$, $a\beta$,

$$(16\ bis) \qquad |\Delta u^{(0)}|,\ |\Delta v^{(0)}|,\ |\Delta w^{(0)}| < h_0 \xi.$$

Calculons les limitations correspondantes pour $\Delta u^{(1)}$, $\Delta v^{(1)}$, $\Delta w^{(1)}$ et leurs dérivées, en tenant compte des conditions de Lipschitz (9). Il vient ainsi sans difficulté, d'après (A_1),

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad \left|\frac{\partial \Delta u^{(1)}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \Delta v^{(1)}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \Delta w^{(1)}}{\partial y}\right| < 3(\varepsilon + 6\,AH_1\xi)\,h_0$$

et, d'après (A_2),

$$(\mathfrak{A}_2) \qquad \left|\frac{\partial \Delta u^{(1)}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial \Delta v^{(1)}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial \Delta w^{(1)}}{\partial x}\right|$$
$$< h_0\,(3\,\varepsilon + 18\,AH_1\xi + 36\,AH_1\xi^2 + 24\,AH_1^2\xi^3)$$

d'où, comme tout à l'heure, en multipliant par ξ, une limitation analogue à (16 *bis*) pour $|\Delta u^{(1)}|$, $|\Delta v^{(1)}|$, $|\Delta w^{(1)}|$ eux-mêmes.

Soit μ un nombre positif plus petit que 1. Nous choisirons les nombres ε et η de manière à vérifier les inégalités (14), (14′) et

$$(17) \qquad 3\varepsilon + 18AH_1\eta + 36AH_1\eta^2 + 24AH_1^2\eta^3 < \mu;$$

et, ε étant ainsi choisi, nous prendrons H en conséquence; puis nous assujettirons encore η aux inégalités (12), (13), lesquelles ne contredisent pas (17). Moyennant de tels choix des nombres H, ε, η, nous voyons que les inégalités (16), (16 *bis*) entraîneront

$$\left|\frac{\partial \Delta u^{(1)}}{\partial x}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial \Delta v^{(1)}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial \Delta w^{(1)}}{\partial y}\right| < h_1,$$
$$|\Delta u^{(1)}|,\ |\Delta v^{(1)}|,\ |\Delta w^{(1)}| < h_1\xi;$$

avec

$$h_1 < \mu h_0.$$

De même, pour les approximations suivantes, le nombre h_1 sera remplacé par les nombres h_2, h_3, ... respectivement inférieurs à $\mu^2 h_0$, $\mu^3 h_0$, ...

Le raisonnement s'achève à la manière ordinaire. Si l'on commence par prendre $U^{(0)} = u^{(1)}$, $V^{(0)} = v^{(1)}$, $W^{(0)} = w^{(1)}$, les différences qu'on en déduira successivement ne seront autres que les quantités successives

$$\begin{array}{ccc} u^{(2)} - u^{(1)}, & u^{(3)} - u^{(2)}, & \dots \\ v^{(2)} - v^{(1)}, & v^{(3)} - v^{(2)}, & \dots \\ w^{(2)} - w^{(1)}, & w^{(3)} - w^{(2)}, & \dots \end{array}$$

et leurs dérivées.

h_2, h_3, ... tendant vers zéro à la façon des termes d'une progression géométrique décroissante, les séries ainsi engendrées convergeront, et cela uniformément dans toute la région (11) : elles satisferont, dès lors, aux équations intégrales (5), donc aussi aux équations différentielles et aux conditions initiales données.

La solution obtenue sera unique, comme on le voit [1] en remarquant qu'elle ne change pas (puisque les h successifs tendent vers zéro) lorsqu'on remplace le système de départ $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$ par un autre arbitraire tel que (15) : ce qui achève la démonstration annoncée.

La construction précédente pourra s'effectuer au voisinage de tout point de S et (Cf. **11**) les diverses solutions partielles ainsi calculées chacune autour d'un segment de S, n'en feront qu'une, valable dans tout le voisinage de la ligne initiale [2].

Si les coefficients du système différentiel ou les données initiales dépendent (continûment ainsi que leurs dérivées) d'un ou plusieurs paramètres auxiliaires quelconques, et si les conditions (6) — (17) sont remplies uniformément (c'est-à-dire avec des valeurs fixes de A, H, H_1, ...) par rapport à ces paramètres, la solution sera aussi une fonction continue des mêmes paramètres; elle pourra, moyennant des conditions supplémentaires faciles à indiquer,

---

(1) Cf. notre *Cours d'Analyse*, t. II, n° **240**, 4°, 5°.

(2) On serait dispensé de cette remarque, et l'on définirait la solution d'un seul coup dans tout le voisinage de S, si l'on procédait comme il est dit dans la note 2 de la p. 492. Ceci, toutefois, ne s'appliquerait pas au cas où S serait l'angle des axes.

être différentiée un nombre plus ou moins grand de fois par rapport à eux, ou par rapport aux variables indépendantes données.

II

235. Venons maintenant à une équation aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0;$$

en considérant d'abord le cas hyperbolique. Dans ce cas, il ne sera pas nécessaire de supposer le premier membre analytique, pourvu qu'il soit régulier. Donnons-nous une ligne S du plan des xy également régulière, c'est-à-dire le long de laquelle x et y seront des fonctions régulières [1] d'un paramètre λ, les deux dérivées $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$ ne s'annulant jamais ensemble (nous supposerons, comme nous pouvons le faire sans diminuer la généralité, la première d'entre elles différente de zéro); et, en chaque point de cette ligne, les données (régulières) de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de l'inconnue u et de ses dérivées premières p, q, satisfaisant à la relation

$$(18) \qquad du = pdx + qdy.$$

Nous allons supposer que, du moins pour ces données, l'équation est du type hyperbolique, et la ligne S non caractéristique, c'est-à-dire :

1° que cette équation, jointe à

$$(18\ bis) \qquad dp = rdx + sdy \quad , \quad dq = sdx + tdy,$$

permet de calculer, en chaque point de S, un système bien déterminé et continu de valeurs de r, s, t;

2° que, se servant des valeurs ainsi trouvées et des données u, p, q pour calculer F_r, F_s, F_t, les racines de l'équation du second degré

$$(19) \qquad F_r\rho^2 - F_s\rho + F_t = 0,$$

(1) M. H. Lewy dans son Mémoire cité des *Math. Ann.* Tome XCVIII, détermine l'ordre de dérivabilité qu'il est nécessaire de supposer.

sont, en chaque point de S, réelles et distinctes, aucune d'entre elles n'étant égale au coefficient angulaire de la tangente à S. Ces deux racines ρ_1, ρ_2 peuvent être considérées comme connues en fonction de x, y, u, p, q, r, s, t.

Nous allons pouvoir montrer que le problème de Cauchy ainsi posé admet, au moins dans une certaine région autour de S, une solution et une seule.

236. Commençons par établir le second de ces deux points. Soit donc supposée connue une solution u de l'équation, satisfaisant aux conditions données. F_r, F_s, F_t pourront alors être exprimés en fonction de x, y. En chaque point M passeront donc deux caractéristiques, lesquelles seront définies respectivement par les équations différentielles

$$(20)\qquad \begin{cases} dy - \rho_1 dx = 0, \\ F_r\, dr + \dfrac{1}{\rho_1} F_t\, ds + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) dx = 0, \\ \rho_1 F_r\, ds + F_t\, dt + \left(\dfrac{dF}{dy}\right) dy = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou}\qquad \begin{cases} dy - \rho_2\, dx = 0 \\ F_r dr + \dfrac{1}{\rho_2} F_t ds + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) dx = 0, \\ \rho_2 F_r ds + F_t dt + \left(\dfrac{dF}{dy}\right) dy = 0 \end{cases}$$

jointes à (18), (18 *bis*).

Dans les équations (20), ρ_1, ρ_2 désignent les deux fonctions [2] $\rho_1(x, y)$, $\rho_2(x, y)$ qui vérifient l'équation (19); les

---

(1) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Tome I, Chap. IV, p. 171-174; Paris, Hermann, 1896.

(2) Rappelons que, u, p, q, r, s, t étant, provisoirement, supposés connus en fonctions de x, y, il en est de même de ρ_1, ρ_2.

notations $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ désignent, pour abréger, les combinaisons

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = F_v + pF_u + rF_p + sF_q, \tag{20 bis}$$
$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = F_y + qF_u + sF_p + tF_q.$$

Ces caractéristiques sont, par hypothèse, réelles et distinctes et, du moins si M est suffisamment voisin de la ligne S, couperont chacune S en un point déterminé, correspondant à une valeur déterminée du paramètre, donnant ainsi un triangle curviligne $\mathfrak{T}$. Inversement, à deux points quelconques de S, pourvu qu'ils soient suffisamment voisins, correspondra, par intersection d'une caractéristique du premier système issue du premier point et d'une caractéristique du second système issue du second point, un point $M(x, y)$ déterminé.

Considérons d'autre part les deux valeurs λ et μ du paramètre ainsi introduites comme des coordonnées rectangulaires dans un plan, la ligne S étant figurée sur ce diagramme par la droite D ($\lambda = \mu$), les caractéristiques par des parallèles aux axes, de sorte que notre triangle curviligne $\mathfrak{T}$ aura pour image un triangle rectangle isocèle T ayant sa base sur la droite D.

Prenant λ et μ comme variables indépendantes, nous voyons que x, y, u, p, q, r, s, t devront, en tout point du triangle T, satisfaire aux équations des caractéristiques : en particulier, aux six équations (18), (18 *bis*), (20) pour le premier système, savoir

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{cases} \varphi_1 = y' - \rho_1 x' = 0 \\ \varphi_2 = F_r r' + \dfrac{1}{\rho_1} F_t s' + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) x' = 0 \\ \varphi_3 = \rho_1 F_r s' + F_t t' + \left(\dfrac{dF}{dy}\right) y' = 0 \\ \varphi_4 = u' - px' - qy' = 0 \\ \varphi_5 = p' - rx' - sy' = 0 \\ \varphi_6 = q' - sx' - ty' = 0 \end{cases}$$

le signe $'$ représentant la différentiation $\frac{\partial}{\partial\lambda}$, et aux deux premières équations (20) pour une caractéristique du second système, soit

$$(\text{I}^{\backprime})\quad \begin{cases} \psi_1 = y^{\backprime} - \rho_2 x^{\backprime} = 0 \\ \psi_2 = F_r r^{\backprime} + \dfrac{1}{\rho_2} F_t t^{\backprime} + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) x^{\backprime} = 0, \end{cases}$$

le signe $^{\backprime}$ désignant la différentiation $\frac{\partial}{\partial\mu}$. Nous avons ainsi huit équations linéaires aux dérivées partielles du type (1′), (1‵); car, en vertu de $\rho_2 \neq \rho_1$, le déterminant des coefficients est bien différent de zéro (autrement dit si, dans la seconde série d'équations, on remplaçait partout le signe $^{\backprime}$ par $'$, on trouverait, sans difficulté,

$$x' = y' = u' = \ldots = t' = 0).$$

On pourra donc intégrer le système (I′), (I‵) avec les conditions initiales qui nous sont données le long de la base du triangle T, c'est-à-dire d'un segment de la droite D.

Le calcul en question donnant, comme nous le savons, un résultat parfaitement déterminé, il est déjà établi que notre problème ne peut admettre plus d'une solution.

237. Inversement, supposons ce calcul effectué pour tous les systèmes de valeurs (suffisamment voisines entre elles) de λ, μ. Tout d'abord on aura ainsi, en fonction de λ, μ, des valeurs de x, y. Les deux équations ainsi écrites pourront être résolues en λ, μ pour toute position donnée du point M suffisamment voisine de S : car cette solution est acquise lorsque M est sur S, avec un jacobien $x'y^{\backprime} - x^{\backprime}y'$ différent de zéro puisque ρ_1 et ρ_2 sont distincts et que (si, comme nous l'avons supposé, la tangente à S n'est pas caractéristique) x' et y' ne peuvent être tous deux nuls, non plus que $x^{\backprime}$ et $y^{\backprime}$ (Cf. p. 519).

Nous allons maintenant établir que les huit fonctions ainsi calculées de λ et de μ satisfont, non seulement aux

huit équations différentielles auxquelles nous les avons assujetties, mais aux quatre équations restantes

$$(\mathrm{II}^{\backprime})\qquad \begin{cases} \psi_3 = \rho_2 \mathrm{F}_r s^{\backprime} + \mathrm{F}_t t^{\backprime} + \left(\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}\right) y^{\backprime} = 0; \\ \psi_4 = u^{\backprime} - p x^{\backprime} - q y^{\backprime} = 0; \\ \psi_5 = p^{\backprime} - r x^{\backprime} - s y^{\backprime} = 0; \\ \psi_6 = q^{\backprime} - s x^{\backprime} - t y^{\backprime} = 0 \end{cases}$$

que nous n'avons pas fait intervenir.

Si nous faisons cette démonstration et si, en outre, nous nous assurons que nos huit inconnues vérifient, identiquement en λ, μ, la relation (E), nous aurons une solution du problème : car, d'après ce qui précède, u, p, q, r, s, t, fonctions de λ, μ, sont, par là même, fonctions de x, y, et leurs différentielles vérifient identiquement, d'après les trois dernières équations (I') et les trois dernières équations (II`), les relations (18), (18 *bis*), de sorte que p, q, r, s, t sont les dérivées premières et secondes de u par rapport à x, y.

Tout d'abord, on sait [1] que les équations des caractéristiques admettent la combinaison linéaire $d\mathrm{F}$. Il est aisé de former cette combinaison : on trouve, en tenant compte de l'équation (19) à laquelle satisfait ρ_1, que l'on a (identiquement en x', y', u', p', q', r', s', t')

$$\mathrm{F}' = \varphi_2 + \varphi_3 + \mathrm{F}_u \varphi_4 + \mathrm{F}_p \varphi_5 + \mathrm{F}_q \varphi_6.$$

Il en résulte que F' s'annule identiquement sur la solution que nous venons de construire. Comme, en chaque point de la base de notre triangle, les valeurs de nos variables vérifient la relation $\mathrm{F} = 0$, on voit que celle-ci aura bien lieu dans tout l'intérieur de ce triangle. Elle entraîne, d'autre part,

$$\mathrm{F}^{\backprime} = 0.$$

Or, en vertu d'un calcul tout semblable au précédent, il est clair que ceci peut s'écrire

$$(21)\qquad \psi_2 + \psi_3 + \mathrm{F}_u \psi_4 + \mathrm{F}_p \psi_5 + \mathrm{F}_q \psi_6 = 0,$$

(1) Cf. Goursat, *loc. cit.*, p. 174.

où même le premier terme peut être supprimé en vertu de la seconde équation (I$^{\backprime}$). On voit donc que les équations (I$^{\backprime}$), (II$^{\backprime}$) ne sont pas indépendantes.

Nous noterons une forme particulièrement simple sous laquelle on peut mettre les polynômes φ_2, φ_3, ψ_2, ψ_3 en tenant compte de la relation $\rho_1\rho_2 = \frac{F_t}{F_r}$ qui existe entre les racines de l'équation (19). En tirant de cette relation F_r, on voit ainsi sans difficulté qu'on peut écrire, pour ces polynômes (sous le bénéfice des équations $\varphi_1 = \psi_1 = 0$)

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\rho_1 y^{\backprime}}{F_t}\,\varphi_2 = r'x^{\backprime} + s'y^{\backprime} + \mathcal{H} \\[2ex] \dfrac{\rho_2 y'}{F_t}\,\psi_2 = r^{\backprime}x' + s^{\backprime}y' + \mathcal{H} \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \frac{y'y^{\backprime}}{F_t}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{x'x^{\backprime}}{F_r}\left(\frac{dF}{dx}\right)$$

$$(22\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^{\backprime}}{F_t}\,\varphi_3 = s'x^{\backprime} + t'y^{\backprime} + \mathcal{K} \\[2ex] \dfrac{y'}{F_t}\,\psi_3 = s^{\backprime}x' + t^{\backprime}y' + \mathcal{K} \end{cases}$$

$$\mathcal{K} = \frac{y'y^{\backprime}}{F_t}\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{x'x^{\backprime}}{F_r}\left(\frac{dF}{dy}\right).$$

238. La démonstration des équations (II$^{\backprime}$) repose sur une extension simple des expressions (ou « crochets ») classiques qu'emploie la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre [1] et qui, bien que déduites par différentiation d'expressions elles-mêmes différentielles, ne contiennent pas de dérivées secondes.

D'une manière analogue, on voit immédiatement que, dans les combinaisons

$$(23)\qquad \psi_i' - \varphi_i^{\backprime}$$

les dérivées secondes par rapport à $\lambda\mu$ s'éliminent : cha-

(1) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, n° 62; Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations partielles du premier ordre*, chap. II.

cune de ces combinaisons est un polynôme bilinéaire [1] par rapport aux dérivées ξ_j' ($j = 1, 2, \ldots, 8$) d'une part, aux dérivées $\xi_j^{`}$ de l'autre, en désignant par $\xi_1, \ldots, \xi_8$ nos huit inconnues x, y, u, p, q, r, s, t.

On va voir qu'elles peuvent se mettre sous la forme

$$P_1\varphi_1 + P_2\varphi_2 + \ldots + P_6\varphi_6 + Q_1\psi_1 + Q_2\psi_2 + \ldots + Q_6\psi_6,$$

les coefficients des φ, ψ étant des polynômes linéaires par rapport aux ξ' ou aux $\xi^{`}$, ou plus simplement, si l'on tient compte des équations déjà acquises et de (21),

$$(24)\quad Q_3\psi_3 + Q_4\psi_4 + Q_5\psi_5 + Q_6\psi_6 =$$
$$= Q_4\psi_4 + Q_5\psi_5 + Q_6\psi_6 - Q_3\,(F_u\psi_4 + F_p\psi_5 + F_q\psi_6)$$

On peut constater sans aucun calcul [2] que les quantités (23) sont nulles pour toutes les valeurs des ξ', $\xi^{`}$ qui vérifient les conditions (I'), (I`), (II`) et sont par conséquent de la forme (24). Mais la vérification directe est aisée.

---

(1) Dans le cas classique, le crochet de deux opérateurs différentiels linéaires est lui-même linéaire. La différence tient à ce que, ici, les coefficients contiennent les fonctions inconnues.

(2) Soient $x_0, y_0, u_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$; $x'_0, \ldots, t'_0$; $x^{`}_0, \ldots, t^{`}_0$ des valeurs numériques vérifiant les relations (I'), (I`), (II`), les huit premières vérifiant, en outre, l'équation donnée et étant voisines de données correspondantes en un point de S. Soit d'autre part, F_1 une fonction analytique de x, y, u, p, q, r, s, t, holomorphe autour de $x = x_0$, $y = y_0, \ldots,$ $t = t_0$, laquelle, pour ce système de valeurs des huit variables, prend la valeur zéro et admet les mêmes dérivées partielles des deux premiers ordres que F. Le théorème de Cauchy-Kowalewski montre qu'il existe une solution u_1 de l'équation aux dérivées partielles $F_1 = o$ prenant pour $x = x_0$, $y = y_0$, la valeur u_0 avec les dérivées partielles des deux premiers ordres $p_0, \ldots, t_0$, les deux dérivées $\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^2 \partial x}$ ayant, en outre, au même point, des valeurs numériques arbitrairement choisies.

Si, pour la solution u_1 ainsi construite, on mène les deux caractéristiques qui passent par le point donné (et si l'on choisit convenablement le paramètre λ ou μ sur chacune de ces deux courbes et, par conséquent, le facteur de proportionnalité qui, dans les dérivées correspondantes, dépend de ce choix), les dérivées x', y', u', p', q'; $x^{`}, \ldots, q^{`}$ auront, au même point, les valeurs numériques correspondantes données. Il en sera de même de t', $t^{`}$ si l'on a choisi convenablement les valeurs numériques de $\frac{\partial^3 u_1}{\partial y_0^{\,3}}$, $\frac{\partial^3 u_1}{\partial y_0^{\,2}\partial x_0}$; donc aussi — en vertu des relations $\varphi_2 = \psi_2 = \varphi_3 = \psi_3 = o$, vérifiées, par hypothèse, tant pour u_1 que pour u — de $r', s', r^{`}, s^{`}$.

Or, pour la solution u_1, les quantités (23) sont nécessairement nulles, puisque les φ et les ψ sont nuls en tout point.

Remarquons d'abord qu'on peut faire abstraction de ψ_3 qui, d'après (21), est une combinaison linéaire de ψ_2, ψ_4, ψ_5, ψ_6. Puis on a immédiatement

$$\psi_4' - \varphi_4^{\backprime} = p'x^{\backprime} + q'y^{\backprime} - p^{\backprime}x' - q^{\backprime}y' = \varphi_5 x^{\backprime} - \varphi_6 y^{\backprime} - \psi_5 x' - \psi_6 y'.$$

De même,

$$\psi_5' - \varphi_5^{\backprime} = r'x^{\backprime} + s'y^{\backprime} - r^{\backprime}x' - s^{\backprime}y';$$

ou, d'après (22),

$$(25) \qquad \psi'_5 - \varphi^{\backprime}_5 = \frac{\rho_1 y^{\backprime}}{F_t}\varphi_2 - \frac{\rho_2 y'}{F_t}\psi_2$$

et enfin, d'une manière analogue, en utilisant (22 *bis*) et (21),

$$(26) \qquad \psi'_6 - \varphi^{\backprime}_6 = \frac{y^{\backprime}}{F_t}\varphi_3 - \frac{y'}{F_t}\psi_3 =$$

$$= \frac{y^{\backprime}}{F_t}\varphi_3 + \frac{y'}{F_t}\left(\psi_2 + F_u\psi_4 + F_p\psi_5 + F_q\psi_6\right)$$

239. Mais, par construction, les φ_i sont nuls identiquement en λ, μ. Les équations

$$\psi_i' - \varphi_i^{\backprime} = 0; \qquad (i = 4, 5, 6)$$

deviennent donc des équations différentielles linéaires ordinaires en ψ_4, ψ_5, ψ_6 considérés comme fonctions de λ et montrent que ces quantités sont partout nulles si elles le sont pour une valeur déterminée de λ.

Or, pour $\lambda = \mu$, c'est-à-dire sur S, les équations (II') sont vérifiées, comme résultant des trois dernières équations (I') d'une part et, de l'autre, des équations (18), (18 *bis*).

Elles sont donc vérifiées dans toute la région considérée du plan.

C. Q. F. D.

On voit (ce qui n'avait pas été établi jusqu'ici dans le cas non linéaire) que, du moment que l'équation est hyperbolique, la valeur de la solution en un point donné ne dépend que des données sur *une partie* de la ligne S, correspondant à un segment de la droite D.

III

240. La théorie du cas elliptique est, par la nature même des choses, plus difficile. Les considérations précédentes ne sauraient s'y appliquer sans modifications importantes.

Nous avons, en effet, dans le cas qui vient d'être traité, établi à la fois qu'il ne peut exister plus d'une solution et qu'il en existe effectivement une, dont nos opérations nous fournissent même une construction. Or, au contraire, dans le cas elliptique, nous savons que le problème de Cauchy est en général impossible. Nous sommes donc avertis que la méthode précédente n'est pas directement applicable. Bien loin de construire une solution du problème, nous aurons, au contraire, à partir toujours de solutions supposées connues.

La première question qui va se poser sera de démontrer à leur égard le théorème de M. Hilbert :

Toute solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre analytique et du type elliptique est analytique dans tout l'intérieur de son domaine d'existence.

La méthode employée à cet effet consistera à étendre la définition d'une telle solution au domaine des valeurs complexes de x et de y.

Commençons, avec M. H. Lewy (1), par un cas particulièrement simple, celui de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, p, q),$$

f étant analytique par rapport aux variables qu'elle contient.

Soit donc u une solution de l'équation précédente, supposée connue dans une certaine région $\mathcal{R}$ du plan des variables réelles x et y. Soit proposé, pour commencer, de la définir pour x réel et y complexe, soit $y = y_1 + iy_2$. Si le problème était, pour un instant, supposé résolu, l'équation admettrait deux systèmes de caractéristiques,

(1) Mémoire cité des *Gött. Nachr.*, 1927.

dont les équations (en raison du fait que l'équation est linéaire dans sa partie du second ordre) peuvent s'écrire en n'introduisant que les variables x, y, u, p, q, savoir, pour le premier système,

$$dy - idx = 0;$$

$$dp - idq = fdx;$$

et, pour le second,

$$dy + idx = 0;$$

$$dp + idq = fdx;$$

Convenons, provisoirement, de laisser constante la partie réelle y_1 de y. Tout se passera alors dans le plan des variables réelles x, y_2 et, dans ce plan, les caractéristiques des deux systèmes seront figurées respectivement par les droites :

$$y_2 - x = C^{te}, \qquad y_2 + x = C^{te}.$$

Par chaque point (x, y_2) du plan en question, passeront deux telles caractéristiques, formant un triangle rectangle isocèle avec la droite $y_2 = 0$ qu'elles couperont aux points d'abscisses $x - y_2$, $x + y_2$.

Nous désignerons encore par l'accent ´ des dérivées prises le long d'une caractéristique du premier système et par l'accent ` les dérivées prises suivant une caractéristique du second. Si, dans le plan des xy_2 (ou, plus exactement, dans le triangle rectangle isocèle dont il vient d'être question), nous introduisons deux coordonnées auxiliaires λ, μ liées à x, y_2 par les relations

$$x = \lambda + \mu \quad , \qquad y_2 = \lambda - \mu \quad ,$$

´ sera une dérivée par rapport à λ et ` une dérivée par rapport à μ. Avec ces conventions, qui donnent

$$x' = y_2' = 1 \quad , \qquad x^{`} = - y_2^{`} = 1,$$

l'équation aux dérivées partielles pourra s'écrire sous l'une des deux formes

$$p' - iq' - f = 0 \quad , \tag{27'}$$

$$p^{`} + iq^{`} - f = 0 \quad , \tag{27`}$$

pendant que l'on aura également les deux équations

$$(28') \qquad u' - p - iq = 0;$$

$$(28`) \qquad u` - p + iq = 0;$$

qui expriment que p et q représentent (du moins pour des déplacements dans le plan des xy_2), les dérivées partielles de u.

Considérons le système des trois équations différentielles (27'), (27`), (28'). Le déterminant de leurs coefficients étant différent de zéro, elles constituent, par rapport à u, p, q considérés comme fonctions de λ et de μ, un système du type étudié dans ce qui précède. Le long de la droite $y_2 = \lambda - \mu = 0$, nous connaissons des valeurs des inconnues u, p, q. Le problème d'intégrer le système différentiel avec les valeurs initiales ainsi données admet, nous l'avons vu, une solution et une seule.

Il resterait à s'assurer que les valeurs de u ainsi obtenues en fonction de la variable x et de $y = y_1 + iy_2$ (ou plus exactement jusqu'à plus ample informé, de x, y_1, y_2) satisfont en outre à l'équation (28`) dont il n'a pas été tenu compte jusqu'ici et sont analytiques en y; mais c'est ce qu'il est inutile d'exposer sur ce cas particulier, qui ne sert que d'introduction au cas général.

241. La construction précédente ne s'applique qu'au cas où y seul est imaginaire, x étant encore assujetti à être réel. Supposons maintenant x et y tous deux complexes, soit

$$x = x_1 + ix_2 \qquad , \qquad y = y_1 + iy_2.$$

Par le point (x, y) ainsi choisi, vont passer deux caractéristiques

$$(29') \quad Y_1 + iY_2 - (y_1 + iy_2) = i\,[X_1 + iX_2 - (x_1 + ix_2)],$$

$$(29`) \quad Y_1 + iY_2 - (y_1 + iy_2) = -i\,[X_1 + iX_2 - (x_1 + ix_2)]$$

appartenant respectivement aux deux systèmes. Chacune d'elles admet un seul point réel, savoir

(30') $\quad N_1 \quad (\alpha_1 = x_1 - y_2, \beta_1 = y_1 + x_2)$,

(30") $\quad N_2 \quad (\alpha_2 = x_1 + y_2, \beta_2 = y_1 - x_2)$.

Inversement, la connaissance simultanée de ces deux points du plan réel détermine les deux coordonnées complexes x, y.

Nous ferons, dès maintenant, une distinction utile à l'intelligence de ce qui va suivre. Lorsqu'on parlera d'une *ligne*, c'est-à-dire d'une variété décrite par un point qui dépend d'un seul paramètre, il y aura lieu de distinguer s'il s'agit d'un paramètre réel — auquel cas nous parlerons d'une *simple ligne* — ou d'un paramètre complexe; dans ce dernier cas (où interviennent, en réalité, deux paramètres réels) nous dirons qu'il s'agit d'une *mégaligne* (1). De même, au moins dans des espaces à un plus grand nombre de dimensions, il y aurait lieu de distinguer entre une *simple surface* (2), lieu d'un point qui dépend de deux paramètres réels et une *mégasurface*, lieu d'un point dépendant analytiquement de deux paramètres complexes, ce qui fait quatre paramètres réels. Par exemple, chacune des équations (29'), (29") représente une mégaligne qui coupe le plan réel en un seul point et, inversement, le point complexe (x, y) est défini par l'intersection de ces deux mégalignes, respectivement définies par le point réel N_1 (30') et par le point réel N_2 (30"). Par contre, nous pouvons, dans l'espace à quatre dimensions, joindre (x, y) à N_1 ou à N_2, par une ligne droite qui sera, cette fois, une simple ligne caractéristique. Joignons également N_1N_2 par une droite du plan réel : nous aurons formé ainsi un triangle isocèle que nous pourrons considérer comme sillonné par deux familles de simples lignes droites

(1) D'après les résultats de M. Levi Civita, les mégalignes jouent le rôle de caractéristiques par rapport au système d'équations aux dérivées partielles qui régit les fonctions de deux variables complexes.

(2) L'acceptation ainsi adoptée pour le mot « surface » est différente de celle qui a été employée dans le corps de l'ouvrage, d'après la note de la page 6.

respectivement parallèles à MN_1 et à MN_2, donc également caractéristiques et que nous considérerons comme lignes coordonnées, de manière à introduire deux paramètres (réels) λ et μ. C'est dans ce triangle rectangle et en fonction de ces deux paramètres que nous aurions à opérer d'une manière analogue à ce qui a été expliqué tout à l'heure.

IV

242. Les opérations relatives à une équation non linéaire sont analogues aux précédentes à ceci près que, non seulement u, p, q, r, s, t, mais x et y eux-mêmes doivent être pris comme inconnues : donc,

$$\text{(E)} \qquad F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

étant l'équation donnée, dont le premier membre est supposé holomorphe pour toutes les valeurs des huit variables que nous aurons à faire intervenir, nous supposons connue une solution u de cette équation définie non nécessairement dans tout le plan, mais dans une certaine région $\mathcal{R}$ limitée par une certaine ligne S (analytique ou non). Pour cette solution, et dans la région $\mathcal{R}$, l'équation sera supposée du type elliptique, c'est-à-dire que l'on aura, en chaque point de $\mathcal{R}$,

$$F_r F_t - F_s^2 > 0$$

(F_r, F_s, ... désignant toujours les dérivées partielles de F), de sorte que les racines de l'équation du second degré

$$\text{(19)} \qquad \rho^2 F_r - \rho F_s + F_t = 0$$

seront imaginaires.

Supposons, pour un instant, que, du moins, au voisinage de tout point *intérieur* à $\mathcal{R}$, u soit analytique et que, par conséquent, on puisse le définir (donc aussi ses dérivées partielles) pour des valeurs complexes de x, y.

Par tout point (réel ou complexe) M (x, y) passe une caractéristique de chaque système, solution d'un des

systèmes différentiels (20) et représentée par une équation entre les deux variables complexes x, y, donc par deux équations entre les variables réelles x_1, x_2, y_1, y_2, et qui sera une mégaligne. On aura d'ailleurs les deux remarques suivantes :

a) Pour toute position du point M suffisamment voisine de la région $\mathcal{R}$ du plan réel [c'est-à-dire telle que (x_1, y_1) soit intérieur à $\mathcal{R}$ et x_2, y_2 suffisamment petits], la caractéristique en question coupera le plan réel en un point N bien déterminé voisin de M : en effet, les deux équations qui la représentent seront alors à deux inconnues (réelles) α, β, elles auront, si le point donné est réel et intérieur à $\mathcal{R}$, la solution $\alpha = x$, $\beta = y$ et, en ce point, leur jacobien sera différent de zéro, ceci exprimant que la mégaligne ne contient aucune simple ligne tangente au plan réel, ce qui a lieu puisque ρ est complexe.

A un point complexe M correspondent ainsi deux points réels N_1 (α_1, β_1), N_2 (α_2, β_2).

b) Inversement, si ces deux points sont donnés, intérieurs à $\mathcal{R}$ et suffisamment voisins, ils feront connaître d'une manière déterminée le point complexe M. La caractéristique du premier système issue de N_1 et la caractéristique du second système issue de N_2 donnent, en effet, entre x_1, x_2, y_1, y_2, quatre équations qui, pour N_1 et N_2 confondus en (α, β), admettent la solution $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, $x_2 = y_2 = 0$; et, en un tel point, le jacobien est différent de zéro, puisque ρ_2 est différent de ρ_1 et que, par conséquent, les deux mégalignes ne sont pas tangentes [1].

Dans la région $\mathcal{R}$, supposons défini un réseau de lignes $\mathcal{L}$ à deux paramètres tel que deux points quelconques de $\mathcal{R}$ soient joints par une ligne $\mathcal{L}$ bien déterminée,

(1) Les équations des deux caractéristiques, différentiées, donnent respectivement (par hypothèse) quatre équations réelles équivalentes aux deux équations complexes :

$$dy_1 + idy_2 - \rho_1(dx_1 + idx_2) = 0$$
$$dy_1 + idy_2 - \rho_2(dx_1 + idx_2) = 0;$$

lesquelles n'admettent d'autre solution commune que

$$dx_1 = dx_2 = dy_1 = dy_2 = 0.$$

intérieure à $\mathcal{R}$. Par exemple, si [ce que nous pouvons toujours faire moyennant une transformation ponctuelle analytique [1] convenable] nous supposons $\mathcal{R}$ convexe, de sorte que S tourne sa concavité vers l'intérieur de $\mathcal{R}$, on pourra prendre simplement pour les $\mathcal{L}$ des lignes droites, le paramètre λ qui servira à désigner un point sur l'une d'elles étant la distance à une origine déterminée quelconque prise sur elle.

A tout point complexe M suffisamment voisin de $\mathcal{R}$ correspondra donc un segment de ligne $\mathcal{L}$ joignant les deux points N_1, N_2. Si, sur le segment ainsi tracé, nous prenons deux autres points quelconques n_1, n_2, la caractéristique du premier système issue de n_1 et la caractéristique du second système issue de n_2 se rencontreront en un point complexe bien déterminé m. Ce dernier, si l'on fait varier, sur $\mathcal{L}$, un seul des points n, l'autre restant fixe, décrira une simple ligne (et non plus une mégaligne) caractéristique; et, au total, nous aurons, sur une simple surface de l'espace à quatre dimensions, un triangle ou plutôt deux triangles curvilignes $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, dont l'un, $\mathcal{T}_1$ par exemple, aura pour sommets N_1, N_2, M. Chaque point m correspondant d'ailleurs à deux nombres réels λ, μ (à savoir les deux valeurs du paramètre qui, sur $\mathcal{L}$, définissent les points N_1 et N_2), chacun de ces deux triangles curvilignes correspondra, dans le plan des $\lambda\mu$, à un triangle rectangle isocèle T_1 ou T_2 ayant sa base sur la droite D ($\lambda = \mu$).

243. La question est de construire les triangles $\mathcal{T}$ sans savoir, jusqu'à nouvel ordre, si la fonction u et ses dérivées peuvent être étendues au champ complexe, mais en partant des valeurs de ces quantités dans le plan réel, valeurs que nous supposerons connues [2].

A cet effet, après avoir défini le réseau des lignes $\mathcal{L}$,

---

(1) Les transformations analytiques sont les seules que nous puissions effectuer ici, sans troubler le caractère analytique de la fonction F.

(2) Comme le constate M. H. Lewy dans le Mémoire cité des *Math. Ann.*, t. CI, les raisonnements et les conclusions qui vont suivre sont valables du moment que u admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre quatre.

nous n'aurons qu'à appliquer sans modification (sauf la présence d'inconnues et de coefficients complexes), la méthode qui nous a servi précédemment. N_1 et N_2 étant deux points quelconques intérieurs à $\mathcal{R}$ et suffisamment voisins l'un de l'autre, nous les joindrons par un segment de ligne $\mathcal{L}$, sur lequel, dès lors, les huit variables x, y, u, p, q, r, s, t seront, par hypothèse, connues en fonction du paramètre λ, c'est-à-dire de la position d'un point de la droite D du plan des $\lambda\mu$. Avec les données initiales ainsi assignées sur D, nous intégrerons encore le système des six équations (I') et des deux équations (I'), dont tous les coefficients (complexes cette fois) seront des fonctions analytiques connues des huit variables précédentes. Le déterminant de ces coefficients étant, comme ci-dessus, différent de zéro au voisinage de la ligne initiale, le système ainsi écrit relève encore de la théorie précédemment exposée, de sorte qu'à notre couple de points N_1, N_2 correspond un point M (x, y) du champ complexe, ainsi qu'un système de valeurs de u, p, q, r, s, t, toutes les quantités ainsi calculées étant dérivables par rapport à α_1, β_1, α_2, β_2.

Pour montrer qu'on a ainsi une fonction analytique $u\ (x, y)$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles, nous aurons à faire voir :

1° que l'on a, dans toute l'étendue d'un triangle $\mathfrak{T}_1$ ou $\mathfrak{T}_2$, non seulement les équations différentielles (I'), (I'), mais les quatre équations restantes (II');

2° que les équations qui font connaître les quantités $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ en fonction des coordonnées α_1, β_1, α_2, β_2 des deux points N_1, N_2 du plan réel peuvent être résolues par rapport à ces dernières en fonctions de x_1, x_2, y_1, y_2 pourvu que (x_1, y_1) soit pris dans $\mathcal{R}$ et $|x_2|$, $|y_2|$ suffisamment petits, de sorte que, dans ces conditions, u, p, q, r, s, t pourront être considérés comme fonctions de x_1, x_2, y_1, y_2;

3° que les fonctions ainsi obtenues sont analytiques en x et en y;

4° que p, q, r, s, t sont les dérivées premières et secondes de u.

244. 1° En ce qui concerne le premier point, la démonstration donnée pour le cas hyperbolique s'applique sans modification.

2° Soit maintenant à exprimer α_1, β_1, α_2, β_2 en fonctions de x_1, x_2, y_1, y_2, en supposant formées les expressions inverses. Les valeurs des fonctions implicites cherchées s'écrivent immédiatement toutes les fois que $x_2 = y_2 = 0$, savoir $\alpha_1 = \alpha_2 = x_1$, $\beta_1 = \beta_2 = y_1$. Nous avons à montrer que pour de telles valeurs des α, β c'est-à-dire pour N_1 confondu avec N_2, le jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, y_1, y_2)}{D(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$$

est différent de zéro. Les dérivées qui entrent dans ce jacobien se calculent comme il a été indiqué au n° **230 *bis.*** Considérons d'abord les dérivées partielles par rapport à α_1 et à α_2, c'est-à-dire supposons que l'un ou l'autre des points N_1 et N_2, primitivement confondus, se déplace infinitésimalement sur une parallèle à l'axe des x. Ce sera alors cette droite qui sera la ligne $\mathcal{L}$, le paramètre λ n'étant autre que l'abscisse α_1 ou α_2. En vertu des identités

$$(31) \qquad x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = \alpha \quad , \quad y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = \beta,$$

on aura, pour les dérivées des coordonnées complexes x, y,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = 0,$$

relations qui, jointes à

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \rho_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \rho_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}$$

donnent

$$(32\,a) \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = \frac{-\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

$$(32\,b) \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

De même, pour des déplacements de N_1 ou de N_2 parallèlement à l'axe des y,

$$(33\,a)\qquad \frac{\partial x}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial x}{\partial \beta_2} = \frac{-1}{\rho_1 - \rho_2}$$

$$(33\,b)\qquad \frac{\partial y}{\partial \beta_1} = \frac{-\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Dans ces formules, il est aisé de séparer les parties réelles et imaginaires en tenant compte de ce que ρ_1 et ρ_2 sont des imaginaires conjuguées. Le second membre de chacune des relations (32^a), (33^b) a pour partie réelle $1/2$, soit

$$(34)\qquad \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{2} + i\tau, \quad \frac{-\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{2} - i\tau,$$

d'où

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial y_1}{\partial \beta_2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial y_2}{\partial \beta_2} = \tau.$$

Ceux des équations (32^b), (33^a) sont des imaginaires pures, de sorte que $\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta_2} = 0$. Le produit de ces imaginaires pures étant le même (au signe près) que celui des quantités (34), soit

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}\frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}\frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}\frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1}$$
$$= \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}\frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2} = -\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right),$$

il vient

$$J = -\frac{1}{4}.$$

u, p, q, r, s, t pourront donc être exprimés en fonctions des quatre coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2 dans l'hyperespace ou mégaplan E_4 ou plutôt dans sa partie voisine de $\mathcal{R}$.

Remarque. — Dans le même ordre d'idées, notons qu'on ne peut jamais avoir, en effectuant notre construction le long d'une quelconque des lignes $\mathcal{L}$,

$$x'y^{\backprime} - y'x^{\backprime} = (\rho_2 - \rho_1)x'x^{\backprime} = 0;$$

c'est-à-dire $x'x^{\backprime} = 0$, puisque le premier facteur n'est certainement pas nul.

Toujours en raison des identités (31), x' et $x^{\backprime}$ sont déterminés par les relations

$$x' + x^{\backprime} = \frac{dx}{d\lambda} \qquad y' + y^{\backprime} = \rho_1 x' + \rho_2 x^{\backprime} = \frac{dy}{d\lambda}.$$

$x' = 0$ exigerait dès lors, en multipliant la première de ces relations par ρ_2 et retranchant de la seconde,

$$\frac{dy}{d\lambda} - \rho_2 \frac{dx}{d\lambda} = 0$$

ce qui ne se peut, car $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ ne sont jamais nuls ensemble (sans quoi la ligne $\mathcal{L}$ cesserait d'être régulière ou régulièrement représentée) et leur rapport, qui est réel, ne saurait être égal à l'imaginaire ρ_2.

245. 3°, 4°. Nos deux dernières conclusions se démontreront ensemble [1] si nous faisons voir que, pour tout déplacement infinitésimal dans E_4, on a

$$(35) \qquad \delta u - p\delta x - q\delta y = 0 \quad , \qquad \delta p - r\delta x - s\delta y = 0 \quad ,$$
$$\delta q - s\delta x - t\delta y = 0;$$

ainsi qu'il nous est déjà connu, d'après les trois dernières équations (I') et les trois dernières équations (II`), lorsque le déplacement a lieu sur la simple surface correspondant à une position déterminée de la ligne $\mathcal{L}$.

En effet, la première des équations (35), si elle est supposée vérifiée pour tout déplacement dans E_4 montrera,

(1) Je dois cette partie de la démonstration à une communication personnelle de M. Hans Lewy.

comme on sait, que p est la dérivée partielle de u par rapport à x et, du moment que cette dérivée pour toute variation, réelle ou complexe, de x, u sera analytique par rapport à cette variable. De même, il sera analytique en y, sa dérivée étant q. Ces dérivées étant continues, l'analyticité en x et y est établie [1].

Quant aux deux dernières équations, elles expriment que r, s et t sont les dérivées de p et de q, donc les dérivées secondes de u.

On peut, d'après ce qui précède, considérer la position d'un point, au voisinage de la région $\mathcal{R}$ du plan réel, comme déterminée par la connaissance des valeurs de λ et de μ, jointe à celle des deux paramètres γ qui définissent la position d'une ligne particulière $\mathcal{L}$ du réseau. Il suffira donc de démontrer les relations (35) en convenant que δ désigne une différentiation par rapport à l'un de ces derniers paramètres.

Le symbole δ sera, d'après cela, permutable tant avec $'$ qu'avec $^{\backprime}$ Procédant comme précédemment (**238-239**) et posant

$$U = \delta u - p\delta x - q\delta y$$

$$P = \delta p - r\delta x - s\delta y \quad , \quad Q = \delta q - s\delta x - t\delta y$$

nous formerons les diverses dérivées U', P', Q', $U^{\backprime}$, $P^{\backprime}$, $Q^{\backprime}$. Nous pourrons d'ailleurs utiliser toutes les équations (I'), (I$^{\backprime}$), (II$^{\backprime}$), ces dernières étant actuellement démontrées. Toutes ces relations, ainsi que

$$F = 0 \quad ,$$

sont des identités par rapport aux quatre variables indépendantes γ, λ, μ, et nous pourrons leur faire subir la différentiation δ. On aura ainsi, tout d'abord,

$$(36) \qquad U' = U' - \delta\varphi_4 = p'\delta x + q'\delta y - x'\delta p - y'\delta q$$
$$= (rx' + sy')\,\delta x + (sx' + ty')\,\delta y - x'\,\delta p - y'\,\delta q =$$
$$= - x'P - y'Q,$$

(1) Voir notre *Cours d'Analyse*, t. II, **181 *bis***, p. 181

puis $$\mathrm{P}' = \mathrm{P}' - \delta\varphi_5 = r'\delta x + s'\delta y - x'\delta r - y'\delta s;$$
$$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}' - \delta\varphi_6 = s'\delta x + t'\delta y - x'\delta s - y'\delta t.$$

Combinons ces deux dernières relations en multipliant la première d'entre elles par $x^{\backprime}$, la seconde par $y^{\backprime}$ et ajoutant. Dans l'équation ainsi obtenue, nous pourrons tirer $r'x^{\backprime} + s'y^{\backprime}$, $s'x^{\backprime} + t'y^{\backprime}$ des équations (22), (22 *bis*), dont les premiers membres sont nuls; d'autre part, le fait que $\rho_1 = \frac{y'}{x'}$ et $\rho_2 = \frac{y^{\backprime}}{x^{\backprime}}$ sont les racines de l'équation (19) donne, entre $x'x^{\backprime}$, $(x'y^{\backprime} + y'x^{\backprime})$, $y'y^{\backprime}$, la double proportion

$$\frac{x'x^{\backprime}}{\mathrm{F}_r} = \frac{x'y^{\backprime} + y'x^{\backprime}}{\mathrm{F}_s} = \frac{y'y^{\backprime}}{\mathrm{F}_t}.$$

Nous trouvons donc

$$x^{\backprime}\mathrm{P}' + y^{\backprime}\mathrm{Q}' = -\frac{x'x^{\backprime}}{\mathrm{F}_r}\left[\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)\delta y + \mathrm{F}_r\delta r + \mathrm{F}_s\delta s + \mathrm{F}_t\delta t\right].$$

Mais la différentiation de F donne

$$0 = \delta\mathrm{F} = \mathrm{F}_x\delta x + \mathrm{F}_y\delta y + \mathrm{F}_u\delta u + \mathrm{F}_p\delta p + \mathrm{F}_q\delta q + \mathrm{F}_r\delta r + \mathrm{F}_s\delta s + \mathrm{F}_t\delta t.$$

Si nous tenons compte des valeurs (20 *bis*) de $\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)$ et de $\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)$, le résultat se réduit à

(37) $$x^{\backprime}\mathrm{P}' + y^{\backprime}\mathrm{Q}' = \frac{x'x^{\backprime}}{\mathrm{F}_r}(\mathrm{UF}_u + \mathrm{PF}_p + \mathrm{QF}_q)$$

Tout pareillement, avec interversion des opérations ′ et

(37′) $$x'\mathrm{P}^{\backprime} + y'\mathrm{Q}^{\backprime} = \frac{x'x^{\backprime}}{\mathrm{F}_r}(\mathrm{UF}_u + \mathrm{PF}_p + \mathrm{QF}_q).$$

(36), (37) et (37′) sont trois équations en U, P, Q du type étudié ci-dessus, dont les coefficients sont des fonctions régulières de λ, μ (F_r ne pouvant jamais être nul dans les

conditions actuelles) et dont le déterminant $x'y^{\backprime} - y'x^{\backprime}$ n'est pas nul, comme nous l'avons remarqué il y a un instant.

D'autre part, U, P, Q sont nuls pour $\lambda = \mu$, c'est-à-dire en tout point du plan réel, puisque la variation d'un des paramètres γ correspond à un déplacement dans ce plan et qu'alors, par définition, p, q, r, s, t sont les dérivées premières et secondes de u.

Donc U, P, Q sont identiquement nuls, ce qui entraîne à la fois les deux conclusions 3° et 4° du n° **243.**

Il est donc complètement établi que u, considéré comme fonction de x et de y, est une fonction analytique de ces variables et constitue, tant dans le domaine réel que dans le domaine complexe au voisinage de $\mathcal{R}$, une solution du problème.

Comme l'extension que nous venons de faire au champ complexe de la fonction u définie dans le plan réel est unique — propriété bien connue des fonctions analytiques —, elle ne dépend pas du système particulier de lignes $\mathcal{L}$ choisies dans $\mathcal{R}$: toute construction analogue à celle du n° **243,** exécutée entre deux points N_1, N_2 de $\mathcal{R}$, conduira nécessairement au même résultat, de quelque manière qu'on joigne (dans $\mathcal{R}$) ces deux points.

Enfin le théorème ci-dessus démontré entraîne, comme au Livre I (**15**), la conclusion que si, le long d'une courbe S analytique, on assigne des données de Cauchy qui ne le soient point, de manière à définir, de chaque côté de S, un problème de Cauchy, l'un au moins des deux problèmes ainsi posés n'est pas possible, puisque s'ils l'étaient tous deux, la ligne S serait intérieure au domaine de définition de la solution totale.

246. L'analyticité de toute solution de l'équation étant ainsi démontrée à l'intérieur d'une région $\mathcal{R}$ dans laquelle elle est définie, il nous reste à prouver que, si les données de Cauchy sont assignées le long de la courbe S qui limite cette région, une telle solution est parfaitement déterminée et unique.

Le principe que nous emprunterons, à cet effet, à la théorie des fonctions analytiques est le suivant :

Il ne peut exister deux fonctions analytiques différentes d'une variable z prenant les mêmes valeurs tout le long d'un arc de courbe K du plan de cette variable.

Le principe n'affirme pas l'existence d'une fonction prenant les valeurs en question le long de K (en fait, une telle fonction n'existe pas en général), ainsi qu'il est nécessaire pour qu'un tel principe puisse servir de base à notre raisonnement actuel.

Le principe qui précède est bien connu dans un premier cas, celui où K est intérieure à la région d'existence de la fonction. Il s'agit de l'établir lorsque K fait partie de la frontière de cette région. Il suffit, d'ailleurs, d'établir qu'une fonction analytique, définie d'un côté déterminé de K, est identiquement nulle si elle est nulle en tout point de K.

Or il en est nécessairement ainsi lorsque K est un segment de l'axe réel, la fonction f étant, par exemple, définie dans le demi-plan supérieur : car le procédé de Schwarz permet de prolonger la fonction au delà de cet axe, ce qui nous ramène au premier cas. Dès lors, le principe énoncé ci-dessus est vrai quelles que soient la forme de K et l'aire de définition de la fonction, puisqu'une telle aire peut être ramenée à un demi-plan par représentation conforme.

247. Ceci posé, constatons d'abord que *sur toute caractéristique, y est une fonction analytique de x.*

En effet, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, u est analytique en x et y, et il en est par conséquent de même de chacune des fonctions ρ_1, ρ_2 définies par l'équation (19). Or, la fonction $y(x)$ est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \rho_i (x, y) \qquad (i = 1, 2)$$

Une caractéristique est donc une mégaligne d'après notre définition du n° **241.**

248. Toutefois, il y a lieu d'observer que le théorème ainsi invoqué sur les équations différentielles n'est établi qu'à l'*intérieur* du domaine de définition et d'analyticité de la fonction ρ_i. Sur la frontière de ce domaine, les démonstrations connues tomberaient entièrement (démonstration par le calcul des limites) ou demanderaient au moins à être reprises (démonstration par les approximations successives).

Dans l'hyperespace ou (**241**) mégaplan E_4, lieu du point complexe (x, y), la frontière du domaine de définition de u s'obtient [1], d'après ce qui précède, en prenant sur S l'un au moins des deux points N_1, N_2 du plan réel qui servent (**243**) à la construction du point complexe M. Le lieu de ce dernier, lorsque N_1 est ainsi pris sur S et reste fixe pendant qu'on fait varier N_2, est la caractéristique C issue de N_1. Il n'est donc pas encore évident qu'une caractéristique de cette espèce particulière soit analytique.

C'est toutefois ce que l'on peut établir en toute certitude par continuité. La fonction u étant supposée régulière jusques et y compris les points de S, nos opérations fondamentales convergent uniformément lorsque l'un des points N_1, N_2 ou tous les deux s'approchent de S et cela alors même que la distance de ces deux points reste supérieure à une quantité fixe. Il en résulte que les résultats de ces opérations restent continus dans ces conditions. Si donc, au lieu de la caractéristique C, on considère la caractéristique analogue $\overline{C}$ issue d'un point $\overline{N_1}$ intérieur à la région $\mathcal{R}$ et voisin de N_1, tout point M de C, obtenu en associant N_1 à un point intérieur N_2, sera la limite vers laquelle tendra (lorsque $\overline{N_1}$ tendra vers N_1) un point $\overline{M}$ de $\overline{C}$ et, si l'on entoure, dans le plan de la variable complexe x, le point dont l'affixe est la première coordonnée de M par un contour fermé γ (suffisamment petit

(1) Une autre partie de la frontière peut éventuellement correspondre au cas où les points N_1, N_2 s'écartent jusqu'à la limite de convergence de nos opérations. Mais cette seconde partie de frontière n'aura pas à intervenir ici.

pour être intérieur à la région de validité de nos raisonnements), un tel contour, qui pourra être considéré comme déduit d'un contour (g) décrit par le point N_2 dans le plan réel, sera la limite d'un contour analogue $\overline{\gamma}$ — à savoir celui qui correspond au même contour (g) autour du point correspondant obtenu en remplaçant N_1 par $\overline{N_1}$. Dès lors, la formule classique

$$\overline{C}(\bar{x}) = \int_{\bar{\gamma}} \frac{\overline{C}(\xi)\,d\xi}{\xi - \bar{x}}$$

que l'on peut assurément écrire pour la fonction

$$\bar{y} = \overline{C}\,(x);$$

qui définit la caractéristique $\overline{C}$, donne, par passage à la limite [1], la formule correspondante pour la fonction

$$y = C\,(x); \tag{38}$$

qui définit C; cette dernière fonction est donc bien analytique.

249. Partons maintenant des données du problème. Prenant toujours N_1 fixe sur S, faisons décrire au second point N_2 cette même ligne S. Tout arc $N_1\,N_2$ de S ainsi choisi permettra, et cela en partant des seules données de Cauchy, notre construction fondamentale, conduisant à un point complexe M. Ce dernier, lorsque N_2 varie sur S, décrit une simple ligne l, qui doit être située sur la mégaligne C, et dont la projection sur le plan complexe (lieu du point d'affixe x) appartiendra, à titre de frontière, à la région de définition de la fonction (38). Il y aura d'ailleurs, pour toute solution u du problème, deux mégalignes de cette espèce C′, C″ et, respectivement sur elles, deux simples lignes l', l'', ces dernières pouvant être construites à l'aide des seules données.

(1) On pourrait, mais au prix de quelques complications, établir que la convergence de $\bar{y}$ vers y est uniforme par rapport à x, moyennant quoi l'analyticité de la dernière de ces deux fonctions résulterait d'un théorème bien connu sur les séries de fonctions analytiques.

Supposons provisoirement que notre problème de Cauchy admette deux solutions différentes. Chacune d'elles fournira, à partir du point N_1, une mégaligne C′; mais nous voyons que ces deux mégalignes auront en commun la simple ligne l'. Elles coïncideront donc entièrement, d'après le principe posé au n° **246**. Le même raisonnement s'appliquant aux diverses fonctions u, p, q, r, s, t qui sont, sur C′, des fonctions analytiques de x, les valeurs prises par ces diverses fonctions en chaque point de la mégaligne seront les mêmes pour les deux solutions.

Des conclusions toutes semblables s'appliquent à la caractéristique C‵ du second système issue de N_1, laquelle est, elle aussi, sinon effectivement constructible, du moins parfaitement définie par la ligne l‵.

250. Ces points acquis, la démonstration du théorème s'achève sans difficulté. Partons d'une première solution u_1, supposée connue, de notre problème de Cauchy. En un point quelconque N_1 (α_1, β_1) de la ligne S, u_1 et ses dérivées, par conséquent aussi, les divers coefficients qui figurent dans les équations (I′), (I‵) prendront des valeurs déterminées, et l'on pourra, autour de ce point, délimiter, dans $\mathcal{R}$, une petite région $\mathcal{R}_1$ dans laquelle les valeurs des quantités en question différeront aussi peu qu'on le voudra de leurs valeurs en N_1. A partir de ces dernières, nous pouvons effectuer la substitution linéaire du n° **232** et, par conséquent, ramener les équations (I′), (I‵) au type considéré à cet endroit, en introduisant à la place de nos huit variables x, y, u, p, q, r, s, t, huit autres variables analogues. En se donnant des bornes supérieures pour les modules des quantités

$$(39) \qquad x-\alpha_1 \quad , \quad y-\beta_1 \quad , \quad u-u_{N_1} \quad , \quad p-p_{N_1}$$

$$q-q_{N_1} \quad , \quad r-r_{N_1} \quad , \quad s-s_{N_1} \quad , \quad t-t_{N_1} \quad ,$$

on définira, dans l'espace à huit dimensions complexes (c'est-à-dire à seize dimensions réelles), une certaine région $\mathcal{E}$, correspondant à une certaine valeur du nom-

bre H_0 (n° **233**), et dans laquelle pourront, par suite, être assignés les nombres [1] H_1, Λ, A; et ceci nous permettra de choisir les nombres ε, H, η de manière à vérifier les inégalités (14), (14′), (17), (12) et (13) du n° **233**; d'où, pour les quantités (39) ci-dessus, de nouvelles limitations, donnant, dans $\mathcal{E}$, une région (en général plus restreinte) $\mathcal{E}_1$ et, de même, une nouvelle limitation de la région $\mathcal{R}_1$.

N étant un point quelconque de la région $\mathcal{R}_1$ ainsi délimitée, joignons-le par un segment de droite $\mathcal{L}$ (entièrement intérieur à $\mathcal{R}_1$ si celle-ci est convexe) au point N_1. L'arc ainsi tracé permettra notre construction fondamentale en partant de la solution u_1, c'est-à-dire en lui empruntant les valeurs de u, p, q, r, s, t le long de $\mathcal{L}$. On aura ainsi, dans E_4, deux triangles curvilignes adjacents $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dont les côtés issus de N_1 seront deux simples lignes c', $c`$, respectivement tracées sur C′ et sur C\`. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de $\mathcal{T}_1$ et de $\mathcal{T}_2$.

Chaque point de $\mathcal{L}$ est, comme précédemment, défini par une valeur d'un paramètre λ. A cette même valeur de λ il correspondra, dans $\mathcal{T}$, une simple ligne caractéristique du second système [2] et un point de c' (celui où c' sera rencontrée par la caractéristique en question); de même, un point de $c`$ et une simple ligne caractéristique du premier système tracée dans $\mathcal{T}$ seront définis par une valeur μ du paramètre, celle qui correspond au point où cette deuxième caractéristique coupe $\mathcal{L}$; après quoi, tout point de $\mathcal{T}$ pourra être considéré comme ayant pour coordonnées curvilignes λ et μ.

Dans le plan des $\lambda\mu$, la figure $\mathcal{T}$ sera ainsi représentée par un carré dont deux côtés, ceux qui correspondent à c' et à $c`$, seront situés sur les axes coordonnés.

---

(1) H_1 sera une borne supérieure des gradients des inconnues pour un premier choix de la région $\mathcal{R}$.

(2) Si $\mathcal{L}$ est une ligne analytique — par exemple, une ligne droite — les coordonnées d'un point quelconque M de $\mathcal{T}$, intersection de deux méga-lignes caractéristiques respectivement issues de deux points n_1, n_2, de $\mathcal{L}$, seront des fonctions analytiques des paramètres λ, μ qui définissent ces deux points : $\mathcal{T}_2$ sera, à ce point de vue, le prolongement analytique de $\mathcal{T}_1$.

Or, ceci fait, nous voyons que la figure $\mathcal{T}$, que nous avons jusqu'ici construite à partir d'une solution supposée connue du problème de Cauchy, peut se construire à partir des seules données de ce problème, car nous avons vu que ces données déterminent les valeurs des variables le long de c' et de $c^{\backprime}$, c'est-à-dire le long des parties positives des deux axes coordonnés du plan des $\lambda\mu$, valeurs à partir desquelles on peut intégrer d'une manière parfaitement déterminée le système différentiel (I'), $(\mathrm{I}^{\backprime})$.

Toute autre solution du même problème de Cauchy correspondra aux mêmes valeurs des variables, tant le long de c' que le long de $c^{\backprime}$. La mégaligne caractéristique du premier système menée par un point quelconque de $c^{\backprime}$, correspondant à une valeur μ du paramètre sur cette ligne, et la mégaligne caractéristique du second système menée par un point quelconque de c' correspondant à une valeur λ du paramètre, se couperont en un point déterminé où seront définies par là même des valeurs de u, p, q, r, s, t. Or, la figure ainsi définie peut encore être construite à l'aide de notre système différentiel et des valeurs initiales portées par c' et $c^{\backprime}$. Elle n'est donc pas distincte de celle qui a été formée il y a un instant, c'est-à-dire qu'elle contient, en particulier (pour $\lambda = \mu$), la ligne $\mathcal{L}$ et le point N, en lequel u, p, q, r, s, t ont les mêmes valeurs que dans notre première solution.

C. Q. F. D.

TABLE DES MATIÈRES

INDEX

Les numéros en caractères ordinaires renvoient aux pages; les numéros en caractères gras (et entre parenthèses), aux paragraphes; la lettre n, au notes aux bas des pages.